УДК 539.3:534.1

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МНОГОСЛОЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛЕ БЕЛОГО ШУМА

Крылова Е.Ю.[1], Папкова И.В.[2], Синичкина А.О. [2]
[1]Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия, г.Саратов, krylova@bk.ru
[2]Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А. Россия, г. Саратов, ikravzova@mail.ru, andreevaanastasiaolegovna@gmail.com

CHAOTIC DYNAMICS MULTILAYER MECHANICAL SYSTEMS IN THE FIELD OF WHITE NOISE

Krylova E.Yu.[1], Papkova I.B.[2], Sinichkina A.O. [2]
Saratov State University, Russia, Saratov, krylova@bk.ru
[2]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov,
ikravzova@mail.ru, andreevaanastasiaolegovna@gmail.com

Аннотация. В работе построена математическая модель колебаний двух геометрически нелинейных балок модели Кирхгофа, учитывающая контактное взаимодействие и внешние аддитивные шумы. Рассматривается диссипативная система с большим количеством степеней свободы. Было проведено исследование сходимости метода конечных разностей второго порядка аппроксимации по пространственным переменным для рассматриваемых задач. Рассмотрено явление фазовой синхронизации, описан сценарий перехода колебаний изучаемой системы в хаос.

Ключевые слова: хаотическая динамика, контактное взаимодействие, белый шум, геометрическая нелинейность.

Abstract. In the work was constructed a mathematical model of oscillations of two geometrically nonlinear Kirchhof beam. Contact interaction and external additive noise have been taken into account. Dissipative system has been discussed with a large number degrees of freedom.

Keywords: chaotic dynamics, contact interaction, white noise, geometric nonlinearity.

Исследование динамики механических систем лежит в плоскости интересов многих ученых [1-2]. Вопросам хаотической динамики механических систем под действием продольных нагрузок посвящены работы [3-6]. В них рассмотрены сценарии перехода колебаний балок и оболочек из гармонических в хаотические, показано, что внешние флуктуации оказывают серьезное воздействие на колебательные режимы диссипативных динамических систем. Изучено влияние физической и геометрической нелинейности на характер численных результатов . Мало освещенным остается вопрос влияния внешних шумовых полей на контактное взаимодействие геометрически нелинейных диссипативных распределенных механических систем. В настоящей работе рассматривается новая математическая модель колебаний двухслойного пакета геометрически нелинейных пластин, находящихся под действием продольных и поперечных знакопеременных нагрузок, учитывающая контактное взаимодействие и случайные флуктуации внешней среды, в которой работает изучаемая динамическая система.

Механическая система в виде двухслойной изотропной однородной гибкой пластины, занимает в пространстве R^3 область $\Omega_1 = \{x_1, x_2, x_3 \mid (x_1, x_2) \in [0;a] \times [0;b], x_3 \in [-h;h]\}$. Математическая модель колебаний динамической системы построена в первом приближении на основе гипотезы Кирхгофа. Геометрическая нелинейность взята в форме, предложенной Теодором фон Карманом. Рассматривается система с внешней диссипацией. При решении контактных задач используется винклерова связь обжатия и контактного давления, это дает возможность исключить контактное давление из числа искомых функций.

Обезразмеренные уравнения движения элемента пластины, полученные на основе вариационного принципа Остроградского- Гамильктона, имеют вид [7]:

$$\begin{cases} \nabla^4 w_m + L(w_m; F_m) + \nabla^2 F_m + q - p_{x_1} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_2{}^2} - p_{x_2} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2} \pm K(w_1 - h_k - w_2)\Psi = \\ = \dfrac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + \varepsilon \dfrac{\partial w_m}{\partial t} \\ \\ \nabla^4 F_m = -\dfrac{1}{2} L(w_m; w_m) - \nabla^2 w_m \end{cases} \qquad (1)$$

где, $L(w_m, F_m) = \dfrac{\partial^2 w_m}{\partial x_1{}^2}\dfrac{\partial^2 F_m}{\partial x_2{}^2} + \dfrac{\partial^2 w_m}{\partial x_1{}^2}\dfrac{\partial^2 F_m}{\partial x_2{}^2} - 2\dfrac{\partial^2 w_m}{\partial x_1 \partial x_2}\dfrac{\partial^2 F_m}{\partial x_1 \partial x_2}$ – известный нелинейный оператор, $\psi = \dfrac{1}{2}\left[1 + sign\left(w_1 - h_k - w_2\right)\right]$ – функция контактного давления,. w_m и F_m – функция прогиба и усилия соответственно, $m = 1;\ 2$ – номер слоя, К =11000 – коэффициент жесткости трансверсального обжатия структуры в зоне контакта. $\Psi = 1$, если $w_1 > w_2 + h_k$ – есть контакт между пластинами, иначе $\Psi = 0$, h_k-зазор между слоями.

Система уравнений (1) приведена к безразмерному виду с использованием следующих параметров:

$x_1 = a\bar{x}_1$, $x_2 = bx_2$; $\bar{k}_{x1} = k_{x1}\dfrac{a^2}{h}$, $\bar{k}_{x2} = k_{x2}\dfrac{b^2}{h}$, $k_{x1} = \dfrac{1}{R_{1x}}$, $k_{x2} = \dfrac{1}{R_{x2}}$, $q = \bar{q}\dfrac{Eh^4}{a^2b^2}$,

$p_{x1} = \bar{p}_{x1}\dfrac{Eh^3}{b^2}$, $p_{x2} = \bar{p}_{x2}\dfrac{Eh^3}{a^2}$, $\tau = \dfrac{ab}{h}\sqrt{\dfrac{\rho}{Eg}}$, $\lambda_1 = \dfrac{a}{b}$, где a, b – размеры прямоугольной оболочки в плане по x_1 и x_2 соответственно, h – толщина оболочки, g – ускорение силы тяжести, $\rho = \gamma h$, где γ – объемный вес материала, R_{x1}, R_{x2} – радиус кривизны срединной поверхности по x_1 и x_2 соответственно, t - время, ε – диссипативный коэффициент среды, где работает структура, ν – коэффициент Пуассона для изотропного материала $\nu = 0.3$, E – модуль упругости, $p_{x1}(t)$, $p_{x2}(t)$ – продольные нагрузки вдоль соответствующих координат, $q(x_1, x_2, t)$ – нормальная нагрузка. Чтобы не усложнять запись, черточка над безразмерными величинами далее не пишется.

В математической модели учтены внешние флуктуации в виде аддитивного белого шума $q(x_1, x_2, t) = q_n + q_{nois}$, где $q_n = q_0 Sin\omega_{np} + q_{nois}$, q_0 и ω_{np} - амплитуда и частота внешней нормальной нагрузки, q_{nois} - внешнее нормальное к поверхности оболочки поле белого шума. Таким образом, внешние флуктуации добавлены в систему в виде случайного слагаемого с постоянной интенсивностью $q_{nois} = q_{n0}\left(2\dfrac{rand()}{RANDMAX+1} - 1\right)$, где q_{n0} - интенсивность шума, rand( ) - стандартная функция императивных языков программирования, принимающая случайное целое число от 0 до RAND_MAX, – константа максимального значения функции случайных чисел. Данная математическая модель белого шума предложена Perry R. Cook и Gary P. Scavone.

К системе (1) присоединяются граничные условия (2) шарнирного опирания на гибкие несжимаемые ребра [8] и начальные условия (3):

$$w_m = 0; \frac{\partial^2 w_m}{\partial x_1^2} = 0; F_m = 0; \frac{\partial^2 F_m}{\partial x_1^2} = 0 \text{ при } x_1 = 0;1; \qquad (2)$$

$$w_m = 0; \frac{\partial^2 w_m}{\partial {x_2}^2} = 0; F_m = 0; \frac{\partial^2 F_m}{\partial {x_2}^2} = 0 \text{ при } x_2 = 0;1$$

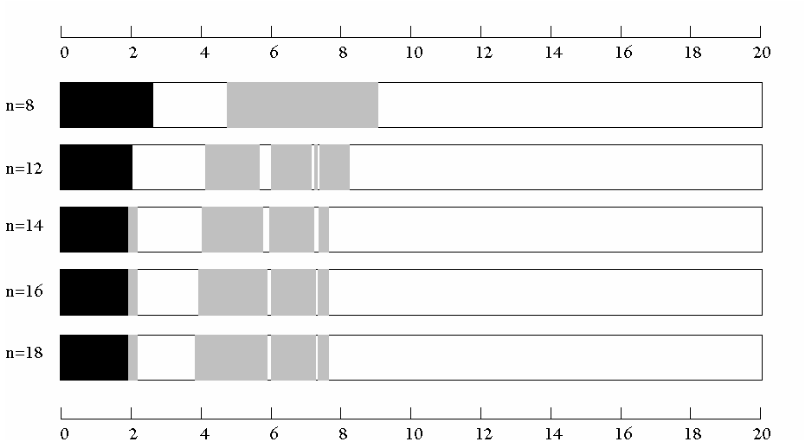
Начальные условия $w_m(x_1, x_2)|_{t=0} = \varphi_1(x_1, x_2), \ \frac{\partial w_m}{\partial t} = \varphi_2(x_1, x_2)$. (3)

Для сведения дифференциальной задачи в частных производных (1-3) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений применяется (по пространственным координатам) метод конечных разностей с аппроксимацией $O(c^2)$. Это особенно важно для анализа нелинейных динамических задач с распределенными параметрами, т. к. позволяет рассматривать механическую структуру, как систему с большим числом степеней свободы. Учет большего количества степеней свободы существенно отражается на точности получаемых результатов [9].

Для решения задачи Коши применяется метод Рунге – Кутта четвертого порядка точности. На каждом шаге по времени решается система линейных алгебраических уравнений, которая получается из второго уравнения системы относительно функции усилия с использованием метода обратной матрицы. Для выбора шага по времени применяется правило Рунге.

Для двухслойной пластины, в отсутствии внешних флуктуаций, находящейся под действием продольной знакопеременной нагрузки $p_{x1} = p_{x2} = p = p_1 Sin(\omega_p t)$ было проведено исследование сходимости метода конечных разностей с аппроксимацией $O(c^2)$, где c- шаг по пространственным координатам. На рисунке 1 представлены шкалы характера колебаний $\{p_1, \omega_0\}$ для верхней пластины. Колебания рассматривались на временном интервале $0 \le t \le 148$, $\lambda = 1$, зазор между пластинами $h_k = 0.25$, коэффициент диссипации среды $\varepsilon = 1$, частота внешней продольной нагрузки $\omega_p = 5.9$. Шкалы характера колебаний для $n = 8,12,14,16,18$ подтверждают сходимость метода конечных разностей (Рис. 1). Рост количества разбиений по сетке в методе конечных разностей приводит к более близким друг к другу результатам, и существенному увеличению времени работы алгоритма. Поэтому при дальнейших расчетах было выбрано $n = 16$.

Шкала, соответствующая $n = 16$, при малом значении амплитуды продольной силы отражает затухающие колебания. В диапазоне $5 < p_1 < 8$ колебания квазипериодические с хаотическими окнами. Дальнейший рост амплитуды нагрузки приводит к хаотическим колебаниям на всем рассматриваемом временном интервале.



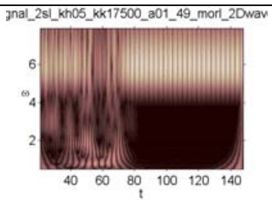
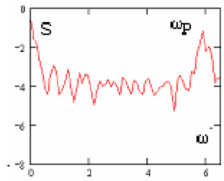
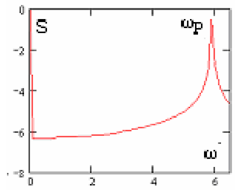
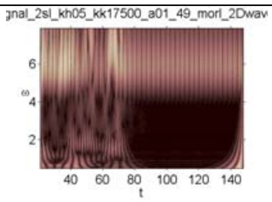
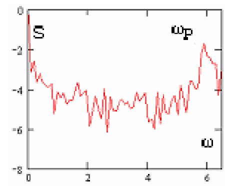
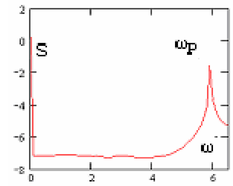
Черный – затухающие колебания; серый – квазипериодические колебания; белый – хаос

Рис. 1 Шкалы характера колебаний в зависимости от количества разбиений в МКР

Рассмотрим более детально первую хаотическую область, входящую в зону квазипериодических колебаний, на шкале. Данная область соответствует амплитуде продольной внешней нагрузки $4 \le p_1 \le 5$. Для анализа колебаний в этой области помимо Фурье анализа будем применять аппарат вевлет преобразований, который даст возможность оценить особенности колебаний, локализованные во времени. Для исследований возьмем материнский вейвлет, основанный на 32-ой производной функции Гаусса, как наиболее информативный (имеющий лучшую локализацию как по оси частот так и по оси времени). Обоснование выбора материнского вейвлета дано в работе [10]. Анализ колебаний в рассматриваемой зоне с помощью аппарата вейвлет-анализа показывает, что после контакта хаотические колебания обеих пластин синхронизируются, становясь квазипериодическими (при $p_1 = 4$ и $p_1 = 4.4$) и даже гармоническими ($p_1 = 4.9$, табл. 1). При $p_1 = 4$ после хаотического окна колебания пластины – двухчастотные (табл. 2). На спектре помимо частоты вынуждающей силы, присутствует частота, соответствующая удвоению периода колебаний системы $\omega_p / 2$.

Таблица 1

Параметры колебаний $\omega_p = 5.9$, $p_1 = 4.9$

	2D вейвлет-спектр	Спектр мощности Фурье $t \in [0;80)$ $S(\omega)$	Спектр мощности Фурье $t \in (80;158]$ $S(\omega)$
1 слой			
2 слой			

При $p_1 = 4.4$ после области хаоса на спектре наблюдается частота, соответствующая бифуркации удвоения периода, и пара линейно зависимых от ω_p частот (табл. 3).

Таблица 2

Параметры колебаний $\omega_p = 5.9$, $p_1 = 4$

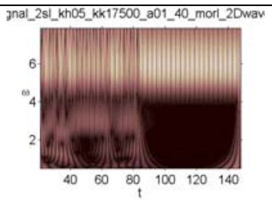
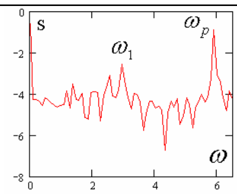
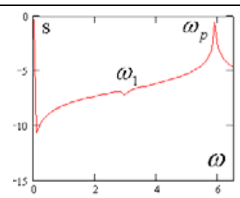
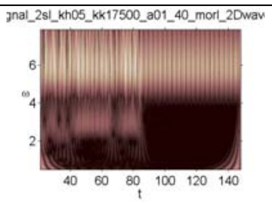
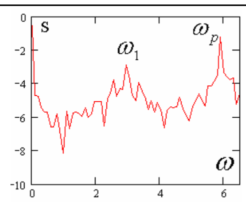
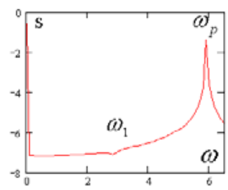
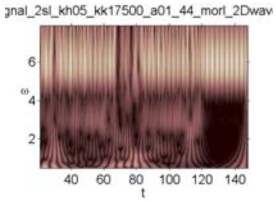
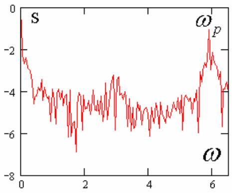
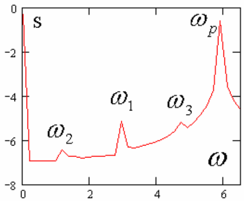
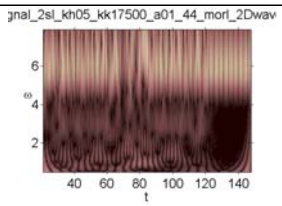
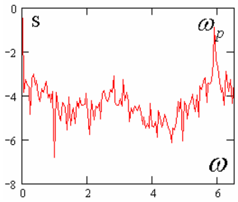
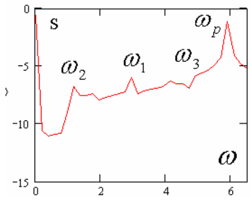
	2D вейвлет-спектр	Спектр мощности Фурье $t \in [0;100)$ $S(\omega)$	Спектр мощности Фурье $t \in (100;158]$ $S(\omega)$
1 слой			
2 слой			

Таблица 3

Параметры колебаний $\omega_p = 5.9$, $p_1 = 4.4$

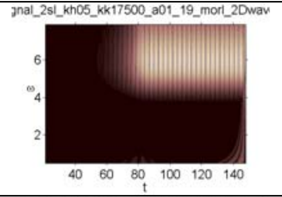
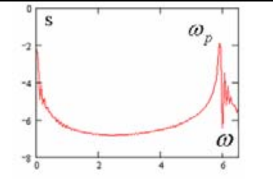
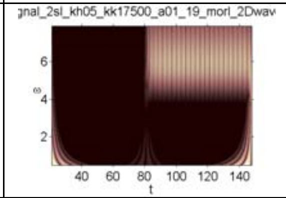
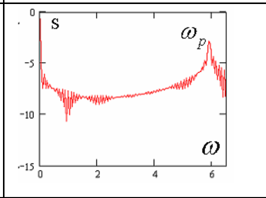
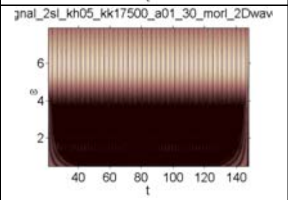
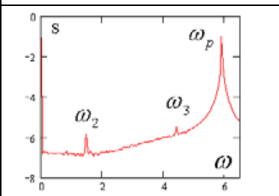
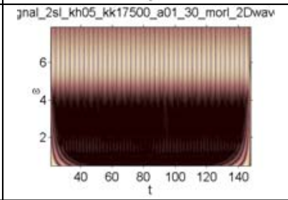
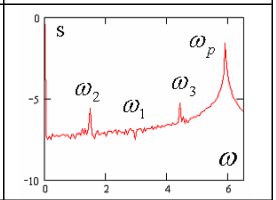
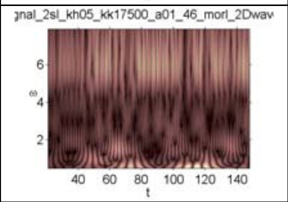
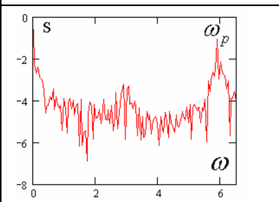
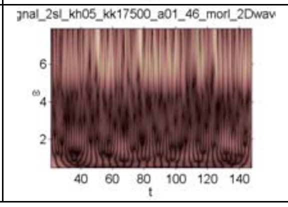
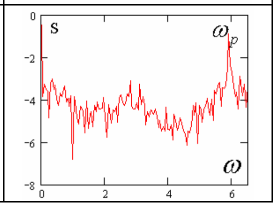
	2D вейвлет-спектр	Спектр мощности Фурье $t \in [0;120)$ $S(\omega)$	Спектр мощности Фурье $t \in (120;158]$ $S(\omega)$
1 слой			
2 слой			

Сценарий перехода колебаний динамической системы в виде двух прямоугольных пластин, соединенных через краевые условия опирания на гибкие нерастяжимые ребра, можно назвать модифицированным сценарием Рюэля – Такенса – Помо – Монневиля. На спектрах появляется несоизмеримая частота и парная ей частота (линейно зависящая от частоты вынуждающей силы). Затем появляется частота, равная половине частоты вынуждающей силы. Вейвлет-спектры показывают, что выше описанные частоты присутствуют не всюду по времени, а имеют четкие области включения-выключения. Переход к хаосу осуществляется путем появления на вейвлет-спектрах узких хаотических окон, т.е по пути описанному Помо и Монневилем (табл. 4).

Следует отметить, что захват амплитуд во всех рассмотренных численных экспериментах наступает сразу после контакта пластин ($p_1 = 1.9$). В случае, когда колебания системы не носят еще хаотического характера при малых значениях амплитуды внешней нагрузки ($p_1 = 3$) наблюдается синхронизация фаз колебаний пластин на частоте $\omega = 4$ с захватом амплитуд. Анализ колебаний при небольших значениях амплитуды вынуждающей силы с помощью аппарата вейвлет-преобразований показывает, что после контакта хаотические колебания обеих пластин полностью синхронизируются (с захватом амплитуд). В зоне хаотических колебаний на начальном интервале времени получена фазовая синхронизация на частоте вынуждающей нагрузки.

Таблица 4

Сценарий перехода в хаос двухслойных пластин $\omega_p = 5.9$

1 слой			2 слой		
p_0	2D вейвлет-спектр	Спектр мощности Фурье $S(\omega)$	p_0	2D вейвлет-спектр	Спектр мощности Фурье $S(\omega)$
1.9			1.9		
3			3		
4.6			4.6		

Выводы. Анализ сходимости метода конечных разностей второго порядка аппроксимации по пространственным координатам для динамических систем в виде двух гибких изотропных пластин с учетом контактного взаимодействия и внешних флуктуаций, показал, что оптимальным является разбиение с количеством узлов 16х16. Под действием внешней продольной нагрузки колебания рассматриваемой системы переходят в хаотические по модификации сценария Рюэля – Такенса – Помо – Монневиля. После контакта хаотические колебания обоих пластин с течением времени синхронизируются, становясь квазипериодическими и даже гармоническими.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00092)

Литература.

1. Ерофеев В. И., Архипова Н.И. Упругие волны в двумерных слоистых конструкциях // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2016. – № 1;URL: mathmod.esrae.ru/1-5(дата обращения: 24.11.2016).
2. Елистратова О.В., Кондратов Д.В. Моделирование динамики трех упругих соосных оболочек, свободно опертых на концах, взаимодействующих с двумя пульсирующими слоями жидкости,

находящихся между ними при пульсации давления // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2016. – № 1;URL: mathmod.esrae.ru/1-2 (дата обращения: 24.11.2016).
3. Сопенко А.А., Майорова О.А., Черепанов М.Д. Сложные колебания геометрически и физически нелинейных пологих оболочек // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2016. – № 3; URL:mathmod.esrae.ru/3-16 (дата обращения: 24.11.2016).
4. Крылова Е.Ю., Яковлева Т.В., Папкова И.В., Крысько В.А. Хаотическая динамика гибких прямоугольных в плане пластин при действии продольных нагрузок //Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77. № 3. С. 235-243.
5. Крылова Е.Ю., Яковлева Т.В., Баженов В.Г. Хаотическая динамика гибких прямоугольных в плане панелей в поле белого шума // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 1. С. 82-92.
6. Синичкина А.О., Крылова Е.Ю., Мицкевич С.А., Крысько В.А. Динамика гибких балок при действии ударных нагрузок с учетом белого шума //Проблемы прочности и пластичности. 2016. Т. 78. № 3. С. 280-288.
7. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
8. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения М.:Наука, 1964. 192с.
9. Awrejcewicz J., Krylova E.Y., Papkova I.V., Krysko V.A. Regular and chaotic dynamics of flexible plates // Shock and Vibration. 2014. Т. 2014. С. 937967.
10. Awrejcewicz J., Krysko V. A., Krylova E. Y., Papkova I. V. Analysis of nonlinear dynamics of plates and shells using the Lyapunov exponents and wavelets//Dynamical Systems -Theory. -Lodz: TU of Lodz Press, 2013, -P. 273-282.