УДК 629.78, 519.6

О ПРИМЕНЕНИИ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Панкратов И.А.
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, PankratovIA@info.sgu.ru

USING GENETIC ALGORITHM FOR SOLVING PROBLEM OF OPTIMAL SPACECRAFT ORBIT REORIENTATION

Pankratov I.A.
National Research Saratov State University, Russia, Saratov, PankratovIA@ info.sgu.ru

Аннотация. Рассмотрена задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА). Управление (вектор реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты) ограничено по модулю. Предложен подход к решению этой задачи, основанный на применении генетического алгоритма. Приведён пример численного решения задачи.

Ключевые слова: космический аппарат, орбита, генетический алгоритм.

Abstract. We consider the problem of optimal reorientation spacecraft orbit using jet thrust, orthogonal to the plane of the orbit and limited in magnitude. We were used the genetic algorithm to solve the problem. Example of numerical solution of the problem is given.

Keywords: spacecraft, orbit, genetic algorithm.

Предположим, что вектор ускорения $\boldsymbol{u}$ от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. Тогда орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура. Рассмотрим следующую задачу: пусть необходимо определить ограниченное по модулю управление $\boldsymbol{u}$:

$$-u_{max} \le u \le u_{max}, \tag{1}$$

ортогональное плоскости орбиты КА, движение центра масс которого описывается уравнениями [1, 2]:

$$\begin{gathered} 2\frac{d\Lambda}{dt} = \Lambda \circ \Omega_\xi, \quad \Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 \boldsymbol{i}_1 + \Lambda_2 \boldsymbol{i}_2 + \Lambda_3 \boldsymbol{i}_3, \quad \Omega_\xi = u\frac{r}{c}\left(\cos\varphi\, \boldsymbol{i}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{i}_2\right), \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \qquad r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}, \qquad c = \text{const}, \end{gathered} \tag{2}$$

переводящее орбиту КА из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0 \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \Lambda(0) = \Lambda^{\text{н}} \tag{3}$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию (время окончания управляемого процесса T считается заданным)

$$\varphi(T) = \varphi^* = ? \quad \mathbf{\Lambda}(T) = \pm\mathbf{\Lambda}^* \tag{4}$$

и минимизирующее функционал, характеризующий затраты энергии

$$J = \int_0^T u^2 \, dt.$$

Здесь $\mathbf{\Lambda}$ – нормированный кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА); $\circ$ – символ кватернионного умножения; $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона; $r = |\boldsymbol{r}|$ – модуль радиуса-вектора центра масс КА; $c = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|$ – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости $\boldsymbol{v}$ центра масс КА); u – проекция вектора реактивного ускорения $\boldsymbol{u}$ на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного мгновенной плоскости орбиты КА); φ – истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите; p и e – параметр и эксцентриситет орбиты.

Величины c, p, e, φ_0, $\mathbf{\Lambda}^{\text{н}}$ и $\mathbf{\Lambda}^*$ заданы (начальное и конечное значения кватерниона $\mathbf{\Lambda}$ могут быть найдены через заданные значения угловых элементов орбиты (долгота восходящего узла Ω_u, наклон орбиты I, угловое расстояние до перицентра ω_π) по известным формулам). Подлежат определению оптимальный закон управления $u = u(t)$ и величина φ^*.

Кватернион $\mathbf{\Lambda}$ является нормированным, поэтому краевое кватернионное условие (4), эквивалентное четырем скалярным, заменим на условие

$$\mathrm{vect}\left(\widetilde{\mathbf{\Lambda}}(t^*) \circ \mathbf{\Lambda}^*\right) = \mathbf{0}, \tag{5}$$

эквивалентное трем скалярным (в (5) и далее верхняя волна означает сопряженный кватернион).

Такая замена повышает эффективность численного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА.

Отметим, что так как компоненты кватерниона $\mathbf{\Lambda}$ (параметры Эйлера) является медленно меняющимися функциями времени (или истинной аномалии), то уравнения (2) являются более пригодными для численного решения задачи по сравнению с кватернионными уравнениями ориентации орбитальной системы координат [3-5]. В то же время кватернионное уравнение ориентации орбитальной системы координат удобно использовать для поиска аналитических решений (см., например, работы [6, 7]).

Запишем уравнения нашей задачи в безразмерных переменных. Фазовые переменные Λ_j являются безразмерными. Безразмерные модуль радиуса-вектора r^b, время t^b и управление u^b связаны с размерными переменными r, t и u соотношениями: $r = Rr^b$, $t = Tt^b$, $u = u_{\max}u^b$. Здесь R – характерное расстояние (величина, близкая к длине большой полуоси орбиты управляемого КА); $T = R^2 / c$ – характерное время.

Удобно перейти к новой независимой переменной – истинной аномалии. При этом порядок краевой задачи понижается ещё на одну единицу (в этом случае считается заданным конечное значение истинной аномалии φ^*).

Система фазовых уравнений в безразмерных переменных имеет следующий вид [8]:

$$2\frac{d\Lambda}{d\varphi} = N^b u^b \left(r^b\right)^3 \Lambda \circ \left(\cos\varphi\, \boldsymbol{i}_1 + \sin\varphi\, \boldsymbol{i}_2\right), \quad r^b = \frac{1}{1+e\cos\varphi}. \tag{6}$$

Здесь $N^b = u_{\max} R^3 / c^2$ – характерный безразмерный параметр задачи.

Ограничение по управлению в безразмерном виде

$$-1 \le u^b \le 1.$$

В работах [8, 9] поставленная задача решалась с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина [10]. При этом двухточечная краевая задача решалась численно с помощью оригинального алгоритма, являющегося комбинацией методов Рунге-Кутта, модифицированного метода Ньютона и градиентного спуска [11]. Отметим, что в этой задаче отсутствуют формулы для нахождения неизвестных начальных значений сопряжённых переменных. Необходимо отметить также плохую сходимость начальных приближений для значений сопряжённых переменных к тем значениям, которые доставляют нули функциям невязок из-за постоянного попадания в их локальные минимумы, где итерационные методы не дают хороших результатов. В настоящей статье к решению этой задачи применён генетический алгоритм. Опишем его основные этапы, следуя книге [12].

Будем искать оптимальное управление в виде кусочно-постоянной функции

$$u(t) = \begin{cases} u_1, \text{ если } 0 \le t < h; \\ u_2, \text{ если } h \le t < 2h; \\ \ldots \\ u_M, \text{ если } (M\text{-}1)h \le t \le Mh. \end{cases}$$

Здесь $h = T/M$; $u_1,....,u_M$ – искомые величины.

Вначале необходимо случайным образом сгенерировать популяцию из $N_{\max}$ пробных решений (особей), каждое из которых представляет собой набор из M вещественных чисел. При этом вместо вещественного числа u_j в памяти хранится целое число u_j^{int} (ген), $0 \le u_j^{int} \le 2^L - 1$. Связь между искомым вещественным числом и геном даётся формулой

$$u_j = -1 + \frac{2u_j^{int}}{2^L - 1}.$$

На втором шаге алгоритма для каждой особи методом Дормана-Принса 8-го порядка точности решается задача Коши для уравнений (6) с начальными условиями (3) (управление задаётся выбранной хромосомой). В качестве значения функции приспособленности (целевой функции) берётся модуль левой части соотношения (5). Как известно, принцип естественного отбора

заключается в том, что в конкурентной борьбе выживает наиболее приспособленная особь. В нашем случае, чем меньше значение целевой функции, тем более приспособленной является особь, т.е. пробное решение, использовавшееся в качестве аргумента целевой функции. Если на этом шаге для некоторой особи значение целевой функции меньше наперёд заданного малого числа ε, то выполнение алгоритма заканчивается, а управление, соответствующее данной особи, выдаётся в качестве решения задачи. Если же превышено максимальное число итераций $N_{iter}^{\max}$, то в качестве решения задачи выдаётся управление, соответствующее особи с минимальным значением целевой функции.

На третьем шаге алгоритма отбрасывается половина особей, имеющих наибольшие (худшие) значения целевой функции (предполагается, что количество особей $N_{\max}$ является чётным). Затем производится скрещивание особи с наименьшим значением целевой функции со всеми остальными, в том числе и с самой собой. В качестве оператора скрещивания был выбран метод промежуточной рекомбинации [12]. Потомки создаются по следующему правилу:

$$\text{Потомок} = \text{Родитель1} + \alpha \cdot (\text{Родитель2} - \text{Родитель1}).$$

Здесь α – случайное число на отрезке $[-0.25; 1.25]$.

Для каждого гена создаваемого потомка выбирается отдельный множитель α. Полученные гены потомка округляются до ближайших целых чисел, лежащих на отрезке $[0; 2^L - 1]$. В результате получается новая популяция из $N_{\max}$ особей.

На четвёртом шаге алгоритма вычисляется среднее значение целевой функции для популяции, полученной на третьем шаге. Если оно больше, чем среднее значение целевой функции, вычисленное на втором шаге, то производится мутация особей в популяции. Для этого гены всех особей записываются в двоичном виде (на каждый ген отводится ровно L бит) и с вероятностью $p_{mut} \in (0; 1]$ производится инвертирование случайным образом выбранного бита каждого гена. Затем осуществляется возврат ко второму шагу алгоритма.

Отметим, что описанный алгоритм необходимо применять неоднократно для разных начальных популяций. При этом будет получено несколько решений, из которых необходимо выбрать то, которое доставляет минимальное значение функционалу J.

Для численного решения поставленной задачи с помощью описанного выше алгоритма была составлена программа на языке Python.

Величины, характеризующие форму, размеры орбиты КА, начальное и конечное положения КА на орбите, начальную и конечную ориентации орбиты КА, полагались равными [13]:

$$u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N^b = 0.35.$$

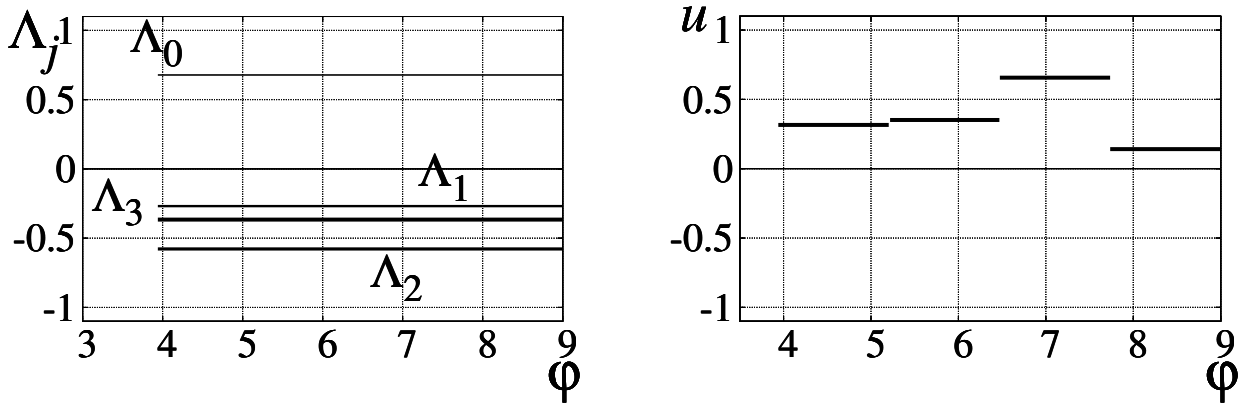
Начальная ориентация орбиты КА ($\varphi_0 = 3.940323$ рад) характеризуется параметрами Эйлера:

$$\Lambda_0^{н} = 0.679417, \quad \Lambda_1^{н} = -0.245862, \quad \Lambda_2^{н} = 0.539909, \quad \Lambda_3^{н} = -0.353860.$$

Конечная ориентация орбиты КА (отличие ориентаций орбит по долготе восходящего узла, наклону, угловому расстоянию перицентра от узла составляет единицы градусов):

$$\Lambda_0^{*} = 0.678275, \quad \Lambda_1^{*} = -0.268667, \quad \Lambda_2^{*} = 0.577802, \quad \Lambda_3^{*} = -0.366116.$$

На рис. 1 приведены результаты решения задачи оптимальной переориентации эллиптической орбиты КА для следующих значений параметров генетического алгоритма: $M = 4$, $L = 30$, $N_{\max} = 100$, $p_{mut} = 0.9$, $\varphi^{*} = 9$ рад.



а) Фазовые координаты б) Оптимальное управление

Рис.1. Эллиптическая орбита ($e = 0.5$)

Отметим, что величины управления на первом и втором участках активного движения КА близки друг к другу, а законы изменения компонент кватерниона ориентации орбиты близки к линейным.

В дальнейшем предполагается модифицировать описанный генетический алгоритм для случая, когда время окончания управляемого процесса неизвестно.

Литература

1. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
2. Челноков Ю.Н., Панкратов И.А. Переориентация орбиты космического аппарата, оптимальная в смысле минимума интегрального квадратичного функционала качества // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 8. С. 74-78.
3. Челноков Ю.Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. I // Космические исследования. 2001. Т. 39, вып 5. С. 502-517.

4. Челноков Ю.Н., Панкратов И.А. Переориентация круговой орбиты космического аппарата с тремя точками переключения управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 70-73.
5. Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84-92.
6. Панкратов И.А., Челноков Ю.Н. Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 84-89.
7. Панкратов И.А. Аналитическое решение уравнений ориентации околокруговой орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 97-105.
8. Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87-95.
9. Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н. Численное исследование задачи управления ориентацией орбиты космического аппарата // Математика. Механика. 2010. № 12. С. 170-173.
10. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.
11. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
12. Панченко Т.В. Генетические алгоритмы. Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2007. 87 с.
13. Челноков Ю.Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. III // Космические исследования. 2003. Т. 41, вып. 5. С. 488-505.