УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ДВУСВЯЗНОЙ ПЛАСТИНКЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Фомин В.Г.
Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, foma777@rambler.ru

EFFECT OF VARIABLE THICKNESS ON THE STRESS DISTRIBUTION IN A DOUBLY CONNECTED PLATE UNDER THE INFLUENCE OF TEMPERATURE FIELD

Fomin V.G.
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
Russia, Saratov, foma777@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача теплопроводности и термоупругости для двухсвязной пластинки переменной толщины. В качестве метода решения используется метод конечных элементов. Рассматривается два различных закона изменения в зависимости от радиуса и угла толщины пластинки и постоянная толщина. Проводится сравнение результатов для определения мест возникновения максимальных напряжений для различных законов изменения толщины.

Ключевые слова: задачи теплопроводности и термоупругости, пластинка переменной толщины в зависимости от радиуса и угла, метод конечных элементов.

Abstract. The paper considers the problem of heat conduction and thermoelasticity for a doubly connected plates of variable thickness. As a method for solving the finite element method is used. We consider two different law changes depending on the radius and angle of the plate thickness and a constant thickness. A comparison of the results to determine the location of the maximum stress to the various laws thickness changes.

Keywords: problem of thermal conductivity and thermal elasticity, the plate of variable thickness depending on the radius and angle, finite element method.

Определение поля температур является первым этапом решения задачи термоупругости.

Рассматривается плоская задача теплопроводности для двухсвязной области. Внутренний контур представляет собой окружность радиуса R_1, внешний – квадрат со стороной $2R_2$ (рис. 1). На внутреннем контуре задана температура T_1, на внешнем - T_2; основания теплоизолированы. Пластина симметрична относительно срединной плоскости и имеет переменную толщину. Предполагается, что температура по толщине постоянна и удовлетворяет уравнению теплопроводности [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x}(h\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(h\frac{\partial T}{\partial y})=0 \qquad (1)$$

Интегрирование уравнения (1) эквивалентно нахождению экстремума функционала [2]:

$$J=\frac{1}{2}\iint h\left[(\frac{\partial T}{\partial x})^2+(\frac{\partial T}{\partial y})^2\right]dxdy \qquad (2)$$

Для отыскания минимума функционала (2) разбиваем область на треугольные элементы:

$$J=\sum_{i=1}^{N}J^{(i)}, \text{ где}$$

N - число элементов;

$$J^{(i)}=\frac{1}{2}h_i\iint\left[(\frac{\partial T}{\partial x})^2+(\frac{\partial T}{\partial y})^2\right]dxdy;$$

h_i - средняя толщина элемента.

В пределах каждого элемента функция температур аппроксимируется линейным сплайном: $T=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y$

Приняты следующие характеристики материала пластинки:

$E=2.1\cdot 10^5\,мПа$ - модуль Юнга;

$\mu=0.3$ - коэффициент Пуассона;

$\alpha=12\cdot 10^{-6}\,1/K^o$ коэффициент линейного расширения.

Соотношение между контурами определялось зависимостью $\frac{R_1}{R_2}=\frac{3}{8}$.

Температура на внутреннем контуре $T_1=273^0K$, на внешнем - $T_2=373^0K$.

Принимая во внимание геометрическую симметрию пластинки и температурные условия на границе, была рассмотрена только часть пластинки с учетом наложения дополнительных связей, т.е. на участках AB и FD выполнены условия теплоизоляции и, кроме того, перемещения в горизонтальном направлении на отрезке AB и в вертикальном направлении на участке FD равны нулю (рис. 2).

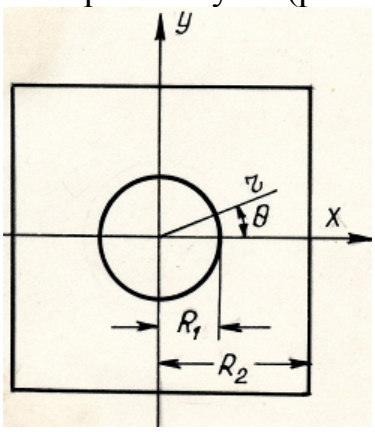

Рис. 1.

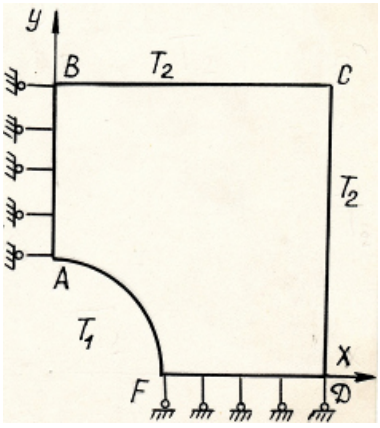

Рис. 2

Рассмотрены три случая изменения толщины пластинки.

1 случай. Пластинка имеет постоянную толщину $h = const$.

2 случай. Переменность толщины h в радиальном направлении определялась зависимостью: $h(r) = h(\sqrt{x^2 + y^2}) = A_1(1 - A_2\sqrt{x^2 + y^2})$, где

$$A_1 = \frac{h_1 R_2 - h_2 R_1}{R_2 - R_1};$$

$$A_2 = \frac{h_1 - h_2}{h_1 R_2 - h_2 R_1};$$

h_1 - толщина на внутреннем контуре пластинки;

h_2 - толщина на внешнем контуре на осях x и y.

3 случай. Переменность толщины в зависимости от угла определялась следующими соотношениями: $h(\theta) = h(arctg(\frac{y}{x})) = h_0(1 + A\cos 4\theta)$, где

$$h_0 = \frac{1}{2}(h_1 + h_2);$$

$$A = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2};$$

h_1 и h_2 - толщины пластинки в направлениях $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Были рассмотрены пластинки с соотношением параметров толщины $\frac{h_1}{h_2} = 2$.

На рис. 3 и рис. 4 показано распределение температуры для двух направлений во всех трех случаях изменения толщины пластинки: на рис. 3 вдоль оси x (т.е. при $\theta = 0$), на рис. 4 по диагонали квадрата (т.е. при $\theta = \frac{\pi}{4}$).

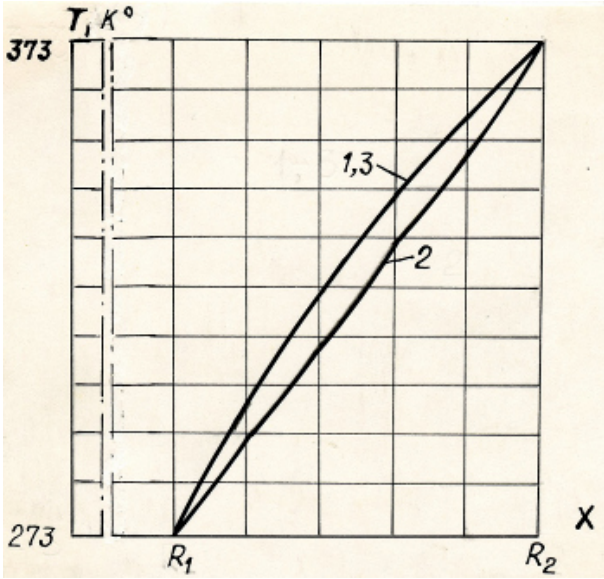

Рис. 3

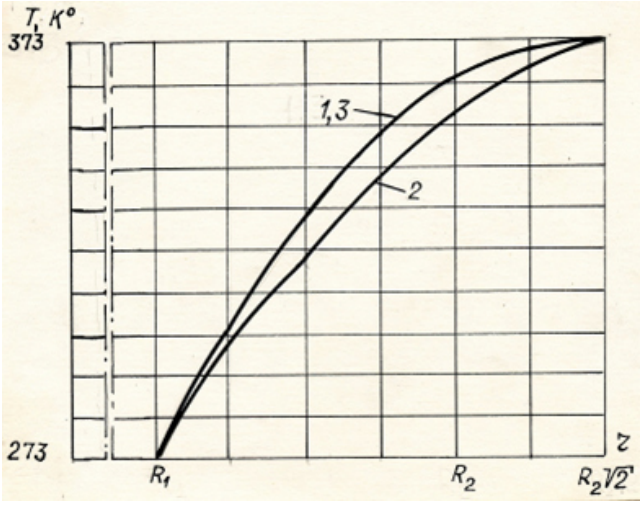

Рис. 4

Решение задачи термоупругости получено методом конечных элементов, построенным на принципе минимизации функционала потенциальной энергии деформации.

$U = \sum_{i=1}^{N} U^{(i)}$, где N - число элементов.

Вид функционала для каждого элемента следующий [3]:

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} h_i \iint \Big[\frac{E}{1-\mu^2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y} - (1+\mu)\alpha T\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha T\Big) +$$

$$+ \frac{E}{1-\mu^2}\Big(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\frac{\partial u}{\partial x} - (1+\mu)\alpha T\Big)\Big(\frac{\partial v}{\partial y} - \alpha T\Big) + \frac{E}{2(1+\mu)}\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 \Big] dxdy$$

На рис.5 и рис.6 показано распределение главных напряжений σ_θ для двух направлений во всех трех случаях изменения толщины пластинки: на рис.5 вдоль оси x (т.е. при $\theta = 0$, где напряжения σ_θ и σ_y совпадают), на рис.6 по диагонали квадрата (т.е. при $\theta = \frac{\pi}{4}$).

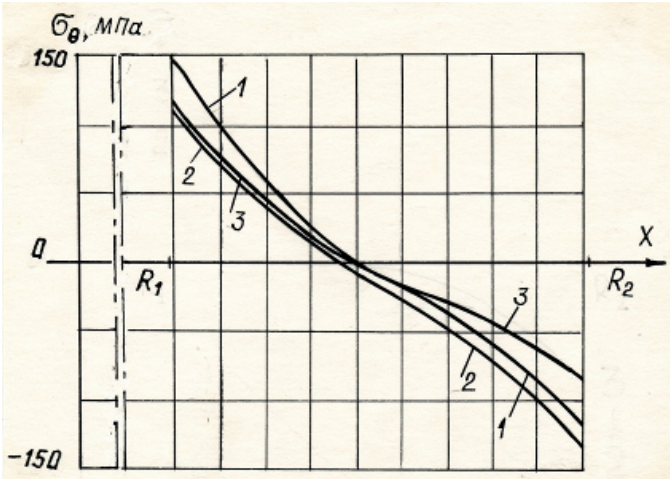

Рис. 5

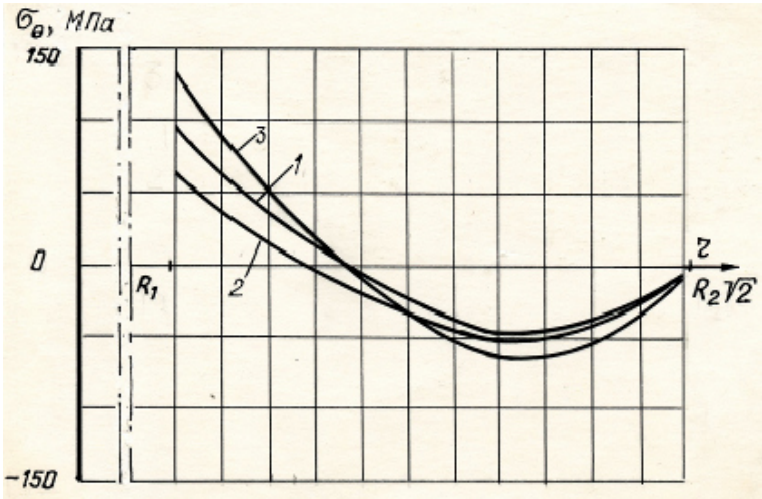

Рис. 6

Сравнение графиков 1, 2 и 3 на рисунках 5 и 6 позволяет сделать вывод, что максимальные напряжения в пластинках с постоянной и переменной толщиной возникают в разных местах: в случае пластинки постоянной толщины – это точка внутреннего контура при $\theta = 0$; для пластинки с радиально изменяющейся толщиной – точка внешнего контура при $\theta = 0$; а для пластинки с толщиной, зависящей от угла θ - точка внутреннего контура при $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Литература:

1. Фомин В.Г. Пластинки сложного очертания под действием температурного поля. Автореф. дисс. … к. ф.-м. н. Саратов. 1991. 20 с.
2. Фомин В.Г. Моделирование двухсвязной пластинки, находящейся в поле температур под воздействием агрессивной среды. // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-29 [текст]: сб. трудов XXIX Междунар. науч. конф.: в 12 т. Т.2. / под общ. ред. А.А. Большакова. – Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т; Санкт-Петербург: СПбГТИ(ТУ), СПбПУ, СПИИРАН; Самара: Самарск. гос. техн. ун-т, 2016. 230 с. С.83-85.
3. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.