

УДК 532.5.032

## ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТЕЛА В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Афанасов Е.Н.<sup>1</sup>, Кадыров С.Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ФГУП «Крыловский государственный научный центр», инженер 2 кат.,  
Россия, г. Санкт-Петербург, zhenya.afanasov@yandex.ru

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,  
профессор кафедры математики, Россия, г. Санкт-Петербург

## BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS AND ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE PLANE PROBLEM OF SMALL OSCILLATIONS OF BODY IN A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

Afanasov E. N.<sup>1</sup>, Kadyrov S. G.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Krylov Shipbuilding Research Institute, engineer 2 cat., Russia, St. Petersburg,  
zhenya.afanasov@yandex.ru

<sup>2</sup>State Marine Technical University of Sankt-Petersburg, the professor of the  
Department of Mathematics, Russia, St. Petersburg

**Аннотация.** Рассматриваются малые гармонические во времени колебания двумерного твердого тела, погруженного в вязкую несжимаемую жидкость. Показано, что уравнения такой модели, сформулированные относительно потенциалов, сводятся к эквивалентной системе граничных интегральных уравнений (ГИУ). Построено асимптотическое решение таких ГИУ. Результаты сравниваются с известными точными теоретическими решениями и с результатами, полученными авторами ранее численным методом.

Ключевые слова: линеаризованные уравнения Навье-Стокса, вязкая несжимаемая жидкость, колебания твердого тела, граничные интегральные уравнения

**Abstract.** In the paper discusses small time-harmonic oscillations of a two-dimensional rigid body immersed in a viscous incompressible fluid. Shown, that the equations of such a model can be formulated in equivalent system of boundary integral equations (BIE) relative to potentials. Obtained an asymptotic solution such BIE. The results compared with the known exact theoretical solutions and the results obtained previously by numerical methods.

Key words: linearized Navier-Stokes equations, viscous incompressible fluid, oscillations of body, boundary integral equations

### Постановка задачи

Движение, возникающее в вязкой жидкости при малых колебаниях погруженных в нее тел, характеризуется возникновением в ней поперечных волн, в которых скорость направлена преимущественно перпендикулярно направлению распространения волны. В этих условиях конвективный член в уравнениях Навье-Стокса мал по сравнению с остальными членами и возможно использование линеаризованных уравнений [1]

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \vec{v}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\vec{v}$  – вектор скорости,  $\rho_0$  – плотность жидкости,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $p$  – давление. В случае гармонических колебаний с частотой  $\omega$  уравнение (1) записывается в виде

$$-i\omega \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \vec{v}, \quad (3)$$

В уравнении (3) подразумеваются амплитуды входящих в уравнения (1)-(2) величин.

Влияние вязкости в задачах, относящихся к малым колебаниям, рассматривалось еще в классическом труде Ламба [2].

Задача о колебаниях плоских контуров, погруженных в вязкую несжимаемую жидкость, является весьма важной для различных приложений в нанотехнологиях [3-5], в технике сенсорных измерений [6, 7], в гидромеханике оффшорных конструкций [8-12].

### Формула Морисона

Уравнения (1)-(2) несмотря на их линейность, редко удается решить аналитическими (точными) методами. Удачным оказалось применение соображений теории пограничного слоя, пригодной при больших значениях параметра  $\beta = \frac{\omega L^2}{\nu}$  ( $L$  – характерный размер тела).

Для двумерного тела (плоская постановка) задача о гармонических колебаниях тела кинематически эквивалентна задаче об обтекании тела гармонически изменяющимся во времени внешним потоком. С динамической точки зрения «поперечный» градиент давления находится в фазе с ускорением и может быть приближенно определен по теории идеальной жидкости. Эти простые соображения в духе теории пограничного слоя привели основоположников классической гидромеханики [13-18] к приближенному описанию гидродинамической реакции тела, совершающего малые гармонические колебания с частотой  $\omega$  вдоль своего наибольшего размерения. Конечно, при таких рассуждениях имеется в виду ламинарный характер течения и отсутствие срыва потока. Простейшая геометрия предполагает контур в виде окружности, однако более поздние теоретические и экспериментальные исследования показали [19, 20] применимость идей даже в случае плохо обтекаемых контуров.

Теоретически сила сопротивления имеет два «источника» – сила давления и сила трения. Согласно [21] эти компоненты находятся единым методом для всех плоских контуров. Сила трения  $F_{BL}$  (приходящаяся на единицу длины контура  $\Gamma$ , движущегося параллельно декартовой оси  $Ox$ ), определяемая из теории пограничного слоя Стокса равна

$$F_{BL} = (1 + i) \sqrt{\frac{2}{\beta}} \rho_0 \omega D \int_{\Gamma} V_p n_y d\Gamma, \quad (4)$$

где  $D$  – диаметр твердого тела,  $V_p$  – тангенциальная составляющая скорости, определяемая по модели идеальной жидкости,  $\beta = \frac{\omega D^2}{\nu}$ .

Сила давления  $F_p = \frac{1}{2} i \rho_0 u_0 \omega D \int_{\Gamma} p n_x d\Gamma$  находится из потенциальной постановки задачи.

Для практических целей удобно использовать безразмерные коэффициенты

$$C_D = \frac{\text{real}(F_{BL})}{\frac{1}{2} \rho_0 u_0^2 D} \quad (5)$$

– коэффициент демпфирования и

$$C_m = \frac{\text{imag}(F_p + F_{BL})}{\rho_0 \omega u_0 S} \quad (6)$$

– инерционный коэффициент ( $S$  – площадь поперечного сечения контура).

В более общем случае гидродинамическую реакцию принято записывать в виде так называемого уравнения Морисона [22, 23]

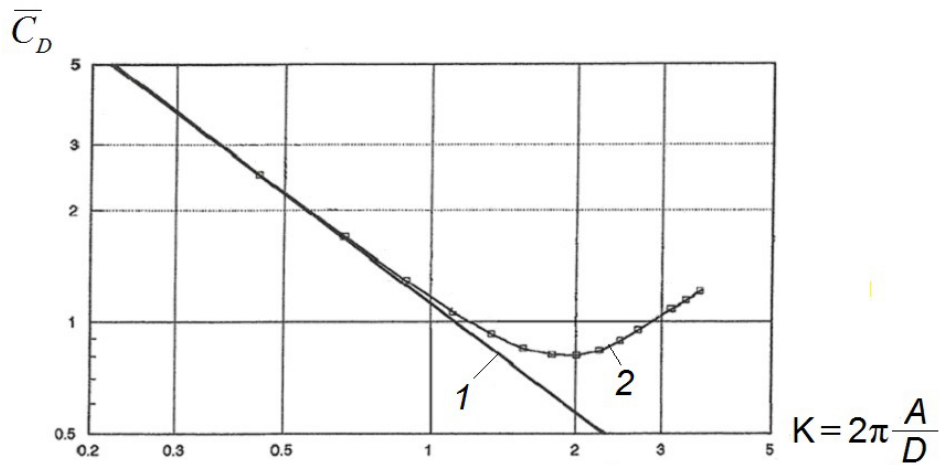
$$F = \frac{1}{2} \rho_0 U |U| D C_D + \frac{\pi}{4} \rho_0 D^2 \frac{dU}{dt} C_m. \quad (7)$$

В линейном варианте теории при нестационарном движении контура со скоростью  $U(t)$  коэффициенты находятся из формул (5)-(6), в более общем случае, когда линейная теория неприменима, их определяют экспериментально.

Границы области применимости линейной теории определяет малость числа  $\delta = \frac{A}{L}$  – отношение амплитуды колебаний к характерному размеру контура.

На рис. 1 показаны результаты эксперимента и расчета (сплошная линия) коэффициента  $\bar{C}_D = \frac{3\pi}{8} C_D$  как функции числа  $K = 2\pi\delta$  (число Кейлегана-

Карпентера) [23, 24] для кругового цилиндра (при  $\beta = \frac{\omega D^2}{2\pi\nu} = 650$ )



1 – линейная теория [18];  
 2 – экспериментальные данные [24];  
 Рисунок 1 – Зависимость коэффициента сопротивления от числа К

Интересно, что хорошее совпадение результатов наблюдается вплоть до  $\delta \sim 0,2$  ( $\delta = \frac{A}{D}$ ), то есть отнюдь не только при малых значениях параметра  $\delta$ .

### Метод потенциалов А.Н. Гузя [25]

Метод потенциалов (в его двумерном варианте) использует представление декартовых компонент вектора скорости в виде

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (8)$$

Подстановка (8) в систему (1)-(2) дает

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0, \\ \nu \Delta \psi + i\omega \psi &= 0, \\ p &= i\omega \rho_0 \varphi. \end{aligned}$$

Граничные условия «прилипания»

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = U \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = V \end{cases} \quad (9)$$

( $U, V$  – компоненты вектора скорости точек тела) и затухания «на бесконечности»

$$\varphi, \psi \xrightarrow[r=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow +\infty]{} 0$$

замыкают систему уравнений.

В безразмерных переменных  $\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\omega L^2}$ ,  $\bar{\psi} = \frac{\psi}{\omega L^2}$ ,  $\bar{p} = \frac{p}{\rho_0 \omega^2 L^2}$ ,  $\bar{U} = \frac{U}{\omega L}$ ,  
 $\bar{V} = \frac{V}{\omega L}$  (далее верхние черты опущены)

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \Delta\psi + i\beta\psi = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$p = i\varphi, \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = U \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = V \end{cases} \quad (12)$$

### Уравнения метода граничных интегральных уравнений в локальной системе координат

В работе одного из авторов ([26]) система дифференциальных уравнений (10) сведена к двум граничным интегральным уравнениям (ГИУ):

$$\frac{1}{2}\varphi(M_0) - \int_{\Gamma} \varphi(M)\varphi_n^*(M_0, M)dl_M = - \int_{\Gamma} \frac{\partial\varphi(M)}{\partial n_M} \varphi^*(M_0, M)dl_M \quad (13)$$

$$\frac{1}{2}\psi(M_0) - \int_{\Gamma} \psi(M)\psi_n^*(M_0, M)dl_M = - \int_{\Gamma} \frac{\partial\psi(M)}{\partial n_M} \psi^*(M_0, M)dl_M \quad (14)$$

В интегральных уравнениях (13)-(14) символы  $M_0, M \in \Gamma$  указывают на точку «наблюдения» и точку «интегрирования» (рис. 2), при этом никакая конкретная система координат не используется,  $\varphi^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho}$ ,  $\psi^* = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{i\beta\rho})$  – функции Грина для уравнения Лапласа (13) и уравнения «типа» Гельмгольца (14) [27],  $\rho = \rho(M_0, M)$  – расстояние между  $M_0, M$ .

$$\varphi_n^*(M_0, M) = \frac{\partial\varphi^*(M_0, M)}{\partial n_M}, \quad \psi_n^*(M_0, M) = \frac{\partial\psi^*(M_0, M)}{\partial n_M}.$$

Метод численного решения системы ГИУ и примеры расчета приведены в указанной выше статье [26]. По известным граничным значениям потенциалов можно определить компоненты тензора вязких напряжений и силы, действующие на контур. Например, если контур движется параллельно оси  $Ox$ , то, как показано в статье [26], составляющая силы, параллельная этой оси равна

$$F_x = -i \int_{\Gamma} \varphi(M)n_x dl_M + i \int_{\Gamma} \psi(M)n_y dl_M \quad (15)$$

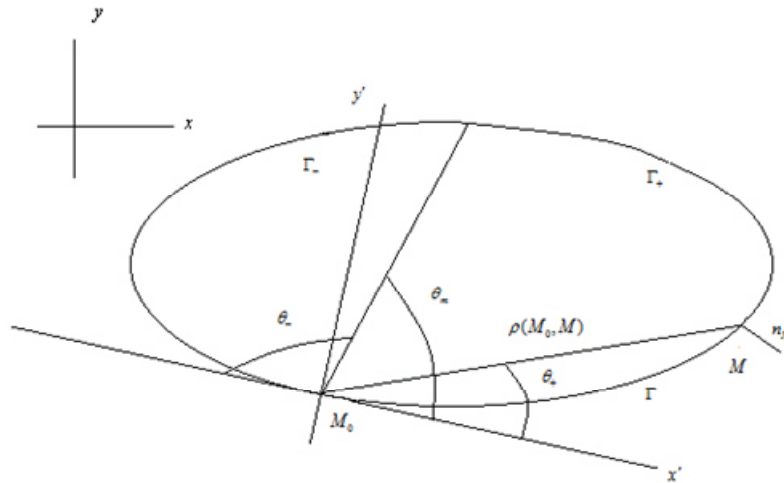


Рисунок 2 – Система координат

Введем локальную декартову систему координат  $x', y'$  с центром в точке наблюдения и осью  $M_0x'$ , направленной по касательной к контуру  $\Gamma$ , уравнение кривой в локальной системе координат  $y' = y'(x')$ , причем  $y'(0) = \left. \frac{dy'}{dx'} \right|_{x'=0} = 0$ .

Граничные условия для нормальных и касательных составляющих скоростей в точках контура  $\Gamma$  (12) перепишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = V_n, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{\partial \psi}{\partial n} = V_\tau. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь  $\vec{n} = (n_{x'}, n_{y'})$ ,  $\vec{\tau} = (\tau_{x'}, \tau_{y'})$  – нормальный и касательный орты,  $V_n, V_\tau$  – нормальная и касательная составляющие вектора скорости контура в точке интегрирования.

В частности, в точке наблюдения

$$\frac{\partial}{\partial n_{M_0}} = -\frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau_{M_0}} = \frac{\partial}{\partial x'}.$$

Теперь ГИУ (13)-(14) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \varphi(M_0) - \int_{\Gamma} \varphi(M) \varphi_n^*(M_0, M) dl_M = - \int_{\Gamma} \left( V_n - \frac{\partial \psi}{\partial \tau_M} \right) \varphi^*(M_0, M) dl_M, \\ \frac{1}{2} \psi(M_0) - \int_{\Gamma} \psi(M) \psi_n^*(M_0, M) dl_M = - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_M} - V_\tau \right) \psi^*(M_0, M) dl_M. \end{cases} \quad (17)$$

### Асимптотический метод решения системы ГИУ

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся асимптотики интегралов вида  $\int_{\Gamma} f(M) \psi^*(M_0, M) dl_M, \int_{\Gamma} f(M) \psi_n^*(M_0, M) dl_M$  при  $\beta \rightarrow +\infty$ .

Используем интегральные представления функций Ханкеля [28, 29]

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{i\beta z}) = \frac{1}{2\pi} \int_z^{+\infty} \frac{e^{i\sqrt{i\beta t}}}{\sqrt{t^2 - z^2}} dt, \quad H_1^{(1)}(\sqrt{i\beta z}) = \frac{2}{\pi} i\sqrt{i\beta z} \int_0^{\infty} e^{i\sqrt{i\beta z} \text{cht}} \text{sh}^2 t dt.$$

Предполагая контур выпуклым, разобьем его на две части  $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$  точкой с полярным углом  $\theta_+ = \theta_m$ .

В точках части  $\Gamma_+$ :  $x' = r(\theta_+) \cos \theta_+, y' = r(\theta_+) \sin \theta_+, 0 \leq \theta_+ \leq \theta_m$

$$r(\theta_+) = A\theta_+ + B\theta_+^2 + \dots,$$

$$A = \frac{dr}{d\theta_+} (+0), B = \frac{d^2 r}{d\theta_+^2} (+0) \quad (18)$$

Используя формулу для кривизны  $\kappa = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$  [27] и представление

(18), можно проверить, что  $\frac{2}{A} = \kappa(M_0)$ .

Далее

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_+} f(M) \psi^*(M_0, M) dl_M &= \int_0^{\theta_m} f(\theta_+) \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{i\beta r(\theta_+)}) \sqrt{r^2(\theta_+) + r'^2(\theta_+)} d\theta_+ = \\ &= \int_0^{\theta_m} f(\theta_+) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{r(\theta_+)}^{+\infty} \frac{e^{i\sqrt{i\beta t}}}{\sqrt{t^2 - r^2(\theta_+)}} dt \right) \sqrt{r^2(\theta_+) + r'^2(\theta_+)} d\theta_+ = \\ &= \int_0^{\theta_m} e^{i\sqrt{i\beta t}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\theta_m(t)} \frac{f(\theta_+) \sqrt{r^2(\theta_+) + r'^2(\theta_+)}}{\sqrt{t^2 - r^2(\theta_+)}} d\theta_+ dt = \int_0^{r_m} e^{i\sqrt{i\beta t}} F(t) dt \end{aligned}$$

где  $F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\theta_+(t)} \frac{f(\theta_+) \sqrt{r^2 + r'^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}} d\theta_+, \theta_+(t)$  – обратная к  $r = r(\theta_+)$  функция.

Аналогично

$$\begin{aligned} \psi_n^*(M_0, M) &= \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(\sqrt{i\beta r}) = -\frac{i}{4} \sqrt{i\beta} H_1^{(1)}(\sqrt{i\beta r}) \frac{\partial r}{\partial n} = \\ &= -\frac{i}{4} \sqrt{i\beta} H_1^{(1)}(\sqrt{i\beta r}) \frac{r(\theta_+)}{\sqrt{r^2(\theta_+) + r'^2(\theta_+)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_+} f(M) \psi_n^*(M_0, M) dl_M &= \int_0^{\theta_m} \left( \frac{1}{2\pi} i\beta r^2(\theta_+) \int_0^{\infty} e^{i\sqrt{i\beta r(\theta_+) \text{cht}} \text{sh}^2 t dt \right) f(\theta_+) d\theta_+ = \\ &= \frac{1}{2\pi} i\beta \int_0^{\infty} \text{sh}^2 t G(t) dt \end{aligned}$$

где  $G(t) = \int_0^{\theta_m} e^{i\sqrt{i\beta r(\theta_+) \text{cht}} f(\theta_+) r^2(\theta_+) d\theta_+.$

Для интегралов вида  $\int_0^{r_m} e^{iS(t)\sqrt{i\beta}} f(t)dt$  последовательным интегрированием

по частям можно построить асимптотическое разложение при  $\beta \rightarrow \infty$  [30]:

$$\int_0^{r_m} e^{iS(t)\sqrt{i\beta}} f(t)dt = -e^{i\sqrt{i\beta}S(t)} \sum_{k=0}^{N-1} (i\sqrt{i\beta})^{-k-1} \left( \frac{-1}{S'(t)} \frac{d}{dx} \right)^k \left( \frac{f(t)}{S'(t)} \right) \Big|_{t=0} + o\left( \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right)^N \quad (19)$$

На основе алгоритма асимптотического разложения (19) и формулы (18) с помощью несложных, хотя и громоздких вычислений можно получить

$$\int_{\Gamma_+} f(M)\psi^*(M_0, M)dl_M = -\frac{1}{(i\sqrt{i\beta})} \frac{f(M_0)}{2} + o\left( \frac{1}{\beta} \right)$$

$$\int_{\Gamma_+} f(M)\psi_n^*(M_0, M)dl_M = -\frac{1}{i\sqrt{i\beta}} \frac{f(M_0)}{2} \kappa + o\left( \frac{1}{\beta} \right)$$

В точках части  $\Gamma_-$ :  $x' = -r(\theta_-)\cos\theta_-$ ,  $y' = r(\theta_-)\sin\theta_-$ ,  $0 \leq \theta_- \leq \pi - \theta_m$ , угол  $\theta_-$  отсчитывается от отрицательной полуоси  $Ox'$  по часовой стрелке.

В результате

$$\int_{\Gamma} f(M)\psi^*(M_0, M)dl_M = -\frac{f(M_0)}{i\sqrt{i\beta}} + o\left( \frac{1}{\beta} \right) \quad (20)$$

$$\int_{\Gamma} f(M)\psi_n^*(M_0, M)dl_M = -\frac{f(M_0)}{i\sqrt{i\beta}} \kappa + o\left( \frac{1}{\beta} \right) \quad (21)$$

Классические формулы, полученные Стоксом для задач о колебаниях цилиндра и сферы [31, 32] наводят на мысль искать асимптотическое разложение искомых потенциалов в виде асимптотического ряда по степеням

малого параметра  $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ :

$$\varphi(M_0) \sim \varphi^{(0)}(M_0) + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \varphi^{(1)}(M_0) + \frac{1}{\beta} \varphi^{(2)}(M_0) + \dots$$

$$\psi(M_0) \sim \frac{1}{\sqrt{\beta}} \psi^{(1)}(M_0) + \frac{1}{\beta} \psi^{(2)}(M_0) + \dots$$

Подставим эти разложения в систему ГИУ и с помощью асимптотик (20)-

(21) представим интегралы в виде асимптотических разложений по параметру  $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$  и затем приравняем члены одинакового порядка в правой и левой части

ГИУ.

В итоге получим:

«нулевой порядок»:

$$\frac{1}{2} \varphi^{(0)}(M_0) - \int_{\Gamma} \varphi^{(0)}(M) \varphi_n^*(M_0, M) dl_M = - \int_{\Gamma} V_n(M) \varphi^*(M_0, M) dl_M, \quad (22)$$

«первый порядок»:



$$\psi^{(1)}|_{M_0} = \frac{1}{i\sqrt{i}} \left( -\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial\tau_{M_0}} + V_\tau \right) \Big|_{M_0}, \quad (23)$$

$$\frac{1}{2}\varphi^{(1)}(M_0) - \int_{\Gamma} \varphi^{(1)}(M)\varphi_n^*(M_0, M)dl_M = -\int_{\Gamma} \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\tau} \Big|_M \varphi^*(M_0, M)dl_M, \quad (24)$$

«второй порядок»:

$$\psi^{(2)}(M_0) + \frac{\kappa}{i\sqrt{i}}\psi^{(1)}(M_0) = -\frac{1}{i\sqrt{i}} \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\tau} \Big|_{M_0}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{2}\varphi^{(2)}(M_0) - \int_{\Gamma} \varphi^{(2)}(M)\varphi_n^*(M_0, M)dl_M = -\int_{\Gamma} \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial\tau} \Big|_M \varphi^*(M_0, M)dl_M. \quad (26)$$

Таким образом, слагаемые  $\varphi^{(0)}|_{\Gamma}, \varphi^{(1)}|_{\Gamma}, \varphi^{(2)}|_{\Gamma}$  определяются из ГИУ (22), (24), (26). Слагаемые  $\psi^{(1)}|_{\Gamma}, \psi^{(2)}|_{\Gamma}$  по явным формулам (23), (25). Заметим, что указанные ГИУ полностью равносильны соответствующим краевым задачам для потенциалов (задачи Неймана для уравнения Лапласа).

Если ограничиться слагаемыми «первого порядка», то подставляя их в формулу (15) получаем классическую (линейную) формулу Морисона [21, 32]. Слагаемые «второго порядка» дают уточнение классической линейной теории пограничного слоя.

## Примеры расчета

### 1. Колебания кругового цилиндра

Простейшая и единственная допускающая известное аналитическое решение задача излагаемой теории – задача о колебания кругового цилиндра вдоль оси  $Ox$  с заданной колебательной скоростью  $u_0$ . Решение этой задачи получено Стоксом [32] и граничные значения потенциалов равны [25] (здесь  $\theta$  – полярный угол в глобальной системе координат)

$$\varphi(1, \theta) = u_0 \left( 1 - \frac{4H_1^{(1)}(\sqrt{i\beta})}{H_1^{(1)}(\sqrt{i\beta}) + \sqrt{i\beta}H_1^{\prime(1)}(\sqrt{i\beta})} \right) \cos \theta,$$

$$\psi(1, \theta) = u_0 \frac{4H_1^{(1)}(\sqrt{i\beta})}{H_1^{(1)}(\sqrt{i\beta}) + \sqrt{i\beta}H_1^{\prime(1)}(\sqrt{i\beta})} \sin \theta$$

Асимптотика этих формул при  $\beta \rightarrow +\infty$  имеет вид:

$$\varphi(\theta) \sim u_0 \left( 1 - \frac{2}{i\sqrt{i\beta}} - \frac{1}{i\beta} + \dots \right) \cos \theta$$

$$\psi(\theta) \sim u_0 \left( \frac{2}{i\sqrt{i\beta}} + \frac{1}{i\beta} + \dots \right) \sin \theta \quad (27)$$

Элементарные вычисления согласно формулам (22)-(26) дают

$$\varphi^{(0)}(r, \theta) = \frac{u_0}{r} \cos \theta, \quad \varphi^{(0)}(1, \theta) = u_0 \cos \theta,$$

$$U_\tau(\theta) = u_0 \sin \theta, \quad \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \theta} \right|_{r=1} = -u_0 \sin \theta.$$

$$\psi^{(1)}(1, \theta) = \frac{2}{i\sqrt{i}} u_0 \sin \theta.$$

$$\varphi^{(1)}(r, \theta) = -\frac{2}{i\sqrt{i}} \frac{1}{r} u_0 \cos \theta, \quad \varphi^{(1)}(1, \theta) = -\frac{2}{i\sqrt{i}} u_0 \cos \theta,$$

$$\psi^{(2)}(1, \theta) + \kappa \frac{1}{i\sqrt{i}} \psi^{(1)}(1, \theta) = -\left. \frac{1}{i\sqrt{i}} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} \right|_{r=1}, \quad \psi^{(2)}(1, \theta) = \frac{1}{i} u_0 \sin \theta.$$

$$\varphi^{(2)}(r, \theta) = -\frac{1}{i} \frac{1}{r} u_0 \cos \theta, \quad \varphi^{(2)}(1, \theta) = -\frac{1}{i} u_0 \cos \theta.$$

Значит

$$\varphi(M_0) \sim u_0 \cos \theta - \frac{2}{i\sqrt{\beta i}} u_0 \cos \theta - \frac{1}{i\beta} u_0 \cos \theta + \dots =$$

$$= \left( 1 - \frac{2}{i\sqrt{i\beta}} - \frac{1}{i\beta} + \dots \right) u_0 \cos \theta$$

$$\psi(M_0) \sim \frac{2}{i\sqrt{i\beta}} u_0 \sin \theta + \frac{1}{\beta i} u_0 \sin \theta + \dots =$$

$$= \left( \frac{2}{i\sqrt{i\beta}} + \frac{1}{i\beta} + \dots \right) u_0 \sin \theta$$

Эти формулы совпадают с точной асимптотикой (27).

## 2. Колебания эллипса вдоль полуоси

Уравнение эллипса в глобальной системе координат  $Oxy$

$$\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Перейдем к эллиптическим координатам [2]:

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad \xi \in [0, +\infty), \quad \eta \in [0, 2\pi)$$

Уравнение эллипса теперь записывается в виде  $\xi = \xi_0$

$$a = c \operatorname{ch} \xi_0, \quad b = c \operatorname{sh} \xi_0, \quad \operatorname{th} \xi_0 = \frac{b}{a} < 1.$$

Задача определения потенциала  $\varphi^{(0)}$  в эллиптических координатах

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial \eta^2} = 0. \quad (28)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial n} \right|_{\xi=\xi_0} = u_0 (\vec{e}_x \cdot \vec{n}).$$

единичная (внешняя) нормаль имеет координаты

$$\vec{n} = \frac{(b \cos \eta, a \sin \eta)}{\sqrt{b^2 \cos^2 \eta + a^2 \sin^2 \eta}},$$

единичный касательный вектор

$$\vec{\tau} = \frac{(-a \sin \eta, b \cos \eta)}{\sqrt{b^2 \cos^2 \eta + a^2 \sin^2 \eta}}.$$

Общее решение уравнения Лапласа (28) (с учетом симметрии) ищем в виде

$$\varphi^{(0)}(\xi, \eta) = C e^{-\xi} \cos \eta$$

Граничное условие для потенциала –

$$\frac{-C e^{-\xi_0} \cos \eta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \eta + a^2 \sin^2 \eta}} = \frac{u_0 b \cos \eta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \eta + a^2 \sin^2 \eta}}$$

В результате

$$\Phi^{(0)}(\xi, \eta) = -u_0 b e^{-(\xi - \xi_0)} \cos \eta,$$

$$\Phi^{(0)}(\xi_0, \eta) = -u_0 b \cos \eta,$$

Производная  $\varphi^{(0)}$  по касательной (касательная составляющая вектора скорости жидкости) равна

$$\frac{\partial \varphi^{(0)}(\xi_0, \eta)}{\partial \tau} = \frac{u_0 b \sin \eta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \eta + a^2 \sin^2 \eta}}$$

Касательная скорость контура эллипса

$$u_\tau = (u_0, 0) \cdot \vec{\tau} = \frac{-u_0 a \sin \eta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \eta + a^2 \sin^2 \eta}}.$$

$$\psi^{(1)}|_{M_0} = \frac{1}{i\sqrt{i}} \left( -\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial \tau} + V_\tau \right) \Big|_{M_0} = -\frac{1}{i\sqrt{i}} \frac{(a+b)u_0 \sin \eta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \eta + a^2 \sin^2 \eta}}$$

Для определения члена  $\varphi^{(1)}$  требуется решить краевую задачу

$$\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} \Big|_M = \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \tau} \Big|_M.$$

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \tau} \Big|_M = -\frac{u_0(a+b)}{i\sqrt{i}} \frac{b^2 \cos \eta}{(b^2 \cos^2 \eta + a^2 \sin^2 \eta)^2}$$

Решение задачи ищем в виде ряда Фурье

$$\varphi^{(1)}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-k\xi} \cos k\eta$$

Коэффициенты ряда Фурье равны

$$C_m = \frac{1}{\pi m} \frac{u_0 (a+b)b^2}{i\sqrt{i}} I_m e^{m\xi_0}, \text{ где}$$

$$I_m(a,b) \equiv \int_0^{2\pi} \frac{\cos \eta \cos m\eta}{(b^2 \cos^2 \eta + a^2 \sin^2 \eta)^{3/2}} d\eta$$

Итак, в первом приближении

$$\varphi(\xi_0, \eta) \sim -u_0 b \cos \eta + \frac{1}{i\sqrt{\beta i}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_0 (a+b)b^2}{\pi m} I_m \cos m\eta$$

$$\psi(\xi_0, \eta) \sim -\frac{1}{i\sqrt{\beta i}} \frac{(a+b)u_0 \sin \eta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \eta + a^2 \sin^2 \eta}}$$

Определим силу по формуле

$$F_x = -i \int_{\Gamma} \varphi(\xi_0, \eta) n_x d\Gamma + i \int_{\Gamma} \psi(\xi_0, \eta) n_y d\Gamma$$

$$n_x d\Gamma = b \cos \eta d\eta, n_y d\Gamma = a \sin \eta d\eta$$

Подставляя приближения для  $\varphi$  и  $\psi$  имеем

$$F_x = i u_0 b^2 \pi - \frac{u_0 (a+b)}{\sqrt{i\beta}} I(\varepsilon), \quad (29)$$

$$I(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^3 \cos^2 \eta + \sin^2 \eta (\varepsilon^2 \cos^2 \eta + \sin^2 \eta)}{(\varepsilon^2 \cos^2 \eta + \sin^2 \eta)^{3/2}} d\eta,$$

$$\varepsilon = \frac{b}{a} \in [0,1],$$

График  $I(\varepsilon)$  приведен на рис.3

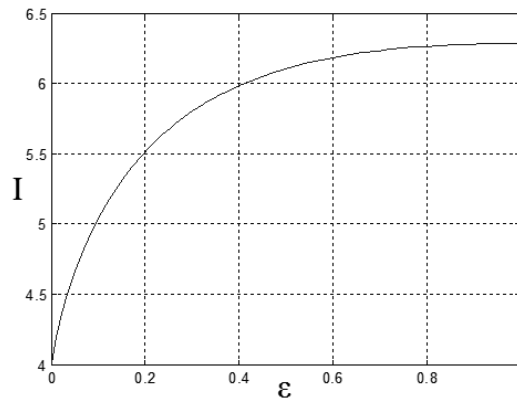


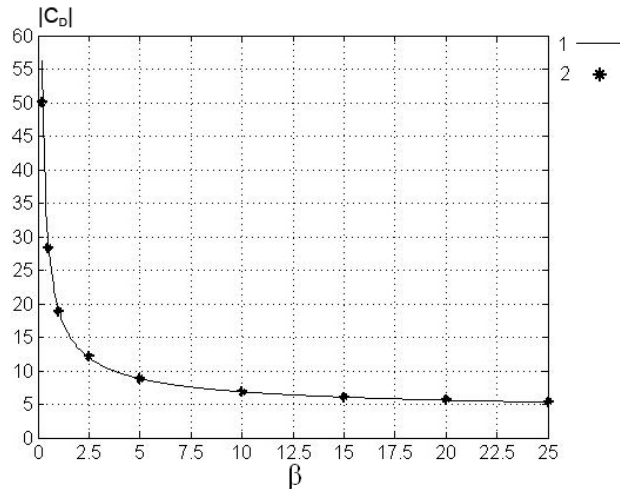
Рисунок 3 – Зависимость значений интеграла  $I$  от параметра  $\varepsilon$

При  $a=b=R$  – формула (29) в размерном виде совпадает с формулой Морисона для кругового цилиндра [22, 23]

$$F_x = \pi \rho R^2 i \omega u_0 \left[ 1 + 2(1+i) \sqrt{\frac{2}{\beta}} \right] \quad (30)$$

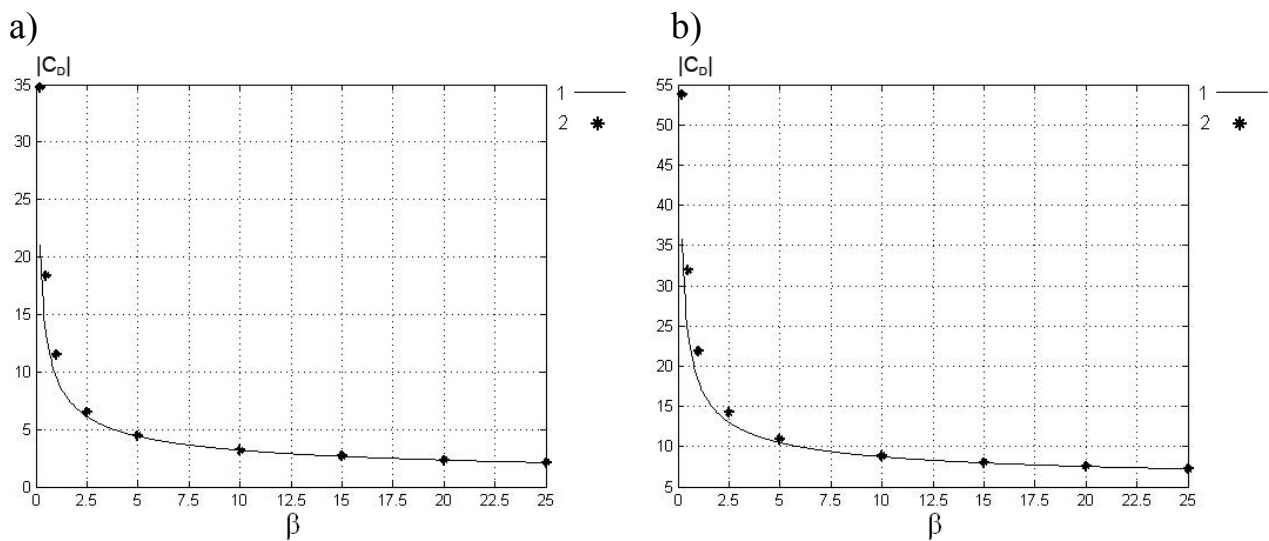
Сопоставление результатов расчета модуля коэффициента  $C_D$  по изложенной выше теории (на графиках – сплошная линия) с численным решением рассмотренных задач [33] представлено на рис. 4-5. При решении

задач о малых гармонических колебаниях в вязкой несжимаемой жидкости эллиптического цилиндра были приняты следующие значения параметра  $\varepsilon$ :  $\varepsilon=0,2$  (эллипс вытянут вдоль направления колебаний) и  $\varepsilon=0,6$  (эллипс вытянут поперек направления колебаний). В качестве характерной длины выбрана полусумма полуосей эллипса (радиус в случае кругового цилиндра).



1 – асимптотическое решение (второе приближение);  
2 – численное решение задачи;

Рисунок 4 – Модуль коэффициента  $C_D$  в зависимости от числа  $\beta$ .  
Колебания кругового цилиндра



1 – асимптотическое решение (первое приближение);  
2 – численное решение задачи;

Рисунок 5 – Модуль коэффициента  $C_D$  в зависимости от числа  $\beta$ .  
Колебания эллипса (a)  $\varepsilon=0,2$ ; (b)  $\varepsilon=0,6$

## Закключение

Из полученных результатов можно сделать вывод, что асимптотика «первого порядка» решения плоской задачи о малых колебаниях тела в вязкой несжимаемой жидкости согласуется с результатами численного решения при  $\beta \rightarrow +\infty$ . При малых значениях параметра  $\beta$  следует учитывать члены более высокого порядка. В частном случае для кругового цилиндра соответствующая

формула получена методом сращиваемых асимптотических разложений в статье [18].

Формулы (22)-(26) дают возможность построить аналог формулы Морисона, имеющий более высокий (второй и даже более высокий) порядок относительно параметра  $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$  для гладкого контура произвольного вида.

## Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. Изд-е 5-е, стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001, 736 с.
2. Ламб Г. Гидродинамика, Гостехиздат, 1947, 929 с.
3. Michael J. Martin, Brian H. Houston. Frequency response of cylindrical resonators in a viscous fluid // Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 133, No 3, 2011, p. 11
4. Li M, Bhiladvala R. B., Morrow T. J., Siooss J. A., Lew K.-K., Redwing J. M., Keating C. D., and Mayer T. S. Bottom-up assembly of large-area nanowire resonator arrays // Nature Nanotechnology, Vol. 3, No. 2, 2008, pp. 88-92
5. John Elie Sader. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope // Journal of Applied Physics Vol. 84, No 1, 1998, pp. 64-76
6. Doudou Badiane, Alain Gasser, Eric Blond. Vibrating beam in viscous fluid for viscosity sensing: Application to an industrial vibrating viscometer // Proceedings of PACAM XII, 2012
7. Rabin Maharjan. Effect of support compliance on the resonant behavior of microcantilever-based sensors in viscous fluids. Dissertations, 2009, p. 275
8. Anaturk A. R., Tromans P. S., van Hazendonk H. C., Sluis C. M., and Otter A. Drag force on cylinders oscillating at small amplitude: A new model // Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Vol. 114, No. 2, 1992, pp. 91-103.
9. Chaplin J. R., Subbiah K. Hydrodynamic damping of a cylinder in still water and a transverse current // Applied Ocean Research, Vol. 20, No. 4, 1998, pp. 251-259.
10. Sumer B., Fredsøe J., Jensen B., and Christiansen N. Forces on vibrating cylinder near wall in current and waves // Journal of Waterway, Port, and Coastal Engineering, Vol. 120, No. 3, 1994, pp. 233-250
11. Sagatun S. I. Active control of underwater installation // IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 10, No. 5, 2002, pp. 743-748.
12. Paul S., Datta T. K., and Kapuria S., Control of fixed offshore jacket platform using semi-active hydraulic damper // Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Vol. 131, No. 4, 2009, p. 10.
13. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974, 712 с.
14. Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 121, 1831, pp. 299-340

15. Holtsmark J., Johnsen I., Sikkeland T., Skavlem S. Boundary layer flow near a cylindrical obstacle in an oscillating, Incompressible fluid // The journal of the Acoustical Society of America, Vol. 26, No. 1, 1954, pp. 26-39
16. Stuart J. T. Double boundary layers in oscillatory viscous flow // Journal of Fluid Mechanics, Vol. 24, No. 4, 1966, pp. 673-687
17. Riley N., Oscillating viscous flows // Mathematika, 12, 1965, pp. 161-175
18. Wang Chang-Yi. On high-frequency oscillatory viscous flows // Journal of Fluid Mechanics, Vol. 32, No. 1, 1968, pp. 55-68
19. Kim S. K., Troesch A. W. Streaming flows generated by high-frequency small-amplitude oscillations of arbitrarily shaped cylinders // Journal of Physics of Fluids A, Vol. 1, No. 6, 1989, pp. 975-985
20. Troesch A. W., Kim S. K. Hydrodynamic forces acting on cylinders oscillating at small amplitudes // Journal of Fluids and Structures, Vol. 5, 1991, pp. 113-126
21. Bearman P. W., Downie M. J., Graham J. M. R. Forces on cylinders in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers // Journal of Fluid Mechanics, Vol. 154, 1985, pp. 337-356
22. Sarpkaya T., Isaacson M. Mechanics of wave forces on offshore structures. New York: Van Nostrand Reinhold, 1981.
23. Sarpkaya T. Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers // Journal of Fluid Mechanics, Vol. 165, 1986, pp. 61-71
24. Sarpkaya T. Hydrodynamic damping. Technical report No. NPS/TS-0406. Naval Postgraduate School, Monterey, 2006, p. 48
25. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998, 350 с.
26. Кадыров С.Г. Метод граничных интегральных уравнений в задаче о малых колебаниях тел в сжимаемой вязкой жидкости // Морской вестник, спец. вып. № 1(10), 2013, стр. 85-87
27. Корн Г., Корн Т.. Справочник по математике. М.: Наука, 1974, с. 832
28. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2. М., Наука, 1974, 296 с.
29. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4-е. М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963, 1100 с.
30. Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987, 544 с.
31. Rosenhead L. Laminar boundary layers, Clarendon, 1963, p. 688.
32. Stokes G. G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 9, Part 2, 1851
33. Афанасов Е.Н. Малые колебания твердого тела в вязкой несжимаемой жидкости // Морские интеллектуальные технологии, №4 (26), Т.1, 2014, С. 103-109.