

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/11-30](http://mathmod.esrae.ru/11-30)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Коломоец А.А., Модин А.С. Применение методов дифференцирования и продолжения по параметру // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №1

УДК 519.6

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Коломоец А.А.<sup>1</sup>, Модин А.С.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет  
имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, kolomoetsaa@bk.ru

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет  
имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, almodin@mail.ru

## APPLICATION OF THE DIFFERENTIATION METHOD BY THE PARAMETER AND THE CONTINUATION METHOD BY THE PARAMETER

Kolomoets A.A.<sup>1</sup>, Modin A.S.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia,  
Saratov, kolomoetsaa@bk.ru

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia,  
Saratov, almodin@mail.ru

**Аннотация.** При решении прикладных задач часто приходится решать нелинейные алгебраические или трансцендентные уравнения и системы таких уравнений. Метод Ньютона, наиболее часто применяемый к решению таких задач, имеет ряд ограничений и не всегда позволяет получить решение. Поэтому возникает необходимость в использовании других численных методов. В данной работе демонстрируется применение методов дифференцирования по параметру и продолжения решения по параметру.

**Ключевые слова:** метод дифференцирования по параметру, метод продолжения решения по параметру, цилиндрическая оболочка, начальные несовершенства, случайные начальные несовершенства, метод Бубнова

**Abstract.** To solve particular applied problems it usually required to find the solution of non-linear algebraic and transcendental equations and their systems. Although the most commonly used method to solve such problems, Newton's method, has several limitations and is not always able to solve the problem. It therefore becomes necessary to use other numerical methods. The paper demonstrates the application of the differentiation method by the parameter and the continuation method by the parameter.

**Keywords:** the differentiation method by the parameter; the continuation method by the parameter; cylindrical shell; initial imperfection; random initial imperfections; Bubnov method

### 1. Метод дифференцирования по параметру.

Многие задачи практики приводят к необходимости решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений и систем таких уравнений. Метод Ньютона решения систем алгебраических или трансцендентных уравнений при всех своих многочисленных достоинствах обладает тем недостатком, что он сходится только для «хорошего» начального приближения. Другой итерационный метод – метод наискорейшего спуска – имеет тот недостаток, что его сходимость может быть весьма медленной, хотя существует широкий класс систем, для которых он сходится, начиная с любого начального приближения.

Желательно построить методы, которые бы унаследовали достоинства этих методов и избежали их недостатков. Такие методы существуют [12].

Рассмотрим подробно метод дифференцирования по параметру. Этот метод позволяет перейти от алгебраической задачи к задаче Коши. Суть метода заключается в следующем.

Пусть  $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$  – вектор-функция вещественных переменных. Для нахождения решения системы уравнений

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

рассмотрим систему

$$F(x, \lambda) = 0, \quad (2)$$

зависящую от вещественного параметра  $\lambda$  так, что  $F(x, 1) = f(x)$ , а решение системы  $F(x, 0) = 0$  существует и легко находится. Обозначим это решение  $x_0$ . Для нахождения решения система уравнений (1) дифференцируется (2) по  $\lambda$ , считая, что  $x = x(\lambda)$ . Далее ищется решение задачи Коши для полученного дифференциального уравнения с начальным условием  $x(0) = x_0$  в точке  $\lambda = 1$ .

*Пример 1.*

Найти приближенное решение уравнения

$$x^2 - \sin x - 1 = 0 \quad (3)$$

С точностью до  $10^{-6}$ .

Рассмотрим график функции  $f(x) = x^2 - \sin x - 1$ , который показан на рис. 1.

Как видно из рисунка, корни уравнения (3) лежат на отрезках  $[-1; -0.5]$  и  $[1; 1.5]$ . Введем в уравнение параметр  $\lambda$  следующим образом:

$$x^2 - 1 - \lambda \sin x = 0. \quad (4)$$

Полученное уравнение при  $\lambda = 1$  совпадает с исходным, а при  $\lambda = 0$  оно имеет два решения:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ . Продифференцируем левую часть уравнения по  $\lambda$ , считая, что  $x$  является функцией  $\lambda$ :

$$2x \frac{dx}{d\lambda} - \sin x - \lambda \cos x \frac{dx}{d\lambda} = 0. \quad (5)$$

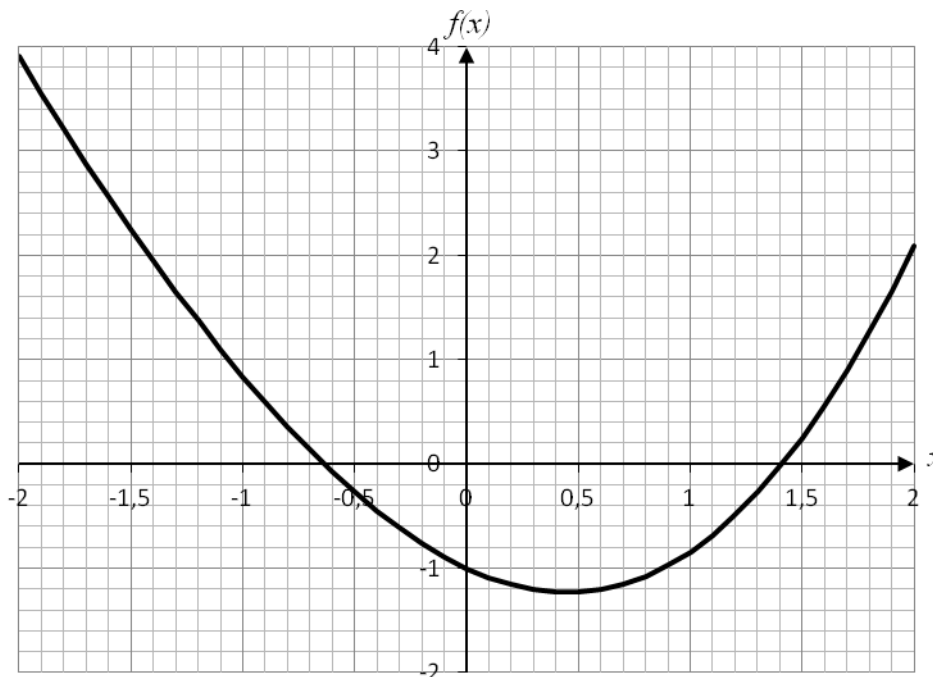


Рис. 1. График функции  $f(x) = x^2 - \sin x - 1$ .

В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно  $\frac{dx}{d\lambda}$ :

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{\sin x}{2x - \lambda \cos x}. \quad (6)$$

Решаем уравнение (6) с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка точности сначала с начальным условием  $x = 1$  при  $\lambda = 0$ , затем с начальным условием  $x = -1$  при  $\lambda = 0$  на отрезке  $\lambda \in [0, 1]$  с шагом  $\Delta\lambda = 0.01$ .

В таблице 1 приведены значения корней уравнения, полученные при указанных значениях параметра  $\lambda$ .

Таблица 1.

Решения уравнения (6) при различных значениях  $\lambda$ .

$\lambda$	$x_0 = 1$	$x_0 = -1$
0.1	1.042284	-0.958219
0.2	1.084825	-0.917181
0.3	1.127381	-0.877115
0.4	1.169725	-0.838223
0.5	1.211651	-0.800678
0.6	1.252977	-0.764619
0.7	1.293549	-0.730147

Продолжение табл. 1

0.8	1.333242	-0.697326
0.9	1.371957	-0.666188
1	1.409624	-0.636733
<i>Точное решение</i>	<b>1.409624</b>	<b>-0.636733</b>

*Пример 2.*

Найти приближенное решение системы уравнений

$$\begin{cases} y - \sin x + 1.32 = 0, \\ \cos y - x + 0.85 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

с точностью до  $10^{-6}$ .

*Решение.*

Преобразуем систему (7). Введём параметр  $\lambda$  следующим образом:

$$\begin{cases} y + \lambda(1.32 - \sin x) = 0, \\ \cos y - x + 0.85 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Полученная система при  $\lambda = 1$  совпадает с исходной, а при  $\lambda = 0$  она имеет решение  $x = 1.85$ ,  $y = 0$ . Дифференцируя левые части уравнений (8) по  $\lambda$  в предположении, что  $x$  и  $y$  являются функциями  $\lambda$  и разрешая относительно  $\frac{dx}{d\lambda}$  и  $\frac{dy}{d\lambda}$ , имеем

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\lambda} = \frac{\sin y(1.32 - \sin x)}{(1 + \lambda \cos x \sin y)}, \\ \frac{dy}{d\lambda} = \frac{-(1.32 - \sin x)}{(1 + \lambda \cos x \sin y)}. \end{cases} \quad (9)$$

Решим систему уравнений (9) с помощью методов численного решения задачи Коши с начальным условием  $x = 1.85$ ,  $y = 0$  при  $\lambda = 0$ , на отрезке  $\lambda \in [0, 1]$  с шагом  $\Delta\lambda = 0.01$ .

В таблице 2 приведены результаты, полученные при решении задачи (9) различными численными методами. Проведено сравнение их с известным точным решением этой системы. В качестве точного решения принимаем результат, полученный при решении системы (7) методом Ньютона.

Таблица 2.

Численное решение системы уравнений (9) при  $\lambda = 1$ .

		Явные схемы			Неявные схемы		
		Метод Эйлера	Метод Рунге-Кутта	Метод Пикара	Метод трапеций	Метод Адамса	Неявный метод Эйлера
	Точное решение						
$x$	<b>1.791339</b>	1.791841	<b>1.791341</b>	1.791004	<b>1.791339</b>	1.791299	1.790836
$y$	<b>-0.344221</b>	-0.344459	<b>-0.344203</b>	-0.344171	<b>-0.344221</b>	-0.344357	-0.343984

Среди рассмотренных явных схем наиболее точным оказался метод Рунге-Кутты 4 порядка, а среди неявных – метод трапеций. При реализации неявных схем использовался метод предсказания и коррекции. В качестве предиктора для неявного метода Эйлера и метода трапеций использовалась формула явного метода Эйлера. Для метода Адамса в качестве предиктора использовалась формула Адамса-Башфорта 4 порядка, а в качестве корректора – формула Адамса-Мультона 4 порядка.

## 2. Метод продолжения решения по параметру и его применение.

Метод продолжения решения [2] по параметру является наиболее универсальным методом решения нелинейных алгебраических и функциональных уравнений. Основным его достоинством по сравнению с классическими методами является присущая ему глобальная сходимость. Однако этот метод не так широко известен как классические методы. Рассмотрим этот метод подробнее.

Рассмотрим систему  $m$  нелинейных алгебраических уравнений с  $m$  неизвестными и параметром  $P$ , который будем называть параметром задачи:

$$F_i(X_1, X_2, \dots, X_{m-1}, X_m, P) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Параметр задачи  $P$  будем считать равноправным с неизвестными  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Чтобы подчеркнуть это обстоятельство введем обозначение  $X_{m+1} = P$ .

Введем параметр  $\lambda$ , который в отличие от параметра задачи  $P$  будем называть параметром продолжения.

Обозначим  $\bar{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_{m-1}, X_m, X_{m+1} = P\}$ . Компоненты  $X_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m+1$ ) вектора  $\bar{X} \in R_{m+1}$  будем считать непрерывными и достаточное число раз дифференцируемыми функциями параметра продолжения  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} X_j &= X_j(\lambda), \\ j &= 1, 2, \dots, m+1. \end{aligned} \quad (11)$$

Изменение параметра продолжения  $\lambda$  соответствует продвижению вдоль кривой  $L$  решения системы (10) в  $R_{m+1}$ .

Метод продолжения решения по параметру был применён нами в работе [3]. Здесь применим его к построению лемнискаты Бернулли. Данный пример впервые был рассмотрен в работе [2].

*Пример.*

С помощью метода продолжения решения по параметру построить Лемнискату Бернулли в осях  $X_1, X_2$ :

$$\begin{aligned} F(\bar{X}) &= (X_1^2 + X_2^2)^2 - 2a^2(X_1^2 - X_2^2) = 0, \\ \bar{X} &= [X_1, X_2], \text{ при } a = 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение.

Считая  $X_1$  и  $X_2$  функциями параметра  $\lambda$ , получаем уравнение продолжения:

$$\bar{J} \frac{d\bar{X}}{d\lambda} = 0, \bar{J} = \left[ \frac{\partial F}{\partial X_1}, \frac{\partial F}{\partial X_2} \right], \frac{d\bar{X}}{d\lambda} = \begin{bmatrix} dX_1/d\lambda \\ dX_2/d\lambda \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Здесь  $\bar{J}$  — расширенная матрица Якоби функции  $F(\bar{X}) = F(X_1, X_2)$ . Запишем уравнение (13) в развернутом виде и произведем сокращение на множитель 4:

$$\left[ \left( (X_1^2 + X_2^2)X_1 - X_1 \right), \left( (X_1^2 + X_2^2)X_2 - X_2 \right) \right] \begin{bmatrix} dX_1/d\lambda \\ dX_2/d\lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (14)$$

Здесь матрица  $\bar{J} = [J_{11}, J_{12}]$  представляет собой вектор-строку в двумерном векторном пространстве  $R_2$ .

Решение будем искать в виде [2]

$$\frac{d\bar{X}}{d\lambda} = \text{ort}(\bar{J}, Q) \quad (15)$$

с помощью общей процедуры ортогонализации при начальных условиях

$$\bar{X}_0 = [\sqrt{2}, 0]^T, Q = [0, 1]. \quad (16)$$

Операция  $\text{ort}$  для системы одного уравнения представляет собой:

$$U_1 = T_1 = \bar{J}, \quad V_1 = \frac{U_1}{|U_1|}. \quad (17)$$

$$U_2 = Q - (Q, V_1)V_1, \quad V_2 = \frac{U_2}{|U_2|}.$$

Так как размерность системы,  $m=1$ , то орт  $V_2$  является решением системы (15).

$$\frac{d\bar{X}}{d\lambda} = V_2. \quad (18)$$

На каждой итерации уточняется вектор  $Q$ , который принимается равным  $\frac{d\bar{X}}{d\lambda}$ . Интегрирование системы производится с помощью методов Эйлера, трапеций, Адамса и Рунге-Кутта 4 порядка точности.

На рисунках 2, 3 показаны кривые, построенные с помощью численных методов, рассмотренных выше. Шаг по параметру продолжения принимался равным 0.1 и 0.01 соответственно.

На рисунке 2 наиболее точно соответствует исходной форме кривая, полученная с помощью метода Рунге-Кутта. Кривые, полученные с помощью методов Адамса и трапеций, достаточно близки по форме к исходной кривой, а

кривая, полученная методом Эйлера, по форме совершенно не похожа на исходную кривую.

На рисунке 3 кривые, полученные с помощью методов Рунге-Кутты, Адамса и трапеций практически совпадают между собой. Кривая, полученная методом Эйлера, с уменьшением шага приближается по форме к исходной кривой.

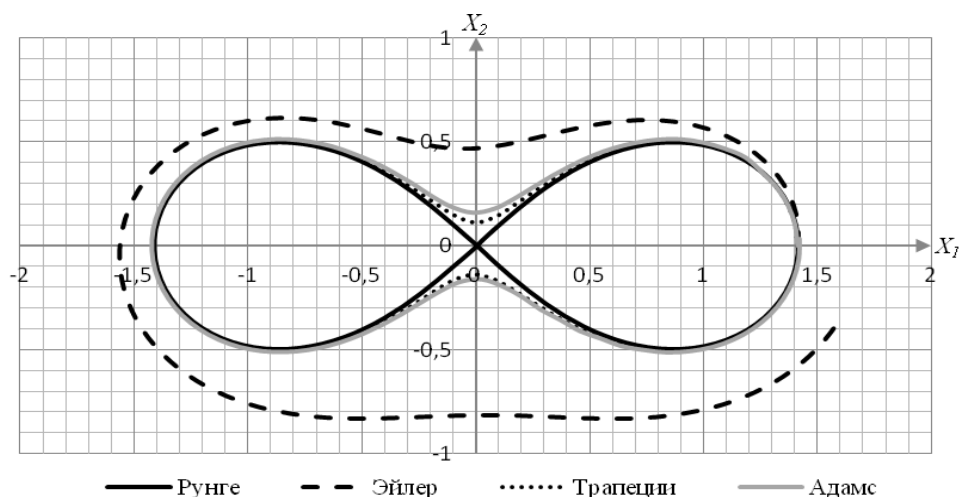


Рис. 2. Лемниската, построенная методом продолжения по параметру с помощью различных численных методов ( $\Delta\lambda = 0.1$ ).

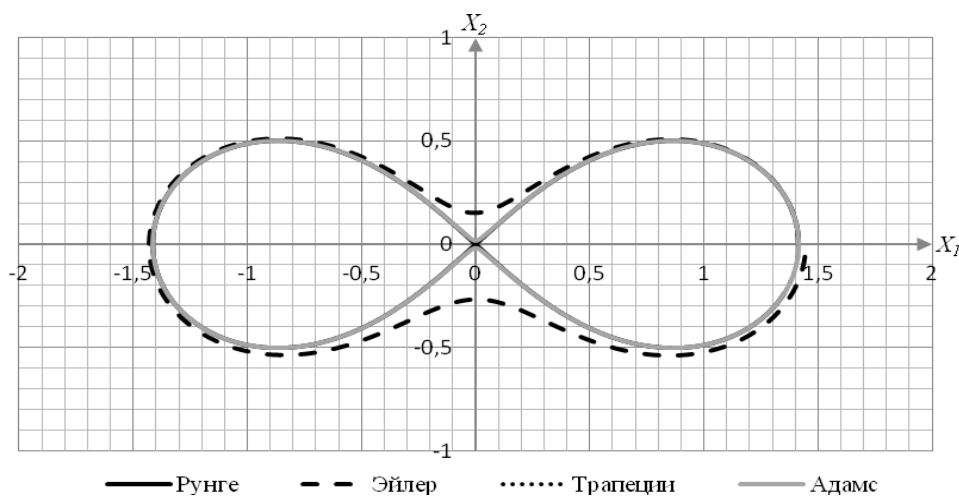


Рис. 3. Лемниската, построенная методом продолжения по параметру с помощью различных численных методов ( $\Delta\lambda = 0.01$ ).

Большое значение для практики имеют задачи исследования динамической и статической устойчивости замкнутых цилиндрических оболочек, которые являются составными частями многих конструкций машиностроения, летательных аппаратов, глубоководной техники, при действии на них неравномерного внешнего давления. Некоторые из таких задач рассмотрены, например, в работах [4-11]. В данной работе рассматривается задача нелинейного деформирования замкнутой цилиндрической оболочки со

случайными начальными несовершенствами  $w_0$  при действии на неё неравномерного внешнего давления.

Исходными в данной задаче являются нелинейные дифференциальные уравнения статики гибких пологих оболочек в смешанной форме кинематической модели Кирхгофа-Лява [1]:

$$D\nabla^4(w-w_0) = L(w, \varphi) + \nabla_k^2 \varphi + q, \quad (19)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \varphi = -\frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] - \nabla_k^2 (w - w_0).$$

Граничные условия имеют вид

$$w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \varphi = 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l. \quad (20)$$

Здесь

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad \nabla_k^2 = K_y \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$L(w, \varphi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (21)$$

$$L(w, w) = 2 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right],$$

$x, y$  – продольная и окружная координаты;  $q$  – внешнее давление;  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $w$  и  $\varphi$  – искомые функции прогиба и усилий;  $K_y = 1/R$  – кривизна оболочки.

Безразмерные параметры введены по формулам:

$$x = l\bar{x}, \quad y = R\bar{y}, \quad w = h\bar{w}, \quad \varphi = Eh^3\bar{\varphi},$$

$$K_y = \bar{K}_y \frac{h}{R^2}, \quad \lambda = \frac{l}{R}, \quad q = \frac{Eh^4}{l^2 R^2} \bar{q}, \quad \bar{q} = \bar{q}_1 \cdot \bar{K}_y^2. \quad (22)$$

Площадка нагружения в безразмерном виде

$$0.5 - \beta \leq \bar{x} \leq 0.5 + \beta, \quad -\alpha \leq \bar{y} \leq \alpha. \quad (23)$$

Решение ищем в виде:

$$(\bar{w}, \bar{\varphi}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^M (A_{ij}, B_{ij}) \sin i\pi\bar{x} \cos j\bar{y}. \quad (24)$$

Начальный прогиб задаем в виде:

$$w_0 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^M a_{ij} \sin i\pi\bar{x} \cos j\bar{y}. \quad (25)$$

Применяя метод Бубнова к системе (19), получаем систему нелинейных алгебраических уравнений

$$F_i(A_{10}, A_{11}, \dots, A_{NM}, B_{10}, B_{11}, \dots, B_{NM}, \bar{q}_1) = 0, \quad (26)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$



с параметром задачи  $\bar{q}_1$ . Введем параметр  $\tau$ , который в отличие от параметра задачи  $\bar{q}_1$  будем называть параметром продолжения [3].

Обозначим  $\bar{X} = \{A_{10}, \dots, A_{NM}, B_{10}, \dots, B_{NM}, \bar{q}_1\}$ . Компоненты  $X_j$  ( $j=1, 2, \dots, m+1$ ) вектора  $\bar{X} \in R_{m+1}$  являются непрерывными и дифференцируемыми функциями параметра продолжения  $\tau$ .

$$X_j = X_j(\tau), \quad j=1, 2, \dots, m+1. \quad (27)$$

Изменение параметра продолжения  $\tau$  соответствует продвижению вдоль кривой  $L$  решения системы (26) в  $R_{m+1}$ .

Продифференцируем (26) по  $\tau$ . В результате получим систему  $m$  линейных однородных уравнений для  $m+1$  неизвестных  $dX_j/d\tau$ .

$$\sum_{j=1}^{m+1} F_{i,j} \frac{dX_j}{d\tau} = 0, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (28)$$

В матричной форме эта система уравнений имеет вид

$$\bar{J} \cdot \frac{dX}{d\tau} = 0, \quad \bar{J} = \|F_{i,j}\| = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right\| \quad (29)$$
$$i=1, 2, \dots, m; \quad j=1, 2, \dots, m+1.$$

Пусть  $\bar{X}_0$  некоторое известное решение системы (26). Принимаем, что этому известному решению соответствует значение параметра  $\tau = 0$ .

$$\bar{X}(0) = \bar{X}_0. \quad (30)$$

Уравнение (29) с начальным условием (30) представляет собой неявно сформулированную задачу Коши по параметру  $\tau$ . Для интегрирования задачи Коши необходимо из системы уравнений (29) найти вектор

$$\frac{d\bar{X}}{d\tau} = \left\| \frac{dX_1}{d\tau}, \frac{dX_2}{d\tau}, \dots, \frac{dX_{m+1}}{d\tau} \right\|^T.$$

Дальнейшее применение алгоритма решения краевой задачи (19), (20) с помощью метода продолжения по параметру было подробно рассмотрено в работе [3] на примере задачи нелинейного деформирования цилиндрической оболочки без начальных несовершенств.

В результате решения краевой задачи (19), (20) была получена зависимость прогиб-нагрузка для оболочки со случайными несовершенствами формы. Коэффициенты  $a_{ij}$  моделируются по нормальному закону распределения. Эта зависимость, а также зависимость прогиб-нагрузка для идеальной оболочки, показана на рис. 4. Здесь точка А соответствует докритической нагрузке, В – верхней критической нагрузке, С – нижней критической нагрузке, D – закритической нагрузке. На рис. 4 также показаны

зависимости прогиб-нагрузка для несовершенств вида  $w_0 = 0.2 \sin i \pi x$  при  $i = 1$  и  $i = 3$ . Вычисления проводились при  $\alpha = 0.3$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $(x_0, y_0) = (0.5; 0)$ ,  $N = 4$ ,  $M = 12$ .

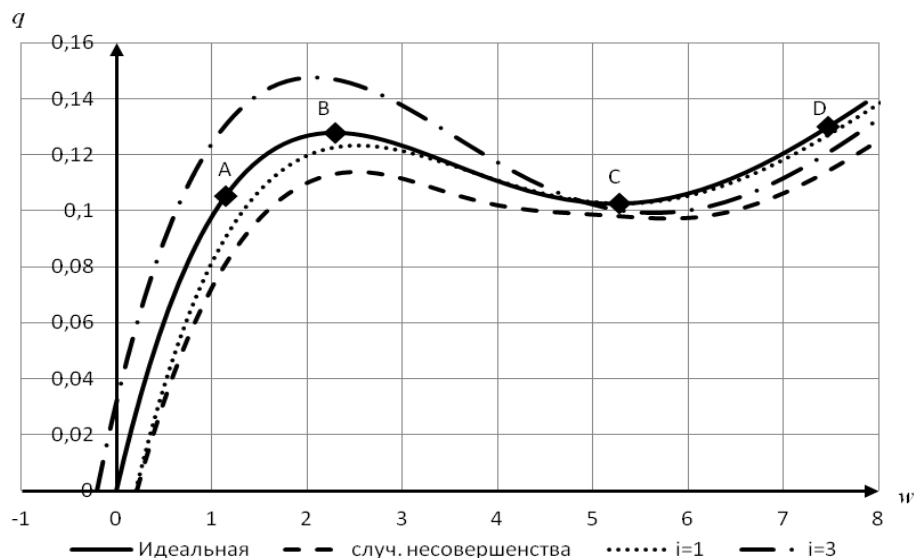


Рис. 4. Зависимость прогиб-нагрузка для оболочек с различными видами начальных несовершенств.

На рис. 5 показаны формы изгиба идеальной оболочки и оболочки со случайными начальными несовершенствами при уровнях статического нагружения, соответствующих точкам А,В,С,Д на рис. 4.

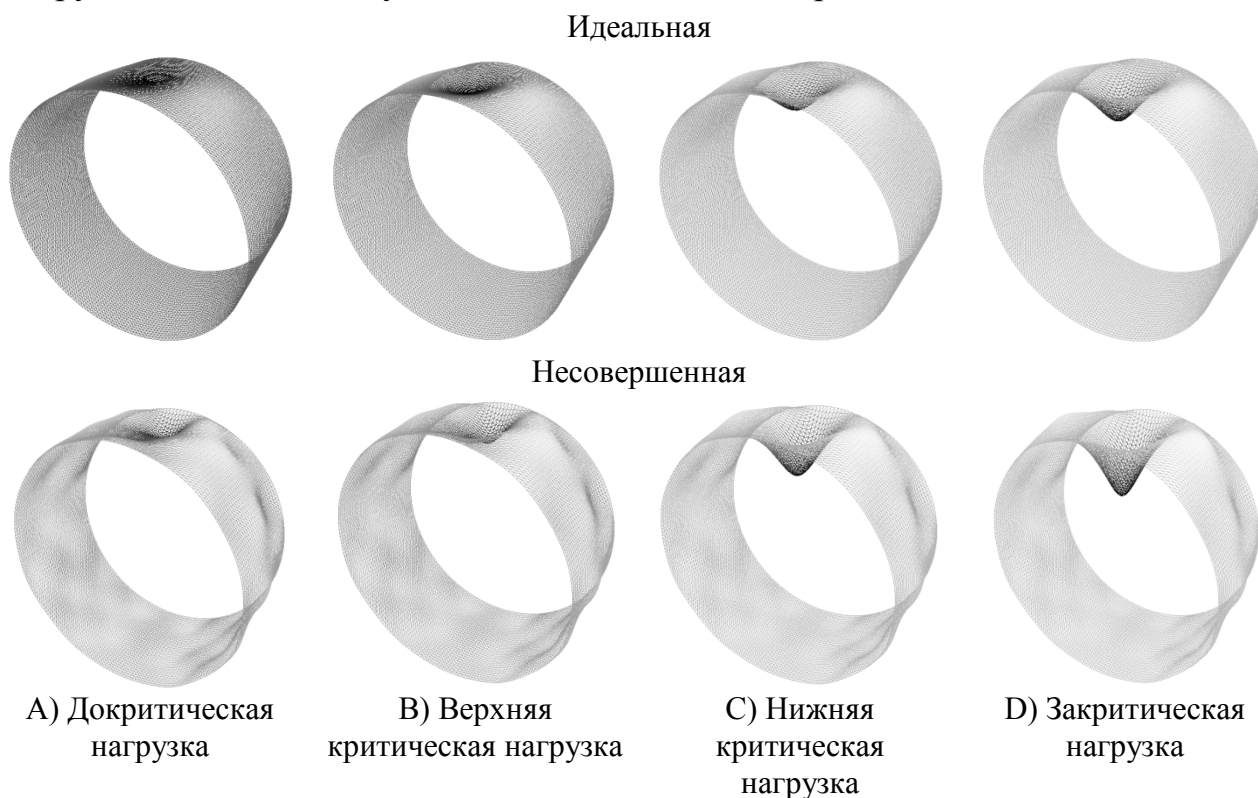


Рис. 5. Формы изгиба идеальной и несовершенной оболочек.

### **Заключение.**

В работе показана эффективность метода дифференцирования по параметру и метода продолжения по параметру на примере решения сложных задач, которые другими методами решить затруднительно.

### **Литература**

1. Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 419 с.
2. Григолюк Э.И., Шалашин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 232 с.
3. Коломоец А.А., Модин А.С. Динамическая потеря устойчивости предварительно нагруженной цилиндрической оболочки при действии неравномерного внешнего давления // Международный научно-исследовательский журнал. 2016. № 5 (47). Ч. 5. С. 21-29.
4. Коломоец А.А., Модин А.С. Нелинейная динамика предварительно нагруженной несовершенной цилиндрической оболочки при действии неравномерного внешнего давления // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2015. № 80. С. 7-12.
5. Коломоец А.А., Модин А.С. Устойчивость равновесных состояний цилиндрической оболочки при действии неравномерного внешнего давления // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2014. № 1. С. 13-17.
6. Коломоец А.А., Куцемако А.Н. Динамическая и статическая устойчивость гибкой цилиндрической оболочки при неравномерном внешнем давлении // Проблемы машиностроения и автоматизации 1993. № 1-2. С. 49-53.
7. Крысько В.А. Коломоец А.А., Рыжов С.А. Динамическая потеря устойчивости гибкой цилиндрической оболочки при действии неравномерного внешнего давления // Прикладная механика. 1990. Т. 26. №2. С.76-82.
8. Коломоец А.А., Болдырева Н.А. Динамическая устойчивость предварительно нагруженной цилиндрической оболочки // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 8. Ярославль: Изд-во ЯГТУ. 2012. С. 179-184.
9. Коломоец А.А., Фомичева Л.Н. Динамика предварительно нагруженной цилиндрической оболочки // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 8. Ярославль: Изд-во ЯГТУ. 2012. С. 171-174.
10. Болдырева Н.А., Коломоец А.А. Применение метода И.Г. Бубнова-Б.Г. Галеркина к исследованию нелинейного деформирования, колебаний и устойчивости цилиндрических оболочек // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2003. Т. 8. Вып. 3. С. 349-350.

11. Коломоец А.А., Модин А.С. Нелинейный отклик цилиндрической оболочки на локальный импульс неравномерного внешнего давления // Евразийский Союз Ученых. 2015. № 10 (19). С. 34-37.
12. Яковлев М.Н. К решению систем нелинейных уравнений методом дифференцирования по параметру // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4. №1. С. 146-149.