

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/11-31

Ссылка для цитирования этой статьи:

Яровая А. В. Термоупругопластическое деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №1

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект T16P-010).

УДК 539.3

ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Яровая А. В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь,
av.yar@yandex.ru

THERMOELASTOPLASTIC DEFORMATION OF CIRCLE SANDWICH PLATE ON ELASTIC FOUNDATION

Yarovaya A.V.

Belarusian State University of Transport, Belarus, Gomel,
av.yar@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрен термоупругий изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины с легким наполнителем, покоящейся на деформируемом основании. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластины приняты гипотезы ломаной нормали. Реакция основания описывается моделью Винклера. Уравнения равновесия получены с помощью вариационного метода Лагранжа, учтена работа заполнителя в тангенциальном направлении. Аналитические решения задачи теории малых упругопластических деформаций получено методом упругих решений. Приведены численные результаты для трехслойной металлополимерной пластины.

Ключевые слова: термосиловое нагружение, пластичность, трехслойная круглая пластина, легкий наполнитель, упругое основание

Abstract. Thermoelastic bending of elastoplastic sandwich circular plate with light filler lying on elastic foundation is considered. For the description of kinematics of package with asymmetrical thickness the broken normal hypothesis was accepted. Reaction of foundation was described on the base of Winkler's model. The equilibrium equations are derived using the Variational method of Lagrange, take into account the work of the filler in the tangential direction. Analytic solution to the problem of the theory of small elastoplastic strains obtained by the method of elastic solutions. Numerical results for sandwich metal-polymeric plate were adduced.

Keywords: thermo-force loading, plasticity, sandwich circular plate, light filler, elastic foundation

Введение. В связи с широким применением композитных, в том числе трехслойных, элементов конструкций, становится актуальной проблема создания адекватных математических моделей для описания их

деформирования при комплексных термосиловых нагрузках.

В монографиях [1–4] рассматриваются различные математические модели статического и динамического деформирования многослойных и трехслойных элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их расчета. В статьях [5, 6] исследовано деформирование композитных многослойных пластин и балок, в том числе с жестким соединением между слоями. Изотермическое динамическое деформирование слоистых (трехслойных) элементов конструкций, в том числе связанных с упругим основанием, под действием непрерывных и локальных нагрузок изучено в работах [7–11]. Колебания трехслойных круговых пластин, вызванных тепловым и радиационным ударами, рассмотрены в статьях [12, 13]. Там же приведен вывод формулы распределения температуры в трехслойной конструкции при воздействии теплового потока. Решение уравнения теплопроводности получено методом усреднения теплофизических характеристик материалов по толщине пакета пластины. Постановки и методики решения краевых задач об изотермическом деформировании, в том числе циклическом, упругопластических трехслойных элементов конструкций, связанных с упругим основанием, приведены в [14–17]. Краевые задачи об изотермическом циклическом деформировании упругопластических слоистых элементов конструкций рассмотрены в статьях [18–20]. Напряженно-деформированное состояние упругопластических трехслойных пластин на упругом основании изучалось, как правило, при изотермическом деформировании.

Здесь приведена постановка и построено аналитическое решение краевой задачи о термосиловом деформировании *трехслойной упругопластической круглой пластины, связанной с упругим основанием*. Численная апробация решения проведена в случае металлополимерных слоев.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z . Для изотропных несущих слоев, толщиной h_1, h_2 , приняты гипотезы Кирхгофа. Несжимаемый по толщине наполнитель ($h_3 = 2c$) легкий, т. е. в нем пренебрегается работа касательных напряжений σ_{rz} . Деформированная нормаль наполнителя остается прямолинейной, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ . На границах слоев перемещения непрерывны. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

Пусть в начальный момент времени на трехслойную круговую пластину, находящуюся на упругом основании, начинают действовать симметричная вертикальная нагрузка $q_0(r)$ и тепловой поток интенсивности q_t , направленный перпендикулярно несущему слою l (рис. 1). На границе заданы усилия T_r^0, H_r^0, M_r^0, Q^0 . Задача определения соответствующего температурного поля рассмотрена в [3], поэтому считаем температуру $T(z, t)$ известной.

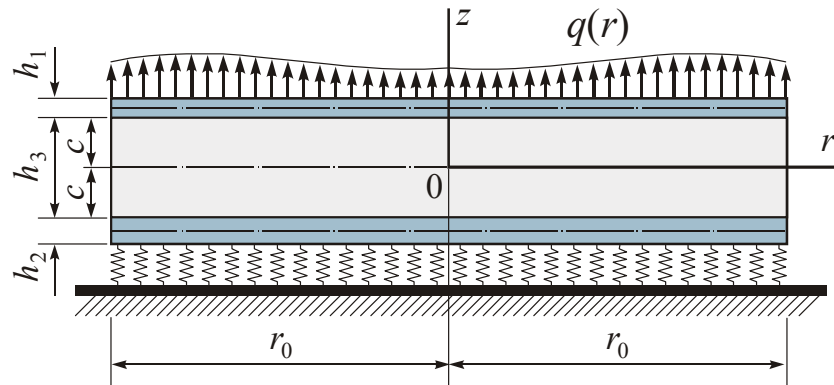


Рис. 1

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k – номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ , т. е. $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_1 , через h_k обозначена относительная толщина k -го слоя.

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)}{}_{,z} + w_{,r} = \psi$, после интегрирования получим выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \quad u_r^{(3)} = u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна (расстояние до срединной плоскости заполнителя), $(u + c\psi)$ – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации заполнителя, $(u - c\psi)$ – смещение второго несущего слоя, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Малые деформации в слоях следуют из (1) и соотношений Коши. Предположим, что материалы несущих слоев рассматриваемой круговой трехслойной пластины в процессе деформирования в температурном поле могут проявлять упругопластические свойства. Напряжения и деформации в них связаны неизотермическими соотношениями теории малых упругопластических деформаций [21]. В физически нелинейном заполнителе дополнительно учитывается влияние вида напряженного состояния. В девиаторно-сферической форме это будут соотношения:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(T_k)(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k))\varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \alpha = r, \varphi, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k), \quad k = 1, 2, \\ \varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3)s_{\alpha\beta}^{(3)} &= 2G_3(T_3)(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_3))\varepsilon_{\alpha\beta}^{(3)}, \quad (\alpha, \beta = r, \varphi), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3(T_3)f^{(3)}(\varepsilon^{(3)}, T_3)\varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad \varphi_2(\sigma^{(3)})\sigma^{(3)} = 3K_3(T_3)(\varepsilon^{(3)} - \alpha_{03}T_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ – девиаторы, а $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – сферические части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости

материалов слоев; α_{0k} – коэффициенты линейного температурного удлинения; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$ – функции пластичности материалов несущих слоев и физической нелинейности заполнителя, зависящие от интенсивности деформаций $\varepsilon_u^{(k)}$ и температуры T_k ; в заполнителе функции нелинейности $\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3)$, $\varphi_2(\sigma^{(3)})$ учитывают влияние гидростатического напряжения $\sigma^{(3)}$; k – номер слоя.

Используя соотношения (2), выделим линейную и термо-нелинейную составляющие в нормальных компонентах тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)} &= \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha e}^{(k)} = 2G_k \vartheta_\alpha^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)}, \\ \sigma_{\alpha \omega}^{(k)} &= 2G_k \omega^{(k)} \vartheta_\alpha^{(k)} + 3K_k \alpha_{0k} T_k, \quad (k=1, 2), \\ \sigma_\alpha^{(3)} &= \sigma_{\alpha e}^{(3)} - \sigma_{\alpha \omega}^{(3)}, \quad \sigma_{\alpha e}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_\alpha^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)}, \quad \omega_\gamma^{(3)} = \phi_\gamma(\sigma^{(3)}) - 1 \quad (\gamma = 1, 2), \\ \sigma_{\alpha \omega}^{(3)} &= 2G_3 \omega^{(3)} \vartheta_\alpha^{(3)} + 3K_3 \alpha_{03} T + \omega_1^{(3)} s_\alpha^{(3)} + \omega_2^{(3)} \sigma^{(3)}, \quad \alpha = r, \phi, \\ \sigma_{rz}^{(3)} &= \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)}, \quad \sigma_{rze}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega^{(3)} \vartheta_{rz}^{(3)} + \omega_\gamma^{(3)} s_{rz}^{(3)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем внутренние усилия и моменты в слоях пластины, также выделяя в них линейные и нелинейные части:

$$\begin{aligned} T_\alpha &= T_{\alpha e} - T_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha \omega}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha e}^{(k)} dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha \omega}^{(k)} dz, \\ M_\alpha &= M_{\alpha e} - M_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha \omega}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha e}^{(k)} z dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha \omega}^{(k)} z dz, \\ H_{\alpha e} &= M_{\alpha e}^{(3)} + c(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}), \quad H_{\alpha \omega} = M_{\alpha \omega}^{(3)} + c(T_{\alpha \omega}^{(1)} - T_{\alpha \omega}^{(2)}), \quad \alpha = r, \phi. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения равновесия пластины выводятся из вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta A - \delta W = 0, \quad (5)$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – вариация суммарной работы внешних нагрузок $q_0(r)$, реакция основания – q_R и контурных усилий T_r^0, H_r^0, M_r^0, Q^0

$$\delta A_1 = \iint_S (q_0 - q_R) \delta w r dr d\phi, \quad \delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w) d\phi,$$

δW – вариация работы внутренних сил упругости

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\phi^{(k)} \delta \varepsilon_\phi^{(k)}) dz \right] r dr d\phi. \quad (6)$$

Интеграл распространен по всей срединной поверхности заполнителя S .

Подставив выражения (3) в соотношения (6), (5) и проведя соответствующие преобразования, получим систему уравнений равновесия в усилиях, описывающую термоупругопластическое деформирование круговой трехслойной пластины с легким заполнителем, лежащей на упругом основании (индекс «e» внизу опустим):

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\phi) = p_\omega, \quad H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\phi) = h_\omega,$$

$$M_{r\gamma rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\gamma r} - M_{\phi\gamma r}) = -q_0 + q_R + q_\omega, \quad (7)$$

Соответствующие граничные условия в усилиях имеют вид ($r = 1$):

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^0 + T_\omega, \quad H_r = H_r^0 + H_\omega, \quad M_r = M_r^0 + M_\omega, \\ M_{r\gamma r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\phi) &= Q^0 + M_{r\omega\gamma r} + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\phi\omega}). \end{aligned} \quad (8)$$

Предполагается, что связь между реакцией основания и прогибом пластины описывается моделью Винклера (Winkler E.), согласно которой

$$q_R = \kappa_0 w, \quad (9)$$

где κ_0 – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели).

Линейные обобщенные внутренние усилия в уравнениях (7) и граничных условиях (8) можно выразить через искомые перемещения с помощью закона Гука и соотношений (4). В результате система нелинейных дифференциальных уравнений равновесия (7) с учетом (9) в перемещениях принимает вид

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{\gamma r}) &= p_\omega, \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{\gamma r}) = h_\omega, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{\gamma r}) - \kappa_0 w &= -q_0 + q_\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

где L_2, L_3 – дифференциальные операторы второго и третьего порядков

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{\gamma r} \equiv g_{\gamma rrr} + \frac{2g_{\gamma rr}}{r} - \frac{g_{\gamma r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}, \quad L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg)\right)_{\gamma r} \equiv g_{\gamma rr} + \frac{g_{\gamma r}}{r} - \frac{g}{r^2}.$$

Коэффициенты a_i определяются в (10) интегральными соотношениями, следующими из вывода зависимостей внутренних усилий от перемещений, так как модули упругости материалов в слоях изменяются по толщине вместе с температурой

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}), \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}, \quad a_4 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}), \\ a_5 &= K_{32} + c(K_{11} - K_{21}), \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2}, \\ K_{km} &= \int_{h_k} [K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k)] z^m dz, \quad (m = 0, 1, 2). \end{aligned} \quad (11)$$

Нелинейные добавки в правых частях уравнений следующие:

$$\begin{aligned} p_\omega &= T_{r\omega\gamma r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\phi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega\gamma r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\phi\omega}), \\ q_\omega &= M_{r\omega\gamma rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega\gamma r} - M_{\phi\omega\gamma r}). \end{aligned} \quad (12)$$

Задача отыскания функций $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$ замыкается присоединением к (10) силовых (8) или кинематических граничных условий. При жесткой заделке контура пластины должны выполняться требования

$$u = \psi = w = w_{\gamma r} = 0. \quad (13)$$

При шарнирном опирании

$$u = \psi = w = M_r = 0. \quad (14)$$

Сформулированная краевая задача является существенно нелинейной, поэтому говорить о ее точном решении не приходится. Рассмотрим процедуру применения метода упругих решений Ильюшина [21] к рассматриваемой задаче. Для этого перепишем систему (10) в итерационном виде:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u^n + a_2 \psi^n - a_3 w_{,r}^n) &= p_\omega^{n-1}, \quad L_2(a_2 u^n + a_4 \psi^n - a_5 w_{,r}^n) = h_\omega^{n-1}, \\ L_3(a_3 u^n + a_5 \psi^n - a_6 w_{,r}^n) - \kappa_0 w^n &= -q_0 + q_\omega^{n-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь n – номер приближения, величины p_ω^{n-1} , h_ω^{n-1} , q_ω^{n-1} называют «дополнительными» внешними нагрузками и на первом шаге полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения. При этом используют формулы типа (12), в которых все слагаемые имеют индекс « $n-1$ » вверху:

$$\begin{aligned} p_\omega^{n-1} &= T_{r\omega}^{n-1} + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{n-1} - T_{\phi\omega}^{n-1}), \quad h_\omega^{n-1} = H_{r\omega}^{n-1} + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{n-1} - H_{\phi\omega}^{n-1}), \\ q_\omega^{n-1} &= M_{r\omega}^{n-1} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{n-1} - M_{\omega\omega}^{n-1}). \end{aligned} \quad (16)$$

При этом

$$\begin{aligned} T_{\alpha\omega}^{n-1} &\equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)n-1} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k (\varepsilon_\alpha^{(k)n-1}) \varepsilon_\alpha^{(k)n-1} dz, \\ M_{\alpha\omega}^{n-1} &\equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k)n-1} z dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k (\varepsilon_\alpha^{(k)n-1}) \varepsilon_\alpha^{(k)n-1} z dz, \\ H_{\alpha\omega}^{n-1} &= M_{\alpha\omega}^{(3)n-1} + c(T_{\alpha\omega}^{(1)n-1} - T_{\alpha\omega}^{(2)n-1}), \quad (\alpha = r, \phi). \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, на каждом шаге приближения мы имеем линейную задачу теории упругости с известными дополнительными «внешними» нагрузками, которые вычисляются по формулам (16), (17).

С помощью первых двух в третьем уравнении системы (15) обнуляем коэффициенты перед искомыми функциями u^n и ψ^n . После двукратного интегрирования этих уравнений система приводится к виду

$$\begin{aligned} u^n &= b_1 w_{,r}^n - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_2 h_\omega^{n-1} - a_4 p_\omega^{n-1}) dr dr + C_1^n r + \frac{C_2^n}{r}, \\ \psi^n &= b_2 w_{,r}^n + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_1 h_\omega^{n-1} - a_2 p_\omega^{n-1}) dr dr + C_3^n r + \frac{C_4^n}{r}, \\ L_3(w_{,r}^n) + \kappa^4 w_r^n &= q + f_\omega^{n-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $C_1^n, C_2^n, C_3^n, C_4^n$ – константы интегрирования на n -ом шаге,

$$\kappa^4 = \kappa_0 D, \quad q = q_0 D, \quad b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2},$$

$$f_{\omega}^{n-1} = -Dq_{\omega}^{n-1} + D_1 \frac{1}{r} (rp_{\omega}^{n-1})_{,r} + D_2 \frac{1}{r} (rh_{\omega}^{n-1})_{,r},$$

$$D = \frac{a_1(a_1a_4 - a_2^2)}{(a_1a_6 - a_3^2)(a_1a_4 - a_2^2) - (a_1a_5 - a_2a_3)^2},$$

$$D_1 = \frac{a_1(a_3a_4 - a_2a_5)}{(a_1a_6 - a_3^2)(a_1a_4 - a_2^2) - (a_1a_5 - a_2a_3)^2},$$

$$D_2 = \frac{a_1(a_1a_5 - a_2a_3)}{(a_1a_6 - a_3^2)(a_1a_4 - a_2^2) - (a_1a_5 - a_2a_3)^2}.$$

Третье уравнение в (18) в развернутом виде следующее:

$$w_{,rrrr}^n + \frac{2}{r} w_{,rrr}^n - \frac{1}{r^2} w_{,rr}^n + \frac{1}{r^3} w_{,r}^n + \kappa^4 w^n = q + f_{\omega}^{n-1}. \quad (19)$$

Его общее решение можно записать в виде

$$w^m = C_5^m \operatorname{ber}(\kappa r) + C_6^m \operatorname{bei}(\kappa r) + C_7^m \operatorname{ker}(\kappa r) + C_8^m \operatorname{kei}(\kappa r) + w_0^n(r), \quad (20)$$

где $\operatorname{ber}(\kappa r)$, $\operatorname{bei}(\kappa r)$, $\operatorname{ker}(\kappa r)$, $\operatorname{kei}(\kappa r)$ – функции Кельвина нулевого порядка; $w_0^n(r)$ – частное решение уравнения (19).

Функция $\operatorname{ker}x$ и ее первая производная в нуле не ограничены ($\operatorname{ker}0 = \infty$, $\operatorname{kei}'0 = \infty$). Так как прогиб и его первая производная в центре пластины должны быть конечными, то в решении (20) для сплошных круговых пластин следует положить $C_7^n = C_8^n = 0$. Частное решение в этом случае можно принять с использованием ядра Коши:

$$w_0^n(r) = \int_0^r K(r,s) [q(s) + f_{\omega}^{n-1}(s)] ds, \quad (21)$$

где

$$K(r,s) = C_1(s)\phi_1(r) + C_2(s)\phi_2(r) + C_3(s)\phi_3(r) + C_4(s)\phi_4(r),$$

$$\phi_1(r) = \operatorname{ber}(\kappa r), \quad \phi_2(r) = \operatorname{bei}(\kappa r), \quad \phi_3(r) = \operatorname{ker}(\kappa r), \quad \phi_4(r) = \operatorname{kei}(\kappa r).$$

Здесь функции $C_n(s)$ определяются отношениями

$$C_1(s) = \frac{W_1(s)}{W(s)}, \quad C_2(s) = \frac{W_2(s)}{W(s)}, \quad C_3(s) = \frac{W_3(s)}{W(s)}, \quad C_4(s) = \frac{W_4(s)}{W(s)},$$

где

$$W(r) = \begin{vmatrix} \phi_1(r) & \phi_2(r) & \phi_3(r) & \phi_4(r) \\ \phi_1'(r) & \phi_2'(r) & \phi_3'(r) & \phi_4'(r) \\ \phi_1''(r) & \phi_2''(r) & \phi_3''(r) & \phi_4''(r) \\ \phi_1'''(r) & \phi_2'''(r) & \phi_3'''(r) & \phi_4'''(r) \end{vmatrix}, \quad W_1(r) = \begin{vmatrix} 0 & \phi_2(r) & \phi_3(r) & \phi_4(r) \\ 0 & \phi_2'(r) & \phi_3'(r) & \phi_4'(r) \\ 0 & \phi_2''(r) & \phi_3''(r) & \phi_4''(r) \\ 1 & \phi_2'''(r) & \phi_3'''(r) & \phi_4'''(r) \end{vmatrix},$$

$$W_2(r) = \begin{vmatrix} \phi_1(r) & 0 & \phi_3(r) & \phi_4(r) \\ \phi_1'(r) & 0 & \phi_3'(r) & \phi_4'(r) \\ \phi_1''(r) & 0 & \phi_3''(r) & \phi_4''(r) \\ \phi_1'''(r) & 1 & \phi_3'''(r) & \phi_4'''(r) \end{vmatrix}, \quad W_3(r) = \begin{vmatrix} \phi_1(r) & \phi_2(r) & 0 & \phi_4(r) \\ \phi_1'(r) & \phi_2'(r) & 0 & \phi_4'(r) \\ \phi_1''(r) & \phi_2''(r) & 0 & \phi_4''(r) \\ \phi_1'''(r) & \phi_2'''(r) & 1 & \phi_4'''(r) \end{vmatrix},$$

$$W_4(r) = \begin{vmatrix} \phi_1(r) & \phi_2(r) & \phi_3(r) & 0 \\ \phi_1'(r) & \phi_2'(r) & \phi_3'(r) & 0 \\ \phi_1''(r) & \phi_2''(r) & \phi_3''(r) & 0 \\ \phi_1'''(r) & \phi_2'''(r) & \phi_3'''(r) & 1 \end{vmatrix}.$$

Частное решение (21) и ядро Коши удовлетворяют условиям:

$$w_0(0) = w_0'(0) = w_0''(0) = w_0'''(0) = 0, \\ K(s, s) = K'(s, s) = K''(s, s) = 0, \quad K'''(s, s) = 1. \quad (22)$$

штрихи вверху обозначает производные по r .

В результате для сплошной пластины искомое итерационное решение принимает вид

$$u^n = b_1 w_{,r}^n - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_2 h_\omega^{n-1} - a_4 p_\omega^{n-1}) dr dr + C_1^n r + \frac{C_2^n}{r}, \\ \psi^n = b_2 w_{,r}^n + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_1 h_\omega^{n-1} - a_2 p_\omega^{n-1}) dr dr + C_3^n r + \frac{C_4^n}{r}, \\ w^n = C_5^n \operatorname{ber}(kr) + C_6^n \operatorname{bei}(kr) + w_0^n(r), \quad (23)$$

где C_2^n и C_4^n определяются из условия непрерывности решения в центре пластины:

$$C_2^n = \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \int r \int (a_2 h_\omega^{n-1} - a_4 p_\omega^{n-1}) dr dr \Big|_{r=0}, \quad C_4^n = -\frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \int r \int (a_1 h_\omega^{n-1} - a_2 p_\omega^{n-1}) dr dr \Big|_{r=0}.$$

Константы интегрирования C_1, C_3, C_5, C_6 следуют из условий закрепления контура рассматриваемой трехслойной пластины, находящейся на упругом основании.

При жесткой заделке контура пластины решение (23) должно удовлетворять условиям (13). В результате

$$C_1^n = \int r \int (a_2 h_\omega^{n-1} - a_4 p_\omega^{n-1}) dr dr \Big|_{r=1} - C_2^n, \quad C_3^n = -\int r \int (a_1 h_\omega^{n-1} - a_2 p_\omega^{n-1}) dr dr \Big|_{r=1} - C_4^n, \\ C_5^n = \frac{w_0''(1) \operatorname{bei} k - b_4 w_0^n(1)}{b_4 \operatorname{ber} k - b_3 \operatorname{bei} k}, \quad C_6^n = \frac{w_0''(1) \operatorname{ber} k - b_3 w_0^n(1)}{b_3 \operatorname{bei} k - b_4 \operatorname{ber} k}, \quad (24)$$

где

$$b_3 = \frac{\kappa \sqrt{2}}{2} [\operatorname{ber}_1 \kappa + \operatorname{bei}_1 \kappa], \quad b_4 = \frac{\kappa \sqrt{2}}{2} [-\operatorname{ber}_1 \kappa + \operatorname{bei}_1 \kappa].$$

Если контур пластины шарнирно оперт, то константы интегрирования следуют из (14).

Таким образом, общее решение (23) с частным решением (21) и константами интегрирования (24) описывает термоупругопластическое деформирование круговой трехслойной пластины с легким наполнителем и жестко заделанным контуром, лежащей на упругом основании.

Численные исследования проводились для заземленной по контуру пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Геометрические параметры пластины отнесены к ее радиусу r_1 , относительные толщины слоев: $h_1 = h_2 = 0,04$, $h_3 = 0,4$.

Для рассматриваемой пластины теплотой, ушедшей на нагревание внешнего металлического слоя, пренебрегаем (в силу малой теплоемкости). Его температура принимается равной температуре наполнителя в месте склейки: $T^{(1)} = T^{(3)}(c, t)$. Вся теплота, воспринимаемая пластиной за время t , идет на нагревание полимерного наполнителя. Температура второго несущего слоя также принимается равной температуре наполнителя в месте их склейки $T^{(2)} = T^{(3)}(-c, t)$. Температурное поле в наполнителе определено в [3]. При тепловом потоке $q_t = 5000$ Дж / (м² · с) температура во внешнем слое достигает значения $T_1 = 597$ К в момент времени $t_0 = 60$ мин., что соответствует достаточному разогреву дюралюминия, но меньше температуры плавления наполнителя-фторопласта. Во втором слое температура постоянна.

Для описания зависимости модулей упругости материалов несущих слоев (металлов) от температуры используется формула, предложенная Беллом [3]:

$$\{G(T), K(T), E(T)\} = \{G(0), K(0), E(0)\} \phi(T),$$
$$\phi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_{\text{пл}} \leq 0,06, \\ 1,03(1 - T/(2T_{\text{пл}})), & 0,06 < T/T_{\text{пл}} \leq 0,57, \end{cases} \quad (25)$$

где $T_{\text{пл}}$ – температура плавления материала; $G(0)$, $K(0)$, $E(0)$ – значения модулей при так называемой нулевой температуре. Например, зная величину модуля сдвига G_0 при некоторой температуре T_0 , получим $G(0) = G_0 / \phi(T_0)$. При более высоких температурах $T / T_{\text{пл}} > 0,57$ возможно малое отклонение поведения материала от линейного закона (25).

Зависимость параметров упругости полимерных материалов (наполнителя) от температуры принимается в виде

$$\{G(T), K(T)\} = \{G_0, K_0\} / \phi_3(T), \quad \phi_3(T) = (1 + B(\Delta T / T_{\text{пл}})^\gamma \text{sgn} \Delta T),$$

где $\Delta T = T - T_0$, T_0 – начальная температура; G_0 , K_0 – значения параметров при температуре T_0 ; B , γ – параметры материала наполнителя, получаемые экспериментально.

Функции пластичности материалов несущих слоев и физической нелинейности наполнителя, зависящие от интенсивности деформаций $\varepsilon_u^{(k)}$, температуры T_k и гидростатического напряжения $\sigma^{(3)}$, принимаются в виде

$$\omega_k(\varepsilon_u^k, T_k) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^k \leq \varepsilon_T^k, \\ A_{1k} \left(1 - \frac{\varepsilon_{T0}^k}{\varepsilon_u^k + \varepsilon_{T0}^k - \varepsilon_T^k} \right)^{\alpha_{1k}}, & \varepsilon_u^k > \varepsilon_T^k. \end{cases}$$

$$\varepsilon_T^k(T) = \frac{\sigma_T^k(T_k)}{E_k(T_k)}, \quad \sigma_T^k = \sigma_{T0}^k \exp \left\{ \kappa_k \left(\frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_{k0}} \right) \right\},$$

$$\varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3) = (1 - A_2 |\sigma|^{\alpha_2}) (1 + B (\Delta T_3 / T_{3пл})^\gamma \operatorname{sgn} \Delta T_3), \quad \varphi_2(\sigma^{(3)}) = \begin{cases} 1, & p \geq p_0, \\ A_3 |\sigma|^{\alpha_3}, & p < p_0, \end{cases} \quad (26)$$

где A_{1k} , α_{1k} , E_k , κ_k , A_2 , α_2 , A_3 , α_3 – константы материалов слоев, получаемые экспериментально; $\varepsilon_T^{(k)}$ – предел текучести материала по деформациям при температуре T_k , $\varepsilon_{T0}^{(k)}$ – предел текучести при начальной температуре; p_0 – минимальное давление, закрывающее все внутренние дефекты в материале заполнителя.

В качестве заполнителя часто используются полимерные материалы. Механизм их объемного поведения при положительных средних напряжениях σ качественно и количественно отличается от такового при всестороннем сжатии. Надежных соответствующих опытных данных пока нет. Поэтому функция нелинейности φ_2 определена только в области $\sigma < 0$. Все термомеханические характеристики используемых материалов, входящие в (25), (26) приведены в [3].

Числовое исследование полученного решения при основании средней жесткости ($\kappa_0 = 100$ МПа / м) продемонстрировало быструю сходимость метода упругих решений. Максимальное отличие перемещений в 4-м приближении, принятых за искомые решения, от предыдущих – менее 1 %. Интенсивность поверхностной нагрузки принималась $q_0 = -20$ МПа.

На рис. 2 показаны перемещения (a – прогиб, b – сдвиг) в рассматриваемой пластине, лежащей на упругом основании средней жесткости: 1 – упругий изгиб, 2 – термоупругий, 3 – термоупругопластический, 4 – термоупругопластический в пластине, пределы текучести материалов которой уменьшены в 2 раза. Учет физически нелинейного термосилового деформирования материалов слоев приводит к увеличению упругого расчетного прогиба на 12,5 %. Если принять материалы несущих слоев более пластичными, то эта разница составит 17 %.

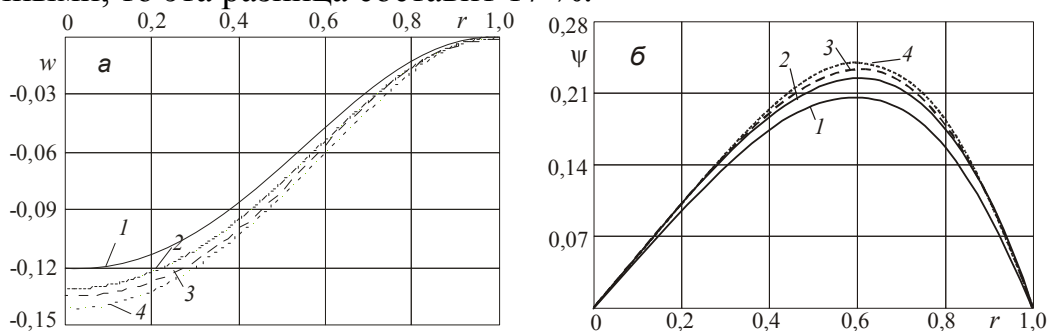


Рис. 2

Изменение радиальных напряжений по толщине пластины в ее центре показано на рис. 3: 1 – изотермический изгиб, 2 – термоупругопластический в момент времени $t_0 = 60$ мин. За счет нагревания и физически нелинейного деформирования первый слой и часть заполнителя расширяются и испытывают сжатие из-за защемления контура пластины. Это вызывает в них сдвиг напряжений в отрицательную область. В первом слое наблюдается резкое увеличение напряжений по модулю. Во втором несущем слое температура не изменяется, поэтому и напряжения примерно такие же по величине.

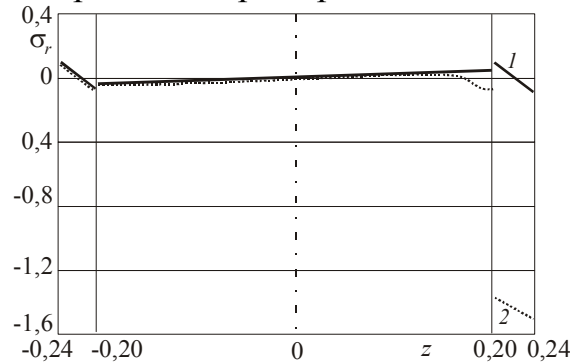


Рис. 3

Выводы. Приведенное в работе общее решение (21), (23) можно использовать для исследования любого случая изгиба симметричной термосиловой нагрузкой трехслойной круговой пластины с легким заполнителем на упругом основании, при наличии отверстия или без него.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект T16P-010).

Литература

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
2. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. Киев: Киевский ун-т, 2012. 541 с.
3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 416 с.
4. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Динамика металлополимерных систем. Минск: Бел. наука, 2004. 386 с.
5. Могилевич Л.И., Попов В.С., Старовойтов Э.И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56-63.
6. Škec L., Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection // Acta Mechanica. 2014. Vol. 225. No. 2. P. 523-541. doi: 10.1007/s00707-013-0972-5.
7. Kuznetsova E.L., Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium // Mechanics of Solids. 2015. Vol. 50. No. 3. P. 359-366.

8. Starovoitov, E.I. Leonenko D.V. Resonant effects of local on circular sandwich plates on an elastic foundation // International applied mechanics. 2010. Vol. 46. No. 1. P. 86-93.
9. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. № 6. С. 91-98.
10. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 1. С. 45-52.
11. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Circular sandwich plates under local impulsive loads // International Applied Mechanics. 2003. Vol. 39. No. 8. P. 945-952.
12. Leonenko D. V., Starovoitov E.I. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation // Mechanics of Solids. 2012. Vol. 47. No. 1. P. 111-118.
13. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation // International Applied Mechanics. 2011. Vol. 47. No. 5. P. 580-589. doi: 10.1007/s10778-011-0481-y.
14. Starovoitov E.I., Leonenko, D.V., Yarovaya, A.V. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation // International Applied Mechanics. 2007. Vol. 43. No. 4. P. 451-459.
15. Leonenko D.V., Starovoitov, E.I. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation // Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46. No. 2. P. 291-298. doi: 10.3103/S002565441102018X.
16. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Сулейман М. Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании // Механика композитных материалов. 2007. Т. 43. № 1. С. 109-120.
17. Starovoitov E.I., Dorovskaya E.P., Starovoitov S.A. Cylindrical bending of elastic rectangular three-layer plate on deformed base // Mechanics of composite materials. Vol. 46. No. 1. 2010. P. 57-72.
18. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Плескачевский Ю.М. Циклическое деформирование трехслойного стержня локальной поверхностной нагрузкой // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 2. С. 26-41. <http://mathmod.esrae.ru/2-12>.
19. Москвитин В.В., Старовойтов Э.И. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин // Механика композитных материалов. 1985. № 3. С. 409-416.
20. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux // Mechanics of Solids. 2001. Vol. 36. No.1. P. 64-69.
21. Ильюшин, А.А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М.: Гостехиздат. 1948. 376 с.