Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/ URL статьи: mathmod.esrae.ru/11-34

Ссылка для цитирования этой статьи:

Бабенкова Т.В., Майорова О.А., Сопенко А.А., Черепанов М.Д. Математическое моделирование сложных колебаний нелинейной пологой оболочки при действии поперечной нагрузки и сжимающих усилий // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №1

## УДК 539.3;543.1

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ И СЖИМАЮЩИХ УСИЛИЙ

Бабенкова Т.В.<sup>1</sup>, Майорова О.А.<sup>2</sup>, Сопенко А.А.<sup>3</sup>, Черепанов М.Д.<sup>4</sup> <sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, babenkovat@yandex.ru

<sup>2</sup> Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, lebedoksa95@gmail.com

<sup>3</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, saasar@mail.ru

<sup>4</sup> Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, maksim cherepanov@mail.ru

### MATHEMATICAL MODELLING OF COMPLEX OSCILLATIONS NONLINEAR SHALLOW SHELL WITH TRANSVERSE AND COMPRESSIVE LOADING

Babenkova T.V.<sup>1</sup>, Mayorova O.A.<sup>2</sup>, Sopenko A.A.<sup>3</sup>, Cherepanov M.D.<sup>4</sup> <sup>1</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, babenkovat@yandex.ru

<sup>2</sup> Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, lebedoksa95@gmail.com

<sup>3</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, saasar@mail.ru

<sup>4</sup> Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, maksim cherepanov@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача о динамической реакции прямоугольной в плане геометрически нелинейной пологой оболочки при ее нагружении переменными во времени сжимающими и поперечными нагрузками. Рассматриваются процессы перехода от периодических к хаотическим колебаниям. Рассматриваются некоторые проблемы численного решения задачи.

Ключевые слова: нелинейная пологая оболочка, сложные колебания, хаотические колебания, поперечная нагрузка, сжимающие усилия.

**Abstract.** The paper deals with the problem of dynamic response of geometrically nonlinear shallow shell of rectangular planform to time-dependent transverse and compressive loading. The transition process from periodic to chaotic vibrations is applied. Some problems of numerical decision is considered.

Keywords: nonlinear sloping shell, complex vibrations, chaotic vibrations, transverse loading, compressive loading.

Задача исследования сложных колебаний пластин под действием продольных и поперечных нагрузок неоднократно рассматривалась многими авторами, укажем, например, на работы [1-3]. Реже рассматривались колебания оболочек при действии таких же комбинированных нагрузок, при этом принималось, что сжимающие усилия, действующие по краям оболочки, либо являются постоянными, либо меняются во времени по известному закону, например,  $p = p_0 \sin \omega t$ . В данной работе рассматриваются колебания гибкой пологой сферической прямоугольной в плане оболочки под действием поперечной равномерно распределенной по плану нагрузки, изменяющейся во времени по закону  $q = q_0 \sin \omega t$ , и сжимающих усилий  $p_1$  и  $p_2$ . При этом сжимающие усилия принимались пропорциональными нормальным усилиям, возникающим на границах оболочки, и менялись во времени соответственно изменению последних, обеспечивая в какой-то мере обратную связь между нормальными усилиями и сжимающими нагрузками.

Уравнения, описывающие поведение гибкой пологой оболочки под действием продольных и поперечных нагрузок, в смешанной форме в безразмерном виде, согласно [4], имеют следующий вид:

$$\frac{1}{12(1-\nu^{2})}\nabla^{4}w - L(w,F) - \nabla_{k}^{2}F + p_{1}\frac{\partial^{2}w}{\partial x_{1}^{2}} + p_{2}\frac{\partial^{2}w}{\partial x_{2}^{2}} + k_{1}\lambda^{2}p_{1} + k_{2}\lambda^{-2}p_{2} - q + k(w+\varepsilon w) = 0, \qquad (1)$$
$$\nabla^{4}F + \nabla_{k}^{2}w + \frac{1}{2}L(w,w) = 0,$$

где  $k = \frac{a^2 b^2 \rho}{E h^6}.$ 

Здесь F - функция усилий, w - прогиб в направлении, перпендикулярном срединной поверхности, a,b,h- размеры оболочки, E и v-модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $\rho$  - плотность. Остальные обозначения для известных дифференциальных операторов и констант приводятся в [5].

Рассматривалась оболочка, изготовленная из сплава АМц, a = b, a/h = 100. Безразмерные параметры кривизны  $k_1 = k_2 = 24$ . В начальный момент времени оболочка находится в покое. По контуру оболочка опирается на гибкие, нерастяжимые в касательной плоскости ребра. На границах  $x_1 = 0$ ;1 граничные условия записываются следующим образом:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad \mathcal{E}_{22} = 0, \quad F = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = p_1. \tag{2}$$

Симметричные граничные условия ставятся на границах  $x_2 = 0;1$ . На оболочку на поверхности  $z = -\frac{1}{2}$  ( $z = -\frac{h}{2}$  в размерном виде) действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q = q_0 \sin \omega t$ , где частота  $\omega$  выбиралась близкой к собственной частоте колебаний конструкции.

Сжимающее усилие  $p_1$ , действующее на границах  $x_1 = 0;1$ , принималось равным 0, если в середине границы (точки  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0,5$  и  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0,5$ ) в оболочке возникало нормальное усиление со знаком минус. Если в указанных точках возникало нормальное усилие со знаком плюс, то принималось, что  $p_1 = k_n \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}$ , где  $k_n$  - постоянный коэффициент. В последующих расчетах принималось значение  $k_n = 0,05$ . Аналогично определялось сжимающее усилие  $p_2$ .

Предполагалось, что возникновение сжимающих усилий  $p_1$  и  $p_2$  было некоторой реакцией закрепления оболочки на ее колебания. Таким же образом значения  $p_1$  и  $p_2$  пересчитывались на каждом шаге по времени, полученные вычисления правых значения использовались для частей  $p_{1},$  $p_2$ дифференциальных уравнений на следующем шаге по времени. что накладывало определенные требования к вычислительной схеме и о чем будет сказано ниже.

В качестве начальных условий примем соотношения  $w|_{t=0} = 0$ ,

$$\dot{w}\Big|_{t=0} = 0$$

Безразмерные переменные для системы уравнений (1) вводились следующим образом (здесь чёрточки сверху, опущенные для удобства в системе (1), стоят над безразмерными переменными):

$$\overline{x_1} = \frac{x_1}{a}, \quad \overline{x_2} = \frac{x_2}{b}, \quad \overline{x_3} = \frac{x_3}{h}, \quad \overline{w} = \frac{w}{h}, \quad \overline{F} = \frac{F}{Eh^3}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \overline{t} = \frac{t \cdot \alpha}{h^2}, \quad (3)$$

$$\overline{q} = q \frac{a^2 b^2}{Eh^4}, \quad \overline{k_1} = k_1 \frac{a^2}{h}, \quad \overline{k_2} = k_2 \frac{b^2}{h}, \quad \overline{\Delta T_{ij}} = \Delta T_{ij} \frac{ab}{Eh^3}, \quad \overline{\Delta M_{ij}} = \Delta M_{ij} \frac{ab}{Eh^4}.$$

Для решения системы (1) использовался метод конечных разностей для дискретизации производных по пространственным переменным. Второе уравнение системы (1) сводилось к системе алгебраических уравнений относительно *F*. Данная система решалась методом Гаусса на каждом шаге по (1) сводилось времени. Первое уравнение К системе обыкновенных дифференциальных уравнений по времени, интегрирование которых, как отмечалось в [6], вызывало немало трудностей. В [6] было отмечено, что осуществлялось интегрирование ПО времени комбинацией c явного (экстраполяционного) и неявного (интерполяционного) методов Адамса 4-го порядка точности. Сама по себе данная схема широко известна, в литературе она часто упоминается как схема Адамса-Бэшфорта [7]. Но и данной схемы оказалось недостаточно.

Численные эксперименты показали, что устойчивый вычислительный процесс наблюдался, когда вышеуказанную схему дополнили итоговым интегрированием с использованием неявного метода Адамса 5-го порядка точности. Выбор 5-го порядка оправдан тем, что нам не приходится еще один раз вычислять правые части уравнений, хотя время счета, безусловно, увеличивается за счет увеличения количества вычислительных операций на одном шаге времени.

Отметим еще раз, что выбор усложненной схемы интегрирования по времени обусловлен алгоритмом решения задачи, при котором данные с одного шага по времени используются на следующем. Т.е. подобная комбинация Адамса-Бэшфорта может быть рекомендована в тех задачах, где сам алгоритм требует малого шага по времени. В приведенных ниже результатах мы часто имели дело с квазипериодическими колебаниями, поэтому для проверки полученной вычислительной схемы была выбрана модельная задача с решением

$$y = 5e^{\sin 5x} \sin 17x + 31e^{\sin 17x} \sin 33x.$$

Просчеты при выполнении до 400000 шагов показали, что обе вышеприведенные схемы Адамса-Бэшфорта не дают никаких существенных выигрышей в точности результата по сравнению со стандартным методом Рунге-Кутта 4-го порядка точности при решении модельной задачи. Это еще раз подтверждает, что усложненные схемы необходимы при таких алгоритмах решения нелинейных задач, которые связаны с линеаризацией во времени.

Собственная частота колебаний рассмотренной гибкой пологой оболочки была близка, согласно численным экспериментам, к значению  $\omega = 30,215$ . Все ниже приведенные результаты получены при воздействии внешней возбуждающей силы с частотой  $\omega = 32$ . В качестве иллюстраций в таблицы собраны зависимость w(t), фазовый портрет и спектр мощности, полученный

при использовании быстрого преобразования Фурье. Мы позволили себе для сравнения привести результаты, полученные в [6] для задачи без учета сжимающих усилий  $p_1$ ,  $p_2$ .

Геометрически нелинейная оболочка, $p_1 = p_2 = 0$ Таблица 1				
$q_{0}$	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности	
49.2	y 1.5 1.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0	Model and the second se	S. 4b 9 8 7 6 5 4 3 2 5 10 15 20 25 30 ω	
49.3	W 1.5- 1.5- 0- 0- 0- 0- 0- 0- 0- 0- 0- 0	W a a a a a a a a a a a a a a a a a a a	S. db 9 8 7 6 5 10 15 20 25 30 $\omega$	
60	w 3 2.5 2 1.5 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0.5	W D D D D D D D D D D D D D D D D D D D	S, db 0 0 0 0 0 0 0 0	
67.5	W 3 2.5 2 1.5 0 0.5 0 0.5 1 30 30.5 31 31.5 32 32.5 33	W	S.db	
67.8	x 2 5 1 5 1 0 5 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 -		2, db 9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	



Как указано в [6], в данной задаче реализуется сценарий Помо-Манневиля перехода от гармонических колебаний к хаотическим, с яркими примерами перемежаемости форм колебаний с ростом амплитуды поперечной нагрузки  $q_0$ . Следует отметить, что авторы повторили расчеты некоторых вышеуказанных задач с использованием трехитерационной схемы интегрирования по времени. В количественном аспекте результаты имели несущественные различия, в качественном все хорошо совпало. Для задачи с учетом возможного возникновения  $p_1$ ,  $p_2$  была использована только схема с тремя итерациями, т.к. схема с двумя итерациями очень часто расходилась. Полученные результаты собраны в табл. 2.





# Продолжение таблицы 2

30	W 2 1.5 0 0 0.5 0 0 0.5 0 0 0 0.5 0 0 0 0.5 0 0 0 0	W 4 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 5 1 15 2 2 5 W 4	S, db 7 6 5 4 3 2 0 1 2 5 10 15 20 25 30 00 00 00 00 00 00 00 00 00
32,5	W 2 1.5 1.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0 0.5 0 0 0.5 0 0 0 0	W a a a a a a a a a a a a a a a a a a a	S, db
35	W 2.5 2 1.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	W	$\mathcal{S}_{d} db$ $\mathcal{S}_{d} db$
40	W 2.5 1.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0 0.5 0 0 0 0	W 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	S, db T G G G G G G G G
55	W 2.5 2 1.5 0 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0.5 0 0 0.5 0 0 0.5 0 0 0.5 0 0 0 0	W 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	S, db
64,5	225 2 15 1 05 0 05 0 0 05 0 0 0 05 0 0 0 0 0	W *	$S, db$ $\omega_2$ $\omega_1$ $\omega_2$ $\omega_1$ $\omega_2$ $\omega_1$ $\omega_2$ $\omega_1$ $\omega_2$ $\omega_2$ $\omega_3$ $\omega_4$ $\omega_4$ $\omega_2$ $\omega_4$ $\omega_$



#### Продолжение таблицы 2

В окрестностях значения  $q_0 = 20$ , много раньше, чем указано в табл.1, начинают зарождаться новые частоты. Так, при  $q_0 = 22,5$  на спектре мощности наблюдаются три частоты:  $\omega_0 = 31,9757; \omega_1 = 27,3404; \omega_2 = 4,6353$ , причем  $\omega_1 = \omega_0 - \omega_2$ . В диапазоне  $q_0$  от 32 до 45 наблюдается возникновение большого числа новых зависимых и независимых частот, фазовый портрет занимает весьма значительную область, ограниченность некоторой предельной фазовой траекторией, усложняется форма колебаний, что позволяет говорить о возникновении хаотических колебаний. При  $q_0 = 40$  на спектре наблюдаются значения частот  $\omega_0 = 31,9757; \omega_1 = 23,4907; \omega_2 = 8,4849; \omega_3 = 6,4423$  и многие они, с частотами "эпохи" другие, но кроме  $\omega_0$ , не совпадают квазипериодических колебаний, хотя и здесь  $\omega_1 = \omega_0 - \omega_2$ .

В интервале  $q_0$  от 55 до 65 наблюдается возврат к квазигармоническим колебаниям, в частности, при  $q_0 = 55$  среди наблюдаемых на спектре мощности частот видим те же, что присутствовали на графике при  $q_0 = 22,5$ . Но возврата к гармоническим колебаниям, в отличие от результатов, приведенных в табл.1, не наблюдается вообще.

При дальнейшем возрастании значения  $q_0$  наблюдается уверенный переход к необратимым хаотическим колебаниям, причём необратимые хаотические колебания наступают при значительно меньших нагрузках (в

окрестностях значения 75 амплитуды поперечной нагрузки), чем в задаче без учёта сжимающих усилий (в окрестности значения 100 такой же амплитуды). Как и в [6], наблюдается эффект влияния форм колебаний на значения максимальных прогибов: в начальной зоне хаотических колебаний их амплитуда может превышать амплитуду квазипериодических колебаний при более значительных нагрузках.

Таким образом, учет возможных обратных связей закрепления оболочки на ее динамическое поведение, способствует возникновению в ходе численного моделирования различных форм перехода колебаний от гармонических к хаотическим, что неоднократно подчеркивалось, например, в [8].

### Литература

- 1. Крысько В.А., Вахлаева Т.В., Крысько А.В. Сложные асимметричные колебания и бифуркации пластинок при действии продольных знакопеременных нагрузок // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Механика. 2000. №2. С. 153-160.
- 2. Крысько В.А., Кравцова И.В. Стохастические колебания гибких осесимметричных шарнирно-подвижных по контуру сферических оболочек // Изв. вузов. Машиностроение. 2004. №1. С. 11-20.
- 3. Крылова Е.Ю., Папкова И.В., Ерофеев Н.П., Захаров В.М., Крысько В.А. Сложные колебания гибких пластин под действием продольных нагрузок с учетом белого шума // Прикладная механика и техническая физика. 2016. Т. 57. №4 (338). С.163-169.
- 4. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
- 5. Крысько В.А., Сопенко А.А., Салий Е.В. Сложные колебания геометрически и физически нелинейных пологих оболочек на прямоугольном плане // Изв. ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10. №1-2. С. 92-103.
- 6. Майорова О.А., Сопенко А.А., Черепанов М.Д. Сложные колебания геометрически и физически нелинейных пологих оболочек // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 3. С. 26-33. URL: mathmod.esrae.ru/3-16.
- 7. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.