

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/11-35

Ссылка для цитирования этой статьи:

Быкова Т.В., Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Скородумов Е.С. Динамика взаимодействия упругой геометрически нерегулярной пластины со слоем вязкой жидкости и абсолютно твердым подвижным вибратором опоры // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №1

Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 16-01-00175-а

УДК 681.03.06:531.383:532.516

ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЛОЕМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫМ ПОДВИЖНЫМ ВИБРАТОРОМ ОПОРЫ

Быкова Т.В.¹, Грушенкова Е.Д.², Могилевич Л.И.³, Скородумов Е.С.⁴

¹ Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, tbykova69@mail.ru

² Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, katenok.09041992@gmail.com

³ Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, mogilevich@sgu.ru

⁴ Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, evgen_rgot@mail.ru

DYNAMICS OF THE INTERACTION OF ELASTIC GEOMETRICALLY PLATES IRREGULAR WITH A LAYER OF VISCOUS FLUID AND AN ABSOLUTELY RIGID VIBRATOR MOVABLE SUPPORT

Bykova T.V.¹, Grushenkova E.D.², Mogilevich L.I.³, Skorodumov E.S.⁴

¹ Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, tbykova69@mail.ru

² Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, katenok.09041992@gmail.com

³ Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, mogilevich@sgu.ru

⁴ Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, evgen_rgot@mail.ru

Аннотация. Исследование посвящено разработке математических моделей гидроупругости ребристых тонкостенных конструкций, взаимодействующих с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости, и исследование на их основе динамики демпферов (виброопор).

Ключевые слова: виброускорение, вязкая несжимаемая жидкость, упругие геометрически нерегулярные конструкции, закон пульсации давления.

Abstract. The study focused on the development of mathematical models hydroelasticity finned thin-walled structures, interacting with pulsating layer of a viscous incompressible fluid, and the study on the basis of their dynamics dampers (shock mounts).

Keywords: vibration acceleration, viscous incompressible fluid, elastic geometrically irregular structure, the law of pressure pulsation.

На сегодняшний день проблемы динамики взаимодействия упругих элементов конструкций с жидкостью являются темой исследования научных работ, направленных на решение, как теоретических, так и практических задач. Среди них можно выделить работы, в которых рассматриваются различные модели жидкости. Например, в монографии [1] рассмотрены задачи аэрогидроупругости пластин и оболочек, взаимодействующих с идеальной жидкостью в приложении к летательным и подводным аппаратам. Изгибные колебания пластины, погруженной в идеальную несжимаемую жидкость, имеющей свободную поверхность рассмотрены в [2]. Хаотические колебания пластины, взаимодействующей с потоком идеальной несжимаемой жидкости исследованы в [3]. Колебания круглой пластины на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости исследованы в [4]. Задача о колебаниях круглой пластины, погруженной в воду со свободной поверхностью решена в [5]. Задача об изгибных колебаниях балки-полоски, взаимодействующей с идеальной жидкостью применительно к исследованию причин возникновения вибрационной кавитации в охлаждающей жидкости двигателя внутреннего сгорания (ДВС) рассмотрена в [6]. Данная проблема крайне важна для исследования кавитационного износа гильз ДВС [7,8]. С другой стороны, известны работы, в которых рассматриваются задачи гидроупругости для вязкой жидкости. В монографии [9] рассмотрены прикладные задачи гидроупругости поплавковых приборов навигации и ДВС на базе постановки и решения задач динамики взаимодействия вязкой несжимаемой жидкости с цилиндрической оболочкой. Колебания балки в потоке вязкой жидкости применительно к пьезопреобразователям исследованы в [10]. В работе [11] рассмотрена задача о колебаниях консольнозакрепленной пластины, находящейся в потоке вязкой несжимаемой жидкости. Исследованию гармонических колебаний бесконечно длинной балки с учетом демпфирующих свойств слоя вязкой жидкости, на котором она находится, посвящена работа [12]. В работах [13-19] рассмотрены задачи гидроупругости геометрических регулярных прямоугольных и круглых пластин, взаимодействующих со слоем вязкой несжимаемой жидкости. Задачи гидроупругости для трехслойных пластин, взаимодействующих с вязкой жидкостью рассмотрены в работах [20, 21]. Динамика взаимодействия вязкой жидкости с геометрически нерегулярными упругими элементами исследована в работах [22-31]. В предлагаемой работе исследуется динамика упругой геометрически нерегулярной конструкции, взаимодействующей с вязкой жидкостью и абсолютно твердым телом, в составе опоры.

Гидродинамическая опора (демпфер) условно представлена на рис.1. Абсолютно жесткое тело 1 - вибратор опоры. Вибратор имеет ширину 2ℓ и длину $b \gg 2\ell$. Вибратор совершает колебания по гармоническому закону $z = \delta(t) = \delta_0 + z_m f_z(\omega t)$, в вертикальной плоскости. При этом частота его колебаний ω , а амплитуда колебаний вибратора z_m .

Упругая ребристая, прямоугольная в плане пластина - статор 2 опоры. Внутренняя поверхность пластины, находящаяся в контакте с жидкостью, является плоской, а внешняя поверхность имеет n ребер жесткости. Ребра расположены параллельно стороне b пластины. Толщина статора на участках, где отсутствуют ребра жесткости, равна h_0 . Высота j -го ребра равна h_{pj} , а его ширина ε_j . Статор на торцах имеет шарнирное опирание. Вязкая несжимаемая жидкость 3 полностью заполняет щелевой зазор между абсолютно твердым вибратором и упругим геометрически нерегулярным статором. При этом в жидкости, находящейся в щелевом зазоре, и вне его поддерживается постоянный уровень давления p_0 . Средняя величина щелевого зазора (средняя толщина слоя жидкости в опоре) равна δ_0 . На торцах сторон b имеются торцевые уплотнители, и истечение жидкости через эти торцы отсутствует. При этом предполагается, что на торцах 2ℓ сторон торцевые уплотнители отсутствуют, и жидкость из щелевых зазоров вдоль сторон 2ℓ (вдоль оси x) может свободно истекать в окружающую жидкость, постоянный уровень давления в которой равен p_0 . Кроме того, на левом и правом торцах считаются заданными законы пульсации давления над постоянным уровнем p_0 .

Вибратор имеет подвес (например, магнитный или на пружине), который обладает упругой жесткостью. Опора находится под воздействием виброускорения (т.е. считается установленной на вибрирующем основании). Вследствие этого возбуждение колебаний вибратора происходит за счет воздействия пульсации давления и переносного виброускорения.

Учитывая, что $b \gg 2\ell$ и рассматривая упрощенную задачу ($\frac{\partial}{\partial y} \ll \frac{\partial}{\partial x}$),

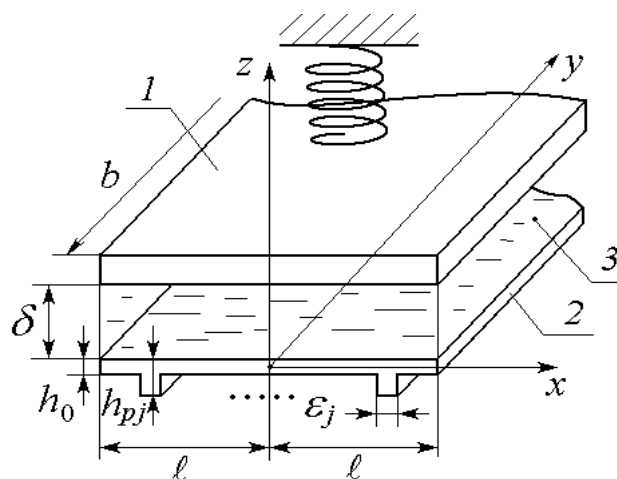


Рис. 1

введена декартова система координат $Oxyz$, связанная с координатной поверхностью статора, и следующие безразмерные переменные и малые параметры:

$$\zeta = \frac{z - h_0/2}{\delta_0}, \xi = \frac{x}{\ell}, \tau = \omega t, V_z = z_m \omega U_\zeta, V_x = \frac{z_m \omega}{\psi} U_\xi, W = w_m U_3, \quad (1)$$

$$p = p_0(\tau) - \rho \ddot{z}_0 \left(z - \delta_0 - \frac{h_0}{2} - z_m f_z(\omega t) \right) + \frac{\rho \nu z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} P, \quad U = u_m U_1$$

где $\psi = \delta_0 / \ell \ll 1$ – относительная толщина слоя жидкости, $\lambda = z_m / \delta_0 \ll 1$ – относительная амплитуда колебаний вибратора, δ_0 – средняя толщина слоя жидкости в зазоре, V_x, V_z – компоненты скорости жидкости; U, W – продольное перемещение и прогиб упругой пластины; ρ, ν – плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости, p – давление жидкости.

Поставленная задача гидроупругости канала с ребристой пластиной включает уравнения динамики слоя жидкости в нулевом приближении по ψ :

$$\frac{\omega \delta_0^2}{\nu} \left[\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \right] = - \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0,$$

В качестве граничных условий задачи выступают:

- условия прилипания жидкости к вибратору и пластине

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df_z(\tau)}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta = 1 + \lambda f_z(\tau),$$

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{w_m}{z_m} \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \quad \text{при} \quad \zeta = \lambda \frac{w_m}{z_m} U_3, \quad (3)$$

- условия свободного торцевого истечения жидкости:

$$P = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1; \quad (4)$$

Напряжение, действующее на упругий геометрически нерегулярный статор со стороны слоя жидкости (2) в безразмерных переменных (1) с точностью до ψ примет вид:

$$q_n = -p_0 - \frac{\rho \nu z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} P + \rho \delta_0 \ddot{z}_0 (\zeta - 1 - \lambda f_z(\tau)) \quad \text{при} \quad \zeta = \lambda \frac{w_m}{z_m} U_3. \quad (5)$$

$$q_x = \frac{\rho \nu z_m \omega}{\delta_0 \psi} \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \quad (6)$$

Проводя решение уравнений (2) с учетом граничных условий (3) и (4), получены выражения для параметров слоя вязкой несжимаемой жидкости в нулевом приближении по λ :

$$\begin{aligned}
 P = & \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \left[2\varepsilon^2 \alpha(\omega) \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 12\gamma(\omega) \frac{df_z}{d\tau} \right] + \\
 & + \frac{w_m}{z_m} \int_{\xi}^1 \left[2\varepsilon^2 \alpha(\omega) \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} + 12\gamma(\omega) \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] d\xi d\xi + \\
 & + \frac{1}{2}(\xi - 1) \frac{w_m}{z_m} \int_{-1}^1 \left[2\varepsilon^2 \alpha(\omega) \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} + 12\gamma(\omega) \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] d\xi d\xi \\
 \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = & -\xi \left[\varepsilon^2(\alpha-1) \frac{\partial^2 f_z}{\partial \tau^2} + 6\gamma \frac{df_z}{d\tau} \right] + \frac{w_m}{z_m} \int \left[\varepsilon^2(\alpha-1) \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} + 6\gamma \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] d\xi - \\
 & - \frac{w_m}{2z_{m-1}} \int \left[\varepsilon^2(\alpha-1) \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} + 6\gamma \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] d\xi d\xi,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $2\varepsilon^2 = \delta_0^2 \omega / \nu = \text{Re}$ - число Рейнольдса;

$$\begin{aligned}
 \gamma(\omega) = & \frac{1}{6\varepsilon^3} \frac{\varepsilon^3 (sh\varepsilon - \sin\varepsilon)}{\varepsilon^3 (ch\varepsilon + \cos\varepsilon) - 2\varepsilon (sh\varepsilon + \sin\varepsilon) + 2(ch\varepsilon - \cos\varepsilon)} \\
 \alpha(\omega) = & \frac{\varepsilon [\varepsilon (ch\varepsilon + \cos\varepsilon) - (sh\varepsilon + \sin\varepsilon)]}{\varepsilon^2 (ch\varepsilon + \cos\varepsilon) - 2\varepsilon (sh\varepsilon + \sin\varepsilon) + (ch\varepsilon - \cos\varepsilon)}
 \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\alpha = 1.2 \text{ и } \gamma = 1 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0; \alpha = 1; \alpha - 1 = 1/\varepsilon; \gamma = \varepsilon/6 \text{ при } \varepsilon > 4 \tag{8}$$

Выражение для силы, действующей на вибратор со стороны жидкости

$$N_3 = 2lb p_0 + \frac{\rho \nu z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} \int_{-1}^1 \int_0^1 P l d\xi dy, \tag{9}$$

где m_1 – масса вибратора; n_1 – коэффициент жесткости подвеса вибратора; N_3 – сила, действующая на вибратор со стороны слоя жидкости при $\zeta = 1 + \lambda f_z(\tau)$.

Уравнение движения вибратора:

$$m_1 (\ddot{z}_0 + \ddot{z}) + n_1 z = 2lb p_0 + \frac{lb \rho \nu z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} \int_{-1}^1 P d\xi \tag{10}$$

Уравнения динамики упругого геометрически нерегулярного статора примут вид:

$$- \frac{Eh_0}{(1 - \mu_0)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h_0}{2} \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= q_x - \rho_0 h_0 \left(\left[1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right] \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{h_0}{2} \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2} \right) \\
 &\frac{E h_0}{(1 - \mu_0)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{h_0^2}{12} \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{h_0}{2} \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \frac{\partial U}{\partial x} \right] = \\
 &= q_n - \rho_0 h_0 \left(\left[1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \right] \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \ddot{z}_0 \right) - \right. \\
 &\left. - \frac{h_0}{2} \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial t^2} - \frac{h_0^2}{12} \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \Delta \Gamma_{xj} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} \right); \tag{11}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 q_n &= -p - p_0(\tau) - p \delta_0 \omega^2 \frac{d^2 z_0}{d\tau^2} - \\
 &- \frac{\rho l \omega^2 z_m}{\operatorname{Re} \psi} \left\{ \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) \left[2 \varepsilon^2 \alpha(\omega) \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 12 \gamma(\omega) \frac{df_z}{d\tau} \right] + \right. \\
 &+ \frac{w_m}{z_m} \int_{\xi}^1 \int \left[2 \varepsilon^2 \alpha(\omega) \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} + 12 \gamma(\omega) \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] d\xi d\xi + \\
 &\left. + \frac{1}{2} (\xi - 1) \frac{w_m}{z_m} \cdot \int_{-1}^1 \int \left[2 \varepsilon^2 \alpha(\omega) \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} + 12 \gamma(\omega) \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] d\xi d\xi \right\} \\
 q_x|_{\xi=0} &= \frac{\rho l \omega^2 z_m}{\operatorname{Re}} \left\{ -\xi \left(\varepsilon^2 (\alpha - 1) \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 6 \gamma \frac{df_z}{d\tau} \right) + \frac{w_m}{z_m} \int \left[\varepsilon^2 (\alpha - 1) \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + 6 \gamma \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] d\xi - \frac{w_m}{2 z_m} \cdot \int_{-1}^1 \int \left[\varepsilon^2 (\alpha - 1) \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} + 6 \gamma(\omega) \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] d\xi d\xi \right\} \tag{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{1j} &= \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}}{h_0} \cdot k_{2j} = \left[\left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}}{h_0} \right]^2 + \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}}{h_0} \\
 k_{3j} &= \left(4 - 2 \frac{h_0}{h_{pj}} + \frac{h_0^2}{h_{pj}^2} \right) \left(1 - \frac{h_0}{h_{pj}} \right) \frac{h_{pj}^3}{h_0^3}. \tag{13}
 \end{aligned}$$

$\Delta \Gamma_{xj} = \Gamma(x - x_j) - \Gamma(x - x_j - \varepsilon_j)$, $\Gamma(x)$ – единичная функция Хевисайда по продольной координате.

В качестве граничного условия выступают условия шарнирного опирания плоской ребристой пластины на торцах:

$$U_3 = 0, \quad \frac{\partial^2 U_3}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при } \xi = 1; \quad U_3 = 0, \quad \frac{\partial^2 U_3}{\partial \xi^2} = 0 \quad \text{при } \xi = -1. \quad (14)$$

В первом уравнении (11) пренебрегаем правой частью, т.к. не рассматриваются продольные волны и нормальное напряжение со стороны жидкости значительно больше касательного $q_n \gg q_x$, которым можно пренебречь и имеем:

$$h_0 \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{xj}\right) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h_0^2}{2} \sum_{j=1}^n k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$$

Учитывая, что $k_{2j} = k_{1j}(k_{1j} + 1)$, получаем

$$h_0 \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{xj}\right) \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h_0}{2} \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] = 0.$$

Из полученного уравнения находим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{h_0}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{xj}$$

и подставляем во второе уравнение, в результате чего получим:

$$\begin{aligned} & \frac{E}{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-\frac{h_0^3}{4} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sum_{j=1}^n k_{1j} k_{2j} \Delta \Gamma_{xj} + \frac{h_0^2}{12} \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \Delta \Gamma_{xj}\right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] = \\ & = q_n - \rho_0 h_0 \left(\left[1 + \sum_{j=1}^n k_{1j} \Delta \Gamma_{xj}\right] \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \ddot{z}_0 \right) + \frac{h_0}{4} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \sum_{j=1}^n k_{2j} k_{1j} \Delta \Gamma_{xj} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right. \\ & \left. - \frac{h_0^2}{12} \left(1 + \sum_{j=1}^n k_{3j} \Delta \Gamma_{xj}\right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \end{aligned}$$

Форму прогиба ребристого статора представим в виде ряда по нормальным формам колебаний

$$W = w_m U_{30} = w_m \sum_{k=1}^{\infty} \left(R_k^0 + R_k(\tau) \right) \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi. \quad (15)$$

После подстановки (7), (15) в уравнения движения ребристой пластины (11) и вибратора (10) с учетом заданных законов вибрации основания и пульсаций давления на торцах $z_0 = E_z f_0(\tau) = E_z \sin(\tau + \varphi_0)$,

$p_1 = p_m f_p(\tau) = p_m \sin(\tau + \varphi_p)$, используя процедуру Бубнова-Галеркина, были найдены законы движения вибратора и прогиб ребристой пластины:

$$z = z^{(0)} + z^{(1)} = \frac{2lb}{n_1} \left[p_0 + p_m \left[Q_{pc} \frac{df_p}{d\tau} + Q_{ps} f_p \right] \right] + E_z \left(Q_{0c} \frac{df_0}{d\tau} + Q_{0s} \frac{d^2 f_0}{d\tau^2} \right), \quad (16)$$

$$w = w_m \sum_{k=1}^n \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi \left\{ \frac{p_0}{w_m} \frac{Det_k}{Det A_n} + \right. \\ \left. + \frac{E_z}{w_m} \left[(A_{0k}^{(n)} - [A_k^{(n)} Q_{0s} + B_k^{(n)} Q_{0c}]) \frac{df_0}{d\tau} + (B_{0k}^{(n)} + [A_k^{(n)} Q_{0c} - B_k^{(n)} Q_{0s}]) \frac{d^2 f_0}{d\tau^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{p_m}{w_m} \left[(A_{pk}^{(n)} + \frac{2lb}{n_1} [A_k^{(n)} Q_{ps} - B_k^{(n)} Q_{pc}]) \frac{df_p}{d\tau} + (B_{pk}^{(n)} - \frac{2lb}{n_1} [A_k^{(n)} Q_{pc} + B_k^{(n)} Q_{ps}]) f_p \right] \right\}, \quad (17)$$

где D – коэффициент, характеризующий жесткость ребристой пластины.

$$A_k^{(n)} = \frac{G_{zk}^{(n)} C^{(n)} - C_{zk}^{(n)} G^{(n)}}{(C^{(n)})^2 + (G^{(n)})^2}, \quad B_k^{(n)} = -\frac{C_{zk}^{(n)} C^{(n)} + G_{zk}^{(n)} G^{(n)}}{(C^{(n)})^2 + (G^{(n)})^2},$$

$$A_{pk}^{(n)} = \frac{D G_{pk}^{(n)} C^{(n)} - C_{p3}^{(n)} G^{(n)}}{l^4 (C^{(n)})^2 + (G^{(n)})^2}, \quad B_{pk}^{(n)} = \frac{D C_{pk}^{(n)} C^{(n)} + G_{pk}^{(n)} G^{(n)}}{l^4 (C^{(n)})^2 + (G^{(n)})^2}, \quad (18)$$

$$A_{0k}^{(n)} = \frac{G_{0k}^{(n)} C^{(n)} - C_{0k}^{(n)} G^{(n)}}{(C^{(n)})^2 + (G^{(n)})^2}, \quad B_{0k}^{(n)} = -\frac{C_{0k}^{(n)} C^{(n)} + G_{03}^{(n)} G^{(n)}}{(C^{(n)})^2 + (G^{(n)})^2},$$

$$A = \begin{pmatrix} a1_{11} + I \cdot a2_{11} & a1_{12} + I \cdot a2_{12} & \dots & a1_{1l} + I \cdot a2_{1l} \\ a1_{21} + I \cdot a2_{21} & a1_{22} + I \cdot a2_{22} & \dots & a1_{2l} + I \cdot a2_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a1_{n1} + I \cdot a2_{n1} & a1_{n2} + I \cdot a2_{n2} & \dots & a1_{nm} + I \cdot a2_{nm} \end{pmatrix},$$

$$e = \begin{pmatrix} c1_1 + I \cdot c2_1 + b1_1 + d1_1 \\ c1_2 + I \cdot c2_2 + b1_2 + d1_2 \\ \dots \\ c1_n + I \cdot c2_n + b1_n + d1_n \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где $b1_i = \frac{(-1)^i 48 l^4 \omega^2 \delta_0}{(2i-1) h_0^3 c^2 \rho_0 \operatorname{Re} \nu \lambda \pi}$;

$$c1_i = -\left(\frac{(-1)^i 48}{(2i-1)} \frac{l^4 \omega^2 \rho \delta_0 \varepsilon^2}{h_0^3 c^2 \psi^2 \rho_0 \operatorname{Re} \pi} \alpha - \frac{(-1)^i 48}{(2i-1)^3} \frac{l^4 \omega^2 \rho \delta_0 \varepsilon^2}{h_0^3 c^2 \psi^2 \rho_0 \operatorname{Re} \pi^3} \alpha (-8 + 25\pi^2) \right); \quad (20)$$

$$c2_i = \left(\frac{288}{(2i-1)} \frac{l^4 \omega^2 \rho \delta_0}{h_0^3 c^2 \psi^2 \rho_0 \operatorname{Re} \pi} \gamma - \frac{288}{(2i-1)^3} \frac{l^4 \omega^2 \rho \delta_0}{h_0^3 c^2 \psi^2 \rho_0 \operatorname{Re} \pi^3} \gamma (-8 + (2i-1)^2 \pi^2) \right);$$

$$d1_i = \frac{24l^4}{(2i-1)h_0^2 c^2 \pi} \left(2 + \sum_{j=1}^m k_{1j} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \left(\xi_j + \frac{\varepsilon_j}{l} \right)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} \xi_j \right) \right) \right) \left(1 + \frac{\rho \delta_0}{h_0 \rho_0} \right);$$

Если $i = k$

$$\begin{aligned}
 a1_{ik} &= \frac{(2i-1)^2 \pi^3}{16} \left(\frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^m k_{3j} \frac{\varepsilon_j}{l} + \sum_{j=1}^m k_{3j} \frac{1}{2} [\sin((2i-1)\pi(\xi_j + \frac{\varepsilon_j}{l})) - \sin(2i-1)\pi\xi_j] + \pi \right) \\
 &- \frac{12l^4 \omega^2}{h_0^2 c^2} \left\{ 1 + \frac{1}{(2i-1)\pi} \sum_{j=1}^m k_{1j} (\sin((2i-1)\pi(\xi_j + \frac{\varepsilon_j}{l})) - \sin((2i-1)\pi\xi_j)) + \right. \\
 &\left. + (2i-1)\pi \frac{\varepsilon_j}{l} \right\} - \frac{8\rho\delta_0\varepsilon^2}{(2i-1)^2 h_0 \psi^2 \rho_0 \operatorname{Re} \pi^2} \alpha \}; \\
 a2_{ik} &= \frac{576l^4 \omega^2 \rho \delta_0 \gamma}{(2i-1)^2 h_0^3 c^2 \psi^2 \rho_0 \operatorname{Re} \pi^2}; \tag{21}
 \end{aligned}$$

Если $i \neq k$

$$\begin{aligned}
 a1_{ik} &= \left[\frac{(2k-1)^4}{32(i+k-1)} - \frac{(2k-1)^2}{4} \right] \pi^3 \cdot \\
 &\cdot \left(\sum_{j=1}^m k_{3j} \frac{1}{2} [\sin((i+k-1)\pi(\xi_j + \frac{\varepsilon_j}{l})) - \sin(i+k-1)\pi\xi_j] + \pi \right) + \\
 &+ \frac{(2k-1)^4}{32} \pi^3 \left(\sum_{j=1}^m k_{3j} [\sin(\pi(\xi_j + \frac{\varepsilon_j}{l})) - \sin \pi\xi_j] \right) + \\
 &+ \frac{6l^4 \omega^2}{(i+k-1)h_0^2 c^2 \pi} \sum_{j=1}^m k_{1j} ((i+k-1)\sin(\pi(\xi_j + \frac{\varepsilon_j}{l})) + \sin((i+k-1)\pi(\xi_j + \frac{\varepsilon_j}{l})) - \\
 &- (i+k-1)\sin(\pi\xi_j) - \sin((i+k-1)\pi\xi_j)) \\
 a2_{ik} &= 0;
 \end{aligned}$$

$C^{(n)} = \operatorname{Re}(\operatorname{Det}A_n)$ - действительная часть определителя матрицы A ,

$G^{(n)} = \operatorname{Im}(\operatorname{Det}A_n)$ - мнимая часть определителя матрицы A ,

$C_{zk}^n = \operatorname{Re}(\operatorname{Det}C_i)$ - действительная часть определителя матрицы n -го порядка, полученной из матрицы A системы заменой i -го столбца элементами C столбца правых частей e ,

$G_{zk}^n = \operatorname{Im}(\operatorname{Det}C_i)$ - мнимая часть определителя матрицы n -го порядка, полученной из матрицы A системы заменой i -го столбца элементами C столбца правых частей e ,

$C_{ok}^n = \operatorname{Re}(\operatorname{Det}DR_i)$ - действительная часть определителя матрицы n -го порядка, полученной из матрицы A системы заменой i -го столбца элементами d столбца правых частей e ,

$G_{ok}^n = \operatorname{Im}(\operatorname{Det}DR_i)$ - мнимая часть определителя матрицы n -го порядка, полученной из матрицы A системы заменой i -го столбца элементами d столбца правых частей e ,

$C_{pk}^n = \text{Re}(\text{Det}B_i)$ - действительная часть определителя матрицы n -го порядка, полученной из матрицы A системы заменой i -го столбца элементами b столбца правых частей e ,

$G_{pk}^n = \text{Im}(\text{Det}B_i)$ - мнимая часть определителя матрицы n -го порядка, полученной из матрицы A системы заменой i -го столбца элементами b столбца правых частей e ,

$\text{Det}C_i$ - определитель матрицы n -го порядка, полученной из матрицы A системы заменой i -го столбца элементами C столбца правых частей e ,

$\text{Det}B_i$ - определитель матрицы n -го порядка, полученной из матрицы A системы заменой i -го столбца элементами b столбца правых частей e ,

$\text{Det}DR_i$ - определитель матрицы n -го порядка, полученной из матрицы A системы заменой i -го столбца элементами d столбца правых частей e ,

$$Q_{pc} = n_1 \frac{\bar{a}_1 \bar{c}_{p2} - \bar{a}_2 \bar{c}_{p1}}{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2}, \quad Q_{ps} = n_1 \frac{\bar{a}_2 \bar{c}_{p2} + \bar{a}_1 \bar{c}_{p1}}{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2}, \quad Q_{0c} = \frac{\bar{a}_1 \bar{c}_{02} - \bar{a}_2 \bar{c}_{01}}{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2},$$

$$Q_{0s} = -\frac{\bar{a}_2 \bar{c}_{02} + \bar{a}_1 \bar{c}_{01}}{\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2}, \quad \bar{a}_1 = n_1 - [m_1 + M_z] \omega^2, \quad \bar{a}_2 = 2K_z \omega, \quad \bar{c}_{p1} = (1 + M_p), \quad \bar{c}_{p2} = T_p \omega,$$

$$\bar{c}_{01} = (m_1 + M_{z0}) \omega^2, \quad \bar{c}_{02} = -2K_{z0} \omega.$$

$$M_z \omega^2 = 2lb \frac{\rho v \omega}{\delta_0 \psi^2} \left[\frac{2\varepsilon^2 \alpha}{3} + 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{(2k-1) \cdot \pi} \right)^2 \left(12\gamma A_k^{(n)} - 2\varepsilon^2 \alpha B_k^{(n)} \right) \right], \quad (22)$$

$$2K_z \omega = 2lb \frac{\rho v \omega}{\delta_0 \psi^2} \left[\frac{12\gamma}{3} - 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{(2k-1) \cdot \pi} \right)^2 \left(12\gamma B_k^{(n)} + 2\varepsilon^2 \alpha A_k^{(n)} \right) \right],$$

$$M_{z0} \omega^2 = 2lb \frac{\rho v \omega}{\delta_0 \psi^2} 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{(2k-1) \cdot \pi} \right)^2 \left(12\gamma A_0^{(n)} - 2\varepsilon^2 \alpha B_0^{(n)} \right),$$

$$2K_{z0} \omega = -2lb \frac{\rho v \omega}{\delta_0 \psi^2} 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{(2k-1) \cdot \pi} \right)^2 \left(12\gamma B_0^{(n)} + 2\varepsilon^2 \alpha A_0^{(n)} \right),$$

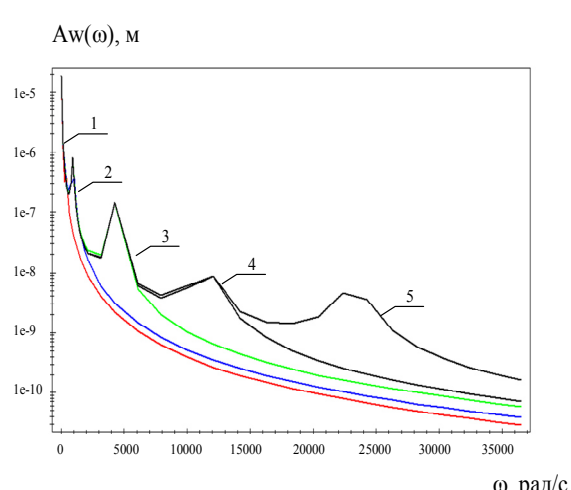
$$M_p = \frac{l^4}{D} \frac{\rho v \omega}{\delta_0 \psi^2} 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{(2k-1) \cdot \pi} \right)^2 \left[2\varepsilon^2 \alpha B_{pk}^{(n)} + 12\gamma A_{pk}^{(n)} \right],$$

$$T_p \omega = \frac{l^4}{D} \frac{\rho v \omega}{\delta_0 \psi^2} 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{(2k-1) \cdot \pi} \right)^2 \left[2\varepsilon^2 \alpha A_{pk}^{(n)} - 12\gamma B_{pk}^{(n)} \right].$$

Количество членов ряда n – любое. Найденные законы движения вибратора и прогиба ребристой пластины с учетом (7) позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние пластины, давление в жидкости, перемещения вибратора и определить резонансные частоты колебаний в рассматриваемой механической системе применительно к гидродемпферам,

системам смазки и охлаждения.

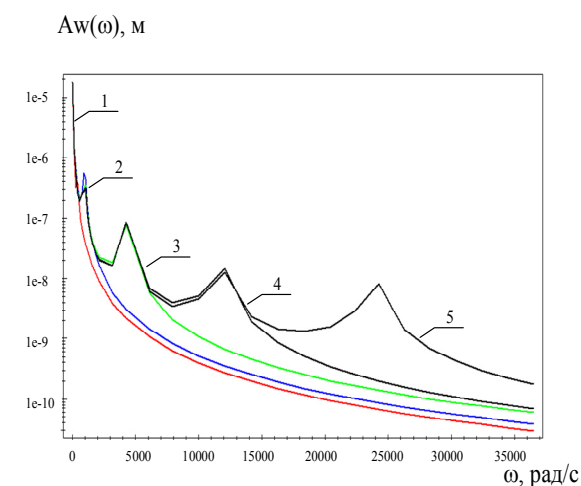
Результаты расчетов амплитудных частотных характеристик (АЧХ) при $E_z \omega^2 = 1g$, $p_m = 1$ Па для варианта канала с параметрами (два ребра): $\ell = 0,1$ м; $\delta_0/\ell = 0,08$; $b = 10$; $\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м²; $\rho = 1,84 \cdot 10^3$ кг/м²; $\mu_0 = 0,3$; $\nu = 2,5 \cdot 10^{-4}$ м²/с; $m_1 = 2,5$ кг; $n_1 = 9,5 \cdot 10^7$ кг/с², $h_{p1} = 1,1h_0$, $\xi_1/\ell = -0,4$, $\varepsilon_1/\ell = 0,1$, $h_{p2} = 1,1h_0$, $\xi_2/\ell = 0,3$, $\varepsilon_2/\ell = 0,15$, материал пластины – сплав Д16Т; для варианта канала (одно ребро): $\xi_1/\ell = -0,05$, $\varepsilon_1/\ell = 0,1$, представлены на рис. 2-5. Расчеты проводились для случаев $n = 1 \dots 5$.



АЧХ прогибов в центре плоской ребристой пластины с использованием материала Д16Т (виброускорение основания 1g) (одно ребро)

1 – при 1-м члене ряда; 2 – при 2-х членах ряда;
3 – при 3-х членах ряда; 4 – при 4-х членах ряда;
5 – при 5- членах ряда;

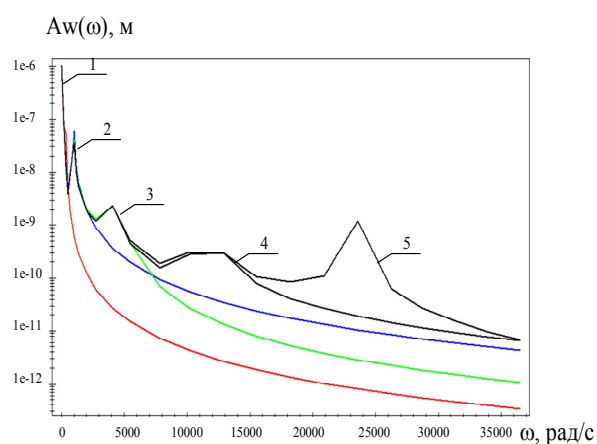
Рис. 2



АЧХ прогибов в центре плоской ребристой пластины с использованием материала Д16Т (виброускорение основания 1g) (два ребра)

1 – при 1-м члене ряда; 2 – при 2-х членах ряда;
3 – при 3-х членах ряда; 4 – при 4-х членах ряда;
5 – при 5- членах ряда;

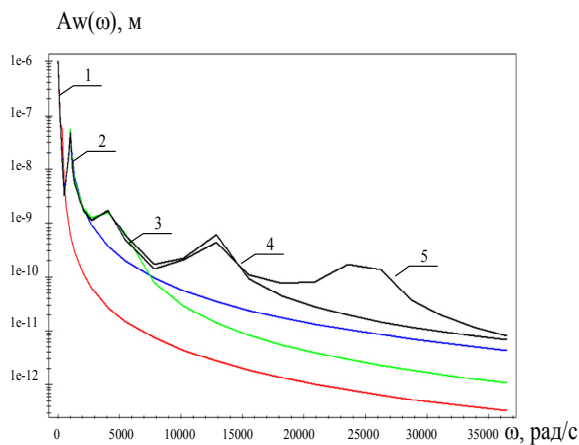
Рис. 3



АЧХ прогибов в центре плоской ребристой пластины с использованием материала Д16Т (пульсация давления 1Па) (одно ребро)

1 – при 1-м члене ряда; 2 – при 2-х членах ряда;
3 – при 3-х членах ряда; 4 – при 4-х членах ряда;
5 – при 5- членах ряда

Рис. 4



АЧХ прогибов в центре плоской ребристой пластины с использованием материала Д16Т (пульсация давления 1 Па) (два ребра)

1 – при 1-м члене ряда; 2 – при 2-х членах ряда;
3 – при 3-х членах ряда; 4 – при 4-х членах ряда;
5 – при 5- членах ряда;

Рис. 5

Расчеты показали, что в случае удержания 1-го члена ряда в (17) наблюдаются две резонансные частоты у ребристой пластины. Учет каждого последующего члена ряда приводит к появлению дополнительной резонансной частоты, расположенной выше предшествующих. Амплитуды, соответствующие дополнительным частотам, значительно меньше амплитуд при удержании одного члена ряда. Поэтому для практических целей достаточно удержания первых 1-2 членов ряда в решении. При этом расчёты подтверждают введённое при постановке задачи предположение, что $z_m/\delta_0 \ll 1$.

Наличие ребер жесткости у статора приводит к уменьшению амплитуды и увеличению значений резонансных частот. В частности, в случае ребристого статора резонансные частоты оказываются большими (до 2-3,3 раза), то есть происходит сдвиг резонансных частот в высокочастотную область.

Работа выполнена при поддержке Гранта РФФИ № 16-01-00175-а

Литература

1. Горшков А. Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 591 с.
2. Haddara M.R., Cao S. A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates // Marine Structures. Vol. 9. №10. 1996. P. 913-933.
3. Аврамов К.В., Стрельникова Е.А. Хаотические колебания пластинок при их двустороннем взаимодействии с потоком движущейся жидкости // Прикладная механика. 2014. Т. 50. №3. С. 86-93.
4. Amabili M. Vibrations of Circular Plates Resting on a Sloshing Liquid: Solution of the Fully Coupled Problem // Journal of Sound and Vibration. 2001. Vol. 245. №2. P. 261- 283.
5. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic Vibration of Circular Plates Immersed in a Liquid-filled Container with Free Surface // Journal of Sound and Vibration. 2013. Vol. 332. №12. P. 3064-3085.
6. Индейцев Д.А., Полипанов И.С., Соколов С.К. Расчет кавитационного ресурса втулки судовых двигателей // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. №4. С. 59-64.
7. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С., Симдянкин А.А. Исследование влияния кавитационного износа гильз двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением КАМАЗ-740 на их деформацию в блоке // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2007. № 1 (33). С. 120-126.
8. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Колебания гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением под действием ударных нагрузок со стороны поршневой группы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 100-106.
9. Могилевич Л. И., Попов В. С. Прикладная гидроупругость в машино- и приборостроении. Саратов, 2003. 156 с.

10. Akcabay D.T., Young Y.L. Hydroelastic Response and Energy Harvesting Potential of Flexible Piezoelectric Beams in Viscous Flow // *Physics of Fluids*. 2012, Vol. 24. №5.
11. Faria Cassio T., Inman Daniel J. Modeling energy transport in a cantilevered EulerBernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // *Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol. 45. №2. 2014. P. 317-329.
12. Önsay T. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system // *Journal of Sound and Vibration*. 1993. Vol. 163. №2. P. 231-259.
13. Попова А.А. Математическое моделирование динамических процессов в виброопоре с упругими элементами конструкции // *Вестник Саратовского государственного технического университета*. 2007. Т. 1. №4. С. 25-31.
14. Агеев Р.В., Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия подвижных стенок плоского канала со сдвливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // *Вестник Саратовского государственного технического университета*. 2009. Т. 4. № 1 (42). С. 7-13.
15. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдвливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2010. №4. С. 23-32.
16. Могилевич Л.И., Попов В.С. Исследование взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости со стенками канала, образованного соосными вибрирующими дисками // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. 2011. №3. С. 42-55.
17. Агеев Р.В., Быкова Т.В., Кондратова Ю.Н. Математическое моделирование взаимодействия слоя вязкой жидкости с упругими стенками канала, установленного на вибрирующем основании // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2011. Т. 11. № 2. С. 48-54.
18. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // *Труды МАИ*. 2014. №78.
19. Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2014. №3. С. 17- 35.
20. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2014. №1. С. 3-11.
21. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N., Kuznetsova E.L. Mathematical model of three-layer plate interaction with viscous incompressible liquid layer under foundation vibration // *Applied Mathematical Sciences*. 2015. Т. 9. №112. С. 5551-5559.

22. Агеев Р.В., Быкова Т.В. Решение динамической задачи гидроупругости и гидродинамической виброопоры с упругим геометрически нерегулярным статором // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 1. № 1 (52). С. 7-14.
23. Могилевич Л.И., Попова А.А. Динамическая задача гидроупругости виброопоры с упругой ребристой пластиной // Наука и техника транспорта. 2007. № 4. С. 55-61.
24. Попова А.А. Математическое моделирование процессов взаимодействия вязкой жидкости с тонкостенными ребристыми элементами гидродинамических демпферов и трубопроводов: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Саратов, 2008. 32 с.
25. Попов В.С., Попова А.А., Волов М.И. Математическое моделирование взаимодействия ламинарного пульсирующего потока с цилиндрической ребристой оболочкой, по которой он движется // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2010. № 1 (36). С. 51-66.
26. Попова А.А. Математическое моделирование процессов взаимодействия вязкой жидкости с тонкостенными ребристыми элементами гидродинамических демпферов и трубопроводов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Саратовский государственный технический университет. Саратов, 2008. 174 с.
27. Попов В.С. Колебания ребристой оболочки, окруженной слоем вязкой несжимаемой жидкости // Аграрный научный журнал. 2003. № 4. С. 47-50.
28. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Попов В.С., Плаксина И.В. Задачи гидроупругости для трубы кольцевого сечения с упругой, геометрически нерегулярной внешней оболочкой при воздействии давления // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. № 3. С. 70-76.
29. Агеев Р.В., Попов В.С., Попова А.А. Взаимодействие пульсирующего слоя жидкости с упругой пластиной переменной толщины // Ресурсоэнергоэффективные технологии в строительном комплексе региона. 2014. № 4. С. 209-213.
30. Скородумов Е.С., Кондратов Д.В., Кузнецова Е.Л., Могилевич Л.И., Попов В.С. Колебания геометрически нерегулярной пластины и штампа, взаимодействующих друг с другом через слой вязкой жидкости // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2016. № 11-2. С. 37-53.
31. Kondratov D.V., Kalinina A.V., Mogilevich L.I., Popova A.A., Kondratova Y.N. Mathematical model of elastic ribbed shell dynamics interaction with viscous liquid under vibration // В сборнике: Vibroengineering Procedia 22, Dynamics of Strongly Nonlinear Systems. Сер. "22nd International Conference on Vibroengineering" 2016. С. 300-305.