Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/11-36
Ссылка для цитирования этой статьи:
Могилевич Л.И., Попов В.С., Скородумов Е.С. Динамика сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости, взаимодействующего с упругой пластиной // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №1
Выполнено при поддержке грантов РФФИ №15-01-01604-а и №16-01- 00175а

УДК 681.03.06:531.383:532.516

ДИНАМИКА СДАВЛИВАЕМОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С УПРУГОЙ ПЛАСТИНОЙ

Могилевич Л.И.[1], Попов В.С.[2], Скородумов Е.С.[3]
[1] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, mogilevich@sgu.ru
[2] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, vic_p@bk.ru
[3] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, evgen_rgot@mail.ru

THE DYNAMICS OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID CONSTRACTED LAYER, INTERACTING WITH ELASTIC WALLS

Mogilevich L.I.[1], Popov V.S.[2], Skorodumov E.S.[3]
[1] Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, mogilevich@sgu.ru
[2] Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, vic_p@bk.ru
[3] Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, evgen_rgot@mail.ru

Аннотация. Задача динамики демпферов и опор с тонким слоем вязкой несжимаемой жидкости рассматривается при взаимодействии его с упругим статором. Он может быть упругой пластиной в виде балки-полоски. Вибратор может быть как упругим, так и абсолютно твёрдым. В этой задаче имеются источники движения систем «жидкость - упругое тело». Для выявления динамических характеристик систем необходимо решать связанные задачи динамики упругих пластин и вязкой несжимаемой жидкости. Упрощающими задачу факторами являются малость толщины слоя жидкости по сравнению с линейным размером пластинки, как в теории смазки. В получающейся задаче гидроупругости вводится ещё предположение о малости амплитуды перемещений статора по сравнению с толщиной слоя жидкости, но не с толщиной пластинки. В этих условиях уравнения гидродинамики линеаризуются. Уравнения динамики упругих элементов остаются нелинейными, если таковыми были изначально. При отсутствии возможности найти точное решение, применяется метод итерации для решения уравнений гидродинамической теории смазки.

Ключевые слова: вязкая жидкость, упругие пластинки, колебания, волны.

Abstract. The problem of damping and basis dynamics of viscous incompressible liquid is considered under interaction with an elastic stator. It may take the form of an elastic plate of a beam-stripe type A vibrator may be elastic or absolutely solid. This problem contains the systems “liquid – elastic body” movement sources. To reveal dynamic characteristics of these systems, it is necessary to solve the connected problems of an elastic plate and viscous incompressible liquid dynamics. The factor, making the problem simpler, is a small thickness of liquid layer in comparison with a linear size of the plate, as in lubrication theory. The problem under consideration contains this supposition about a small size of stator’s movements amplitude in comparison with liquid layer thickness, but not with a plates thickness. Under these conditions hydrodynamics equations become linear. The elastic elements dynamics equations remain non-liner, if they were such initially. If it is not possible to find the exact solution, the iteration method for solving the lubrication theory hydrodynamics equations applied.

Keywords: viscous liquid, elastic plates, oscillations, waves.

Задачи взаимодействия идеальной жидкости с упругими пластинами составляют одно из важных направлений аэрогидроупругости [1]. При этом основное внимание уделяется рассмотрению гидроупругих колебаний системы жидкость-пластина. Например, колебания круглой пластины на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости, находящейся в цилиндрическом резервуаре исследованы в [2]. Математическое моделирование и экспериментальное исследование колебаний пластин, погруженных в идеальную несжимаемую жидкость со свободной поверхностью, проведено в [3,4]. В [5] рассмотрена плоская задача излучения пластиной акустических волн в идеальной сжимаемой жидкости за счет вынужденных колебаний пластины, контактирующей с одной стороны с жидкостью. В [6,7] изучены свободные колебания консольно закрепленных пластин, частично погруженных в идеальную несжимаемую жидкость со свободной поверхностью. В [8] проведено исследование собственных колебаний прямоугольных пластин полностью погруженных в неподвижную идеальную жидкость или плавающих на ее свободной поверхности. В [9] проведено аналогичное исследование для случая взаимодействия пластин с потоком идеальной жидкости, а также найдены критические скорости потока соответствующие потери устойчивости.

Однако, в указанных работах при изучении гидроупругих колебаний не учитывается демпфирование обусловленное вязкостью жидкости. В [10,11] рассмотрены вопросы взаимодействия слоя вязкой жидкости с упругозакпрепленной стенкой плоского или клиновидного канала. В [12-15] рассмотрены различные постановки и решения задач о гидроупругих колебаниях балок, взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкостью. В [16-19] исследованы вопросы гидроупругих колебаний пластин, взаимодействующих со штампом через слой вязкой жидкости при пульсации последней и в условиях вибрации основания. Исследованию гидроупругих колебаний пластин, установленных на упругом основании Винклера и взаимодействующих со слоем вязкой несжимаемой жидкости посвящены работы [20-23]. Проблемы вынужденных гидроупругих колебаний ребристых пластин, взаимодействующих с абсолютно твердым штампом через слой вязкой

жидкости исследованы в [24-26]. Аналогичные задачи для трехслойных стержней и пластин рассмотрены в работах [27-30]. Гидроупругие колебания оболочки, заполненной пульсирующей вязкой несжимаемой жидкостью исследованы в [31].

Проведенные исследования показали, что в случае использования линейной теории пластин и заданных гармонических по времени воздействиях на систему, решение задачи гидроупругих колебаний может определяться в виде гармонической зависимости всех ее параметров по времени. Это возможно в силу наличия в колебательной системе демпфирования, обусловленного учетом вязкости жидкости, что приводит к быстрому затуханию по времени решения из-за начальных условий и выходу на установившиеся вынужденные колебания [32]. В указанном выше случае, становится возможным найти точные решения линеаризованных уравнений механики жидкости, записанных в виде уравнений теории смазки, но с учётом локального члена инерции для любых значений колебательного (смазочного) числа Рейнольдса оставаясь в рамках ламинарного движения.

В рассмотренных выше работах нормальное напряжение жидкости (давление) на поверхности упругого тела оказываются значительно больше касательного напряжения и последним обычно пренебрегают.

В предлагаемой работе, рассмотрим возможность получения приближённого значения решения уравнений динамики жидкости методом итерации, пренебрегая на первом шаге локальным членом инерции и учитывая его на втором шаге итерации. При этом можно доказать, что метод итерации сходится при условии, что колебательное число Рейнольдса меньше единицы [12]. Этот подход позволяет отказаться от требования гармонического закона по времени всех параметров жидкости и упругих элементов. Появляется возможность решать нелинейные уравнения динамики пластин или при негармонических законах изменения по времени источников движения, таких как ускорение, действующее на систему, или перепад давления в жидкости.

На рис. 1 представлена система «жидкость-упругое тело». На этом рисунке представлен вибратор на пружине 1, упругий статор 2 и слой жидкости 3 между ними. Ширина прямоугольной пластины b значительно больше её длины $2l$ ($b>>2l$) и рассматривается плоская задача для балки-полоски 2. Для балки-полоски предполагается, что толщина слоя 3 значительно меньше длины пластинки 2, то есть $\delta_0 << 2l$ и вводится малый параметр задачи $\psi = \delta_0 / l << 1$. Амплитуда колебаний вибратора 1 (см. рис. 1) предполагается значительно меньше толщины слоя жидкости 3, то есть вводится малый параметр $\lambda = z_m / \delta_0 << 1$. Прогиб упругих элементов 2 значительно меньше толщины слоя жидкости 3, то есть $W << \delta_0$ и $W / \delta_0 = O(\lambda)$, порядка λ.

Рассмотрим постановку решения задачи гидродинамики слоя жидкости, взаимодействующего с жёстким штампом (вибратором) и упругой пластинкой (в том числе трёхслойной или ребристой со стороны, не контактирующей с жидкостью) в условиях вибрации основания. Все тела заключены в едином

корпусе, имеющем справа и слева торцевые полости, заполненные той же жидкостью, что и жидкость между штампом и пластиной. Давление жидкости в правой и левой полости p_0, а истечение жидкости на торцах можно считать свободным.

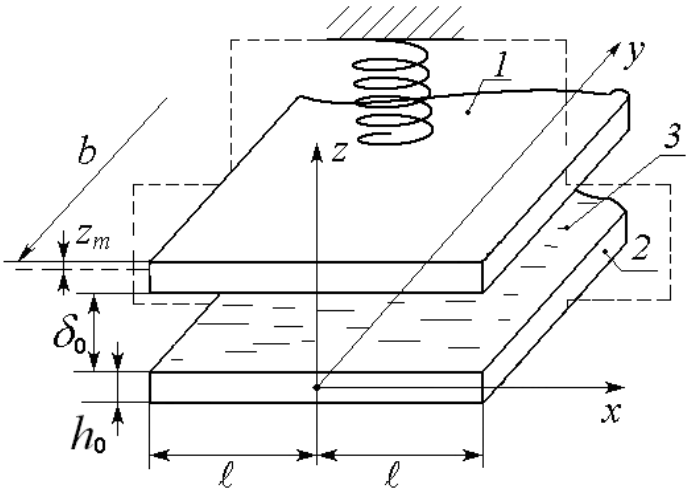

Рис 1

Штамп может перемещаться в вертикальном направлении за счёт наличия упругой связи (пружина или магнитный подвес) с корпусом. При этом частота колебаний штампа ω, а амплитуда его колебаний z_m. Сторона статора-пластины, соприкасающаяся с жидкостью, является плоской. Условия опирания пластины на торцах могут быть свободными или жёсткими.

Следует отметить, что эта задача полностью аналогична задаче гидроупругости для кольцевого сечения соосных цилиндров, один из которых – упругая оболочка, а другой – абсолютно твёрдый цилиндр [33,34].

Пусть закон движения вибрирующего основания представляется в виде:

$$z_0 = E_z f_0(\omega t),\ f_0(\omega t) = \sin \omega t\,. \qquad (1)$$

Тогда ускорение вибрирующего основания можно записать так:

$$\ddot{z}_0 = E_z \frac{d^2 f_0}{dt^2} = -E_z \omega^2 f_0(\omega t)\,. \qquad (2)$$

Здесь E_Z – амплитуда колебаний основания; $\omega = 1/t_0$ – частота вибрации, t_0 - характерное время; t - время; точка сверху - производная по времени.

Принимая во внимание, что $b>>2l$ далее рассмотрим плоскую задачу в системе координат $Oxyz$ с центром в срединной плоскости пластины.

Со стороны жидкости на пластину действует нормальное напряжение q_n и касательное напряжение q_x, которые определяются формулами:

$$q_n = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_z}{\partial z} \text{ при } z = W + \frac{h_0}{2},$$

$$q_x = \rho\nu\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \text{ при } z = W + \frac{h_0}{2}. \qquad (3)$$

На твердый штамп действует сила со стороны жидкости:

$$N = -b\int_{-l}^{l} q_n dx \text{ при } z = \frac{h_0}{2} + \delta_0 + z_m f_z(\omega t), \tag{4}$$

а закон его движения имеет вид $z = \delta_0 + z_m f_z(\omega t)$.

Здесь p – давление; V_x, V_Z – проекции скорости на оси Ox и Oz; ρ – плотность; ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости согласно [35] записываются в виде

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right),$$

$$\ddot{z}_0 + \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x\frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Уравнения динамики жидкости дополняются условием прилипания жидкости к стенкам канала

$$V_x = 0,\ V_z = \dot{z} \text{ при } z = \frac{h_0}{2} + \delta_0 + z_m f_z(\omega t),$$

$$V_x = \frac{\partial U}{\partial t},\ V_z = \frac{\partial W}{\partial t} \text{ при } z = \frac{h_0}{2} + W,$$

и условиями свободного истечения жидкости в торцы

$$p = p_0 - \rho\ddot{z}_0\left(z - \frac{h_0}{2} - \delta_0 - z_m f_z(\omega t)\right) \text{ при } x = \pm l. \tag{6}$$

Здесь U – упругое перемещение пластинки в направлении оси x; W –прогиб; точки сверху означают производные по t.

Введем безразмерные переменные

$$\zeta = \frac{z - h_0/2}{\delta_0},\ \xi = \frac{x}{l}, \tau = \omega t, U = u_m U_1,\ W = w_m U_3,$$

$$p = p_0 - \rho\ddot{z}_0\left(z - \frac{h_0}{2} - \delta_0 - z_m f_z(\omega t)\right) + \frac{\rho\nu z_m\omega}{\delta_0\psi^2}P, \tag{7}$$

$$V_x = \frac{z_m\omega}{\psi}U_\xi,\ V_z = z_m\omega U_\zeta,\ \psi = \frac{\delta_0}{l} << 1,\ \lambda = \frac{z_m}{\delta_0} << 1,$$

где u_m, w_m - амплитуды упругих перемещений пластины. ψ - относительная толщина слоя вязкой жидкости; λ - относительная амплитуда колебаний вибратора; $w_m / z_m = o(1)$.

Подставляя (7) в (4) – (6) и отбрасывая, малые по сравнению с единицей члены порядка ψ и λ будем иметь уравнения

$$\frac{\delta_0^2\omega}{\nu}\frac{\partial U_\xi}{\partial\tau}+\frac{\partial P}{\partial\xi}=\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial\zeta^2},\quad \frac{\partial P}{\partial\zeta}=0,\quad \frac{\partial U_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial U_\zeta}{\partial\zeta}=0, \tag{8}$$

и граничные условия

$$U_\xi=0,\ U_\zeta=\frac{df_z}{\partial\tau}\ \text{при}\ \zeta=1,\ U_\xi=0,\ U_\zeta=\frac{w_m}{z_m}\frac{U_3}{\partial\tau},\ \text{при}\ \zeta=0,$$

$$P=0\ \text{при}\ \xi=\pm1;\ \frac{\partial P}{\partial\xi}=0\ \text{при}\ \xi=0. \tag{9}$$

При этом

$$q_{zz}=q_n=-p_0-\rho\delta_0\ddot{z}_0-\frac{\rho l z_m\omega^2}{\mathrm{Re}\psi}P\ \text{при}\ \zeta=0,$$

$$q_{zx}=q_x=\frac{\rho\, l z_m\omega^2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta},\ \text{при}\ \zeta=0. \tag{10}$$

Здесь $\delta_0^2\omega/\nu=\mathrm{Re}$ - колебательное (смазочное) число Рейнольдса

Для гармонических по времени решений из (8), (9) получаем

$$P=\frac{1}{2}(\xi^2-1)\left[2\varepsilon^2\alpha(\omega)\frac{d^2 f_z}{\partial\tau^2}12\gamma(\omega)\frac{df_z}{\partial\tau}\right]+$$

$$+\frac{w_m}{z_m}\int_\xi^1\int\left[2\varepsilon^2\alpha(\omega)\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2}+12\gamma(\omega)\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi d\xi+ \tag{11}$$

$$+\frac{1}{2}(\xi-1)\frac{w_m}{z_m}\int_{-1}^1\int\left[2\varepsilon^2\alpha(\omega)\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2}+12\gamma(\omega)\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi d\xi,$$

$$\left.\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0}=-\xi\left[\varepsilon^2(\alpha-1)\frac{\partial^2 f_z}{\partial\tau^2}+6\gamma\frac{\partial f_z}{\partial\tau}\right]+\frac{w_m}{z_m}\int\left[\varepsilon^2(\alpha-1)\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2}+6\gamma\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi-$$

$$-\frac{w_m}{2z_m}\int_{-1}^1\int\left[\varepsilon^2(\alpha-1)\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2}+6\gamma\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi d\xi,$$

где $2\varepsilon^2=\delta_0^2\omega/\nu=\mathrm{Re}$.

$$\gamma(\omega)=\frac{1}{6}\frac{\varepsilon^3(sh\varepsilon-\sin\varepsilon)}{\varepsilon^3(ch\varepsilon+\cos\varepsilon)-2\varepsilon(sh\varepsilon+\sin\varepsilon)+2(ch\varepsilon-\cos\varepsilon)},$$

$$\alpha(\omega)=\frac{\varepsilon\left[\varepsilon(ch\varepsilon+\cos\varepsilon)-(sh\varepsilon+\sin\varepsilon)\right]}{\varepsilon^2(ch\varepsilon+\cos\varepsilon)-2\varepsilon(sh\varepsilon+\sin\varepsilon)+(ch\varepsilon-\cos\varepsilon)}.$$

Отметим, что

$$\alpha=1.2\ \text{и}\ \gamma=1\ \text{при}\ \varepsilon\to0;\ \alpha=1;\ \alpha-1=1/\varepsilon;\ \gamma=\varepsilon/6\ \text{при}\ \varepsilon>4. \tag{12}$$

В этом случае имеем

$$q_{zz}=q_n=-p_0(\tau)-p\delta_0\omega^2\frac{d^2 z_0}{\partial\tau^2}-\frac{\rho l\omega^2 z_m}{\mathrm{Re}\psi}\left\{\frac{1}{2}\left(\xi^2-1\right)\left[2\varepsilon^2\alpha(\omega)\frac{d^2 f_z}{d\tau^2}+12\gamma(\omega)\frac{df_z}{d\tau}\right]+\right.$$

ISSN 2541-9269

$$+\frac{w_m}{z_m}\int_{\xi}^{1}\int\left[2\varepsilon^2\alpha(\omega)\frac{\partial 2U_3}{\partial\tau^2}+12\gamma(\omega)\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}(\xi-1)\frac{w_m}{z_m}\int_{-1}^{1}\int\left[2\varepsilon^2\alpha(\omega)\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2}+12\gamma(\omega)\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi d\xi\Bigg\}$$

$$q_{zx}\big|_{\zeta=0}=q_x\big|_{\zeta=0}=\frac{\rho l\omega^2 z_m}{\mathrm{Re}}\Bigg\{-\xi\left(\varepsilon^2(\alpha-1)\frac{d^2 f_z}{d\tau^2}+6\gamma\frac{df_z}{d\tau}\right)+\frac{w_m}{z_m}\int\left[\varepsilon^2(\alpha-1)\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2}+\right.$$

$$\left.+6\gamma\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi-\frac{w_m}{2z_m}\cdot\int_{-1}^{1}\int\left[\varepsilon^2(\alpha-1)\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2}+6\gamma(\omega)\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi d\xi\Bigg\}.$$

Следует отметить, что если учесть граничные условия $\partial P/\partial\xi=0$ при $\xi=0$ в (9) оставив $P=0$ при $\xi=1$, получим более простую формулу

$$P=\frac{1}{2}\left(\xi^2-1\right)\left[2\varepsilon^2\alpha(\omega)\frac{d^2 f_z}{d\tau^2}+12\gamma(\omega)\frac{df_z}{d\tau}\right]+$$

$$+\frac{w_m}{z_m}\int_{\xi}^{1}\int_{0}^{\xi}\left[2\varepsilon^2\alpha(\omega)\frac{\partial 2U_3}{\partial\tau^2}+12\gamma(\omega)\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi d\xi$$

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=0}=-\xi\left[\varepsilon^2(\alpha-1)\frac{d^2 f_z}{d\tau^2}+6\gamma\frac{df_z}{d\tau}\right]+\frac{w_m}{z_m}\int_{0}^{\xi}\left[2\varepsilon^2(\alpha-1)\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2}+6\gamma\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi.$$

Это решение симметричной по ξ задачи, при этом без верхнего и нижнего пределов интеграла не обойтись.

Следует отметить, что обычно q_x вместе с продольной Даламберовой силой инерции в уравнениях динамики ребристых или трехслойных балок – полосок опускались, как малые величины. Поэтому $\partial U_\xi/\partial\zeta$ не определялась ранее.

Рассмотрим нелинейные уравнения динамики пластины или не гармонические законы виброускорения $\ddot{z}_0(\omega t)$ и начального давления $p_0(t)$. В этом случае получит точные решения (11) невозможно.

Найдем приближенное решение: пусть $\omega=1/t_0$, где t_0 – характерное время процессов. Применим метод итерации для задачи (8), (9). На первом шаге, считая $\delta_0^2\omega/\nu=\mathrm{Re}$ – малым, опустим локальный член инерции в первом управлении (8), получим уравнения теории гидродинамической смазки

$$\frac{\partial P}{\partial\xi}=\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial\xi^2},\ \frac{\partial P}{\partial\zeta}=0,\ \frac{\partial U_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial U_\zeta}{\partial\zeta}=0. \qquad (13)$$

Решение уравнений (13) с граничными условиями (9) имеет вид

$$P=\frac{1}{2}\left(\xi^2-1\right)12\frac{df_z}{d\tau}+\frac{w_m}{z_m}\int_{\xi}^{1}\int 12\frac{\partial U_3}{\partial\tau}d\xi d\xi+\frac{w_m}{2z_m}(\xi-1)\int_{-1}^{1}\int 12\frac{\partial U_3}{\partial\tau}d\xi d\xi,$$

$$U_\xi = \frac{1}{2}\left(\zeta^2 - \zeta\right)\left[12\xi\frac{df_z}{d\tau} - \frac{w_m}{z_m}\int 12\frac{\partial U_3}{\partial\tau}d_\xi + \frac{w_m}{z_m}\int_{-1}^{1}\int 6\frac{\partial U_3}{\partial\tau}d\xi d\xi\right],$$

$$U_\zeta = \frac{1}{12}\left(3\zeta^2 - 2\zeta^3\right)\left(12\frac{df_z}{d\tau} - \frac{w_m}{z_m}12\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right) + \frac{w_m}{z_m}\frac{\partial U_3}{\partial\tau}. \qquad (14)$$

На втором шаге итерации $\partial U_\xi / \partial\tau$ из (14) подставляем в (8) и, решая неоднородные уравнения, находим, с учетом условия (9)

$$P = \frac{1}{2}\left(\xi^2 - 1\right)\left[2\varepsilon^2\frac{6}{5}\frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 12\frac{df_z}{d\tau}\right] + \frac{w_m}{z_m}\int_{\xi}^{1}\int\left[2\varepsilon^2\frac{6}{5}\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2} + 12\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi d\xi +$$

$$+\frac{w_m}{2z_m}(\xi - 1)\int_{-1}^{1}\int\left[2\varepsilon^2\frac{6}{5}\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2} + 12\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi d\xi,$$

$$\left.\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0} = -\xi\left[2\varepsilon^2\frac{1}{10}\frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 6\frac{df_z}{d\tau}\right] + \frac{w_m}{z_m}\int\left[2\varepsilon^2\frac{1}{10}\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2} + 6\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi -$$

$$-\frac{w_m}{2z_m}\int_{-1}^{1}\int\left[\varepsilon^2(\alpha - 1)\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2} + 6\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi d\xi. \qquad (15)$$

Если на втором шаге итерации ввести поправочные частотозависимые коэффициенты α перед локальным членом и γ перед силами трения, то формулы (15) давления совпадает с (11) для давления *P*, а учитывая предельные значения α и γ при $\mathrm{Re} = 2\varepsilon^2 < 1$ и для $\partial U_\xi / \partial\zeta$ вместо (15) можно записать

$$P = \frac{1}{2}\left(\xi^2 - 1\right)\left[2\varepsilon^2\alpha\frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 12\gamma\frac{df_z}{d\tau}\right] + \frac{w_m}{z_m}\int_{\xi}^{1}\int\left[2\varepsilon^2\alpha\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2} + 12\gamma\frac{\partial U_3}{6\partial\tau}\right]d\xi d\xi +$$

$$+\frac{w_m}{2z_m}(\xi - 1)\cdot\int_{-1}^{1}\int\left[2\varepsilon^2\alpha\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2} + 12\gamma\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi d\xi, \qquad (16)$$

$$\left.\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0} = -\xi\left[2\varepsilon^2\frac{\alpha - 1}{2}\frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 6\gamma\frac{df_z}{d\tau}\right] + \frac{w_m}{z_m}\int\left[2\varepsilon^2\frac{\alpha - 1}{2}\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2} + 6\gamma\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi -$$

$$-\frac{w_m}{2z_m}\int_{-1}^{1}\int\left[2\varepsilon^2\frac{\alpha - 1}{2}\frac{\partial^2 U_3}{\partial\tau^2} + 6\gamma\frac{\partial U_3}{\partial\tau}\right]d\xi d\xi.$$

Формулы (16) формально совпали с точным решением (11) для гармонических по времени параметров системы. При этом (16) пригодны для любых видов $\ddot{z}_0$ и p_0 в зависимости от времени $t/t_0 = \omega t$. В этом случае можно решать задачу с начальными условиями по времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №15-01-01604-а и №16-01- 00175а

Литература

1. Горшков А. Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 591 с.
2. Amabili M. Vibrations of Circular Plates Resting on a Sloshing Liquid: Solution of the Fully Coupled Problem // Journal of Sound and Vibration. 2001. Vol. 245. №2. P. 261- 283.
3. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic Vibration of Circular Plates Immersed in a Liquid-filled Container with Free Surface // Journal of Sound and Vibration. 2013. Vol. 332. №12. P. 3064-3085.
4. Haddara M.R., Cao S.A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates // Marine Structures. 1996. V. 9. №10. P. 913-933.
5. Chapmana C.J., Sorokinb S.V. The forced vibration of an elastic plate under significant fluid loading // Journal of Sound and Vibration. 2005. 281. P. 719-741.
6. Ergin A., Ugurlu B. Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid // Journal of Fluids and Structures. 2003. 17. P. 927-939.
7. Kramer, M.R., Liu, Z., Young, Y.L. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water // Composite Structures. 2013. 95. P. 254-263.
8. Kerboua Y., Lakis, A.A. Thomas M., Marcouiller L. Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid // Applied Mathematical Modelling. 2008. 32 (12). P. 2570-2586.
9. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В., Матвеенко В.П. Гидроупругая устойчивость прямоугольной пластины, взаимодействующей со слоем текущей идеальной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 6. С. 108-120.
10. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Kondratov D.V. Mathematical model of pulsating viscous liquid layer movement in a flat channel with elastically fixed wall // Applied Mathematical Sciences. 2014. Т. 8. № 157-160. С. 7899-7908.
11. Popov V.S., Popova A.A., Sokolova D.L. Mathematical modeling of longitudinal oscillations tapered narrow channel wall under pulsating pressure of highly viscous liquid // Applied Mathematical Sciences. 2016. Т. 10. № 53. С. 2627-2635.
12. Андрейченко К.П., Могилевич Л.И. О динамике взаимодействия сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости с упругими стенками // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1982. № 2. С. 162-172.
13. Önsay T. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system // Journal of Sound and Vibration. 1993. Vol. 163. №2. P. 231-259.
14. Akcabay D.T., Young Y.L. Hydroelastic Response and Energy Harvesting Potential of Flexible Piezoelectric Beams in Viscous Flow // Physics of Fluids. 2012, Vol. 24. №5.
15. Faria Cassio T., Inman Daniel J. Modeling energy transport in a cantilevered EulerBernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // Mechanical

Systems and Signal Processing. Vol. 45. №2. 2014. P. 317-329.
16. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдавливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №4. С. 23-32.
17. Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. №3. С. 17- 35.
18. Попова А.А. Математическое моделирование динамических процессов в виброопоре с упругими элементами конструкции // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. Т. 1. №4. С. 25-31.
19. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. №78.
20. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Christoforova A.V. Mathematical modeling of highly viscous liquid dynamic interaction with walls of channel on elastic foundation // IEEE Conference 2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Omsk, 2016).
21. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Christoforova A.V. Mathematical modeling of hydroelastic walls oscillations of the channel on winkler foundation under vibrations // В сборнике: Vibroengineering Procedia 22, Dynamics of Strongly Nonlinear Systems. Сер. "22nd International Conference on Vibroengineering" 2016. С. 294-299.
22. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование динамики взаимодействия сильновязкой жидкости со стенками канала, установленного на упругом основании // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. Т. 3. № 1. С. 350-354.
23. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия пульсирующей вязкой жидкости со стенками щелевого канала, установленного на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 1. С. 15-23.
24. Могилевич Л.И., Попова А.А. Динамическая задача гидроупругости виброопоры с упругой ребристой пластиной // Наука и техника транспорта. 2007. № 4. С. 55-61.
25. Попова А.А. Математическое моделирование процессов взаимодействия вязкой жидкости с тонкостенными ребристыми элементами гидродинамических демпферов и трубопроводов: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Саратов, 2008. 32 с.
26. Попова А.А. Математическое моделирование процессов взаимодействия вязкой жидкости с тонкостенными ребристыми элементами

гидродинамических демпферов и трубопроводов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Саратовский государственный технический университет. Саратов, 2008. 174 с.

27. Попов В.С., Могилевич Л.И., Старовойтов Э.И. Гидроупругость виброопры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56-63.
28. Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование взаимодействия жидкости с трехслойной пластиной со сжимаемым заполнителем // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. 2016. № 3 (85). С. 63-64.
29. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попова А.А. Математическое моделирование гидроупругих колебаний трехслойного элемента опоры с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 1. С. 24-32.
30. Агеев Р. В., Могилевич Л. И., Попов В. С. Колебание стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 3-11.
31. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64-72.
32. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.
33. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И. Исследование амплитудных частотных характеристик колебаний упругих стенок трубы кольцевого профиля при пульсирующем движении вязкой жидкости в условиях жесткого защемления по торцам // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. №3. С. 15-21.
34. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при свободном торцевом истечении в условиях вибрации // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. Т. 3. № 1 (26). С. 22-31.
35. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа - М.: Дрофа. 2003.-840 с.