

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/12-39](http://mathmod.esrae.ru/12-39)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Майорова О.А., Сопенко А.А., Тебякин А.Д. Математическое моделирование сложных колебаний нелинейной пологой оболочки в задаче связанной термоупругости // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №2

УДК 539.3;543.1

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ В ЗАДАЧЕ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Майорова О.А.<sup>1</sup>, Сопенко А.А.<sup>2</sup>, Тебякин А.Д.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Саратовский государственный технический университет  
имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, lebedoksa95@gmail.com

<sup>2</sup> Саратовский государственный технический университет  
имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, saasar@mail.ru

<sup>3</sup> Саратовский государственный технический университет  
имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, prototype9235@mail.ru

## MATHEMATICAL MODELLING OF COMPLEX OSCILLATIONS NONLINEAR SHALLOW SHELL IN COUPLED THERMOELASTICITY PROBLEM

Mayorova O.A.<sup>1</sup>, Sopenko A.A.<sup>2</sup>, Tebyakin A.D.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,  
Russia, Saratov, lebedoksa95@gmail.com

<sup>2</sup> Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,  
Russia, Saratov, saasar@mail.ru

<sup>3</sup> Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,  
Russia, Saratov, prototype9235@mail.ru

**Аннотация.** Рассматриваются колебания прямоугольной в плане геометрически нелинейной пологой оболочки при её нагружении переменной во времени поперечной нагрузкой и различными тепловыми нагрузками. Учитывается связанность деформаций и температуры. Используются уравнения, полученные в рамках модели Кирхгофа-Лява.

**Ключевые слова:** нелинейная полая оболочка, сложные колебания, хаотические колебания, поперечная нагрузка, тепловая нагрузка, связанная термоупругость.

**Abstract.** The paper deals with the oscillations of geometrically nonlinear shallow shell of rectangular planform to time-dependent transverse loading and different heat loading. Coupled thermo-elasticity and Kirchhoff-Love model are considered.

**Keywords:** nonlinear shallow shell, complex vibrations, chaotic vibrations, transverse loading, heat loading, coupled thermo-elasticity.

В настоящее время значительно расширился круг задач, в которых рассматриваются сложные колебания конструкций под действием переменных во времени нагрузок. Рост возможностей вычислительной техники позволяет рассматривать большое количество различных конструкций, учитывать различные модели, различные варианты нагружения конструкций и пр. Влияние эффекта связанности деформаций и температуры на колебания конструкций так же неоднократно рассматривалось в научных исследованиях в последние годы, укажем, например, работы [1, 2]. Если в [1] внимание большей частью уделяется исследованию напряжённо-деформированного состояния (НДС) конструкций на незначительном временном интервале, когда колебания ещё нельзя назвать установившимися, то в [2] получены уравнения, описывающие связанную задачу термоупругости для моделей Тимошенко и Шереметьева-Пелеха. При этом трехмерное уравнение теплопроводности рассматривается в нелинейной постановке. Однако приведенные в [2] результаты численного решения задач касаются только балок. Сравниваются результаты, полученные при использовании моделей Эйлера-Бернулли, Тимошенко, Шереметьева-Пелеха для балок без учета связанности и тепловых нагрузок.

В данной работе авторы попытались сравнить результаты численного решения связанной задачи термоупругости для гибкой полой оболочки с результатами решения несвязанных задач, учитывающих тепловое нагружение конструкций в виде теплового удара или конвективного теплообмена с окружающей средой. Используются кинематические уравнения, полученные в рамках модели Кирхгофа-Лява, уравнение теплопроводности рассматривается в трёхмерном виде, зависимость тепловых и физических констант от температуры не рассматривалась.

Система уравнений, полученная в смешанной форме для геометрически нелинейной полой прямоугольной в плане оболочки широко известна и приводится ниже в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12(1-\nu^2)} \nabla^4 w - L(w, F) - \nabla_k^2 F +_2 + k(\ddot{w} + \varepsilon \dot{w}) &= 0, \\ \nabla^4 F + \nabla_k^2 w + \frac{1}{2} L(w, w) &= 0, \\ \frac{h^2}{a^2} \theta_{x_1 x_1} + \frac{h^2}{b^2} \theta_{x_2 x_2} + \theta_{x_3 x_3} &= \dot{\theta} + \frac{T_0 E \alpha_T^2}{3(1-2\nu) \rho h^2} \dot{e} \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k = \frac{a^2 b^2 \rho}{Eh^6}$ .

Здесь  $F$  - функция усилий,  $w$  - прогиб в направлении, перпендикулярном срединной поверхности,  $a, b, h$  - размеры оболочки,  $E$  и  $\nu$  - модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $\rho$  - плотность,  $\theta$  - приращение температуры,  $\theta = T - T_0$ ,  $\alpha_T$  - коэффициент линейного теплового расширения,  $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$  - объёмное расширение. Остальные обозначения, в том числе для известных дифференциальных операторов, приводятся в [3].

Используя известные физические и геометрические соотношения, выразим объёмное расширение  $e$  через искомые функции. Переходя к безразмерным переменным, получим

$$e = (1 - 2\nu)(\lambda^{-1}F_{x_1x_1} + \lambda F_{x_2x_2} + 2N_T) - \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}x_3(\lambda^{-1}W_{x_1x_1} + \lambda W_{x_2x_2}) + \frac{1 + \nu}{1 - \nu}\theta. \quad (2)$$

Подставляя значение  $e$  в уравнение теплопроводности, приводим последнее к окончательному виду

$$\frac{h^2}{a^2}\theta_{x_1x_1} + \frac{h^2}{b^2}\theta_{x_2x_2} + \theta_{x_3x_3} = \left(1 + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \cdot \frac{T_0 \alpha_T^2 E}{3(1 - 2\nu)c}\right) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{T_0 \alpha_T^2 E}{3(1 - 2\nu)c} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \lambda^{-1}F_{x_1x_1} + \lambda F_{x_2x_2} + 2N_T - \frac{x_3}{1 - \nu} (\lambda^{-1}W_{x_1x_1} + \lambda W_{x_2x_2}) \right), \quad (3)$$

где  $c$  - удельная теплоёмкость,  $\frac{\partial}{\partial \tau}$  - дифференцирование по времени.

В начальный момент времени оболочка находится в покое, поэтому в качестве начальных условий примем соотношения  $w|_{t=0} = 0$ ,  $\dot{w}|_{t=0} = 0$ .

По контуру оболочка опирается на гибкие, нерастяжимые в касательной плоскости рёбра; для края  $x_1 = 0; 1$  граничные условия имеют вид

$$w = \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad \varepsilon_{22} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} = 0. \quad (4)$$

На оболочку на поверхности  $z = -\frac{h}{2}$  воздействует равномерно распределённая по плану нагрузка интенсивности  $q = q_0 \sin \omega t$ , где частота  $\omega$  выбиралась близкой к частоте собственных колебаний конструкции.

В качестве граничных условий уравнения теплопроводности (3) при учёте связанности деформаций и температуры рассматривалась полная теплоизоляция оболочки, т.е. на каждой грани оболочки принималось условие

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} = 0, \quad (5)$$

где  $\bar{n}$  - внешняя нормаль к границе.

Ожидалось (и дальнейшие работы это подтвердили), что влияние эффекта связанности на разогрев оболочки не будет значительным, поэтому при учёте внешних тепловых нагрузок эффект связанности не рассматривается. В качестве таких тепловых нагрузок рассматривался тепловой удар постоянной интенсивности во времени на поверхности  $z = -h/2$  с теплоизоляцией остальных граней оболочки

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} = q_T \quad (6)$$

или конвективный теплообмен на поверхности  $z = -h/2$  с теплоизоляцией остальных поверхностей

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{n}} = k_B (\theta - \theta_{cp}), \quad (7)$$

где  $\theta_{cp}$  - температура среды,  $k_B$  - коэффициент, определяющий интенсивность теплообмена с окружающей средой.

Безразмерные переменные для системы (1) вводились следующим образом (чёрточки сверху, опущенные для удобства в (1), здесь стоят над безразмерными переменными):

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{b}, \quad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{h}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{F} = \frac{F}{Eh^3}, \quad \bar{\lambda} = \frac{a}{b}, \quad \bar{t} = \frac{t \cdot \alpha}{h^2}, \quad (8)$$

$$\bar{q} = q \frac{a^2 b^2}{Eh^4}, \quad \bar{k}_1 = k_1 \frac{a^2}{h}, \quad \bar{k}_2 = k_2 \frac{b^2}{h}, \quad \bar{\theta} = \theta \frac{\alpha_T ab}{h^2}, \quad \bar{q}_T = q_T \frac{ab \alpha_T}{hk_T}.$$

Алгоритм численного решения (1) изложен в [4], укажем только, что был применён метод конечных разностей для дискретизации производных по пространственным переменным, полученные обыкновенные дифференциальные уравнения интегрировались по времени при помощи комбинации явного и неявных методов Адамса, система алгебраических уравнений относительно функции усилий  $F$  решалась на каждом шаге по времени методом Гаусса.

В правой части уравнения теплопроводности (3) находятся слагаемые, содержащие производную по времени от  $F$ ,  $W$  и температурных усилий  $N_T$ . Значения данных слагаемых брались с предыдущих шагов по времени, производная вычислялась при помощи одностороннего конечно разностного соотношения 4-го порядка точности и использовалась для решения уравнения (3) на следующем шаге по времени. Это накладывало большие требования к

устойчивости методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений по времени. После численных экспериментов была использована схема

$$P_4^{\exists} E P_4^I E P_5^I E,$$

где  $P_4^{\exists}, P_4^I$  - получение решения при помощи экстраполяционного (явного) и интерполяционного (неявного) методов Адамса 4-го порядка точности соответственно;  $P_5^I$  - использование интерполяционного метода Адамса 5-го порядка точности;  $E$  - вычисление правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Использование выше приведённой схемы только с двумя первыми указанными итерациями, как в [4], в данной задаче оказалось недостаточным.

При численных расчетах рассматривалась оболочка с физическими параметрами, соответствующими сплаву АМц,  $a = b$ ,  $a/h = 100$ . Безразмерные параметры кривизны  $k_1 = k_2 = 24$ . Собственная частота колебаний данной конструкции составила, согласно численным расчётам, значение  $\omega_0 = 30,125$ . Расчёты проводились при значении частоты возбуждающей силы  $\omega = 32$ .

Результаты, полученные для оболочки с теми же геометрическими и физическими параметрами, но без учёта связанности и тепловых нагрузок, приведены в [4]. Для решения тепловых задач начальная температура материала составляла  $T_0 = 300^\circ K$ . При решении задач с тепловым ударом (6) значение выбиралось таким образом, чтобы оставалось справедливым уравнение теплопроводности, не учитывающее зависимости физических констант материала от температуры. За рассматриваемый интервал времени (400 тыс. шагов) размерное значение приращения температуры  $\theta$  составляло не более  $90^\circ$ , т.е. оставалось справедливым соотношение

$$\frac{T - T_0}{T_0} < \frac{1}{3}.$$

Значение  $\theta_{cp}$  в (7) тоже принималось соответствующее разогреву в  $90^\circ$  и коэффициент пропорциональности в (7) подбирался так, чтобы за рассматриваемое время разогрев оболочки был близок к  $\theta_{cp}$ , составлял от  $\theta_{cp}$  примерно 95%.

Отметим сразу, что действие теплового удара или учёт конвективного теплообмена по отношению к задаче без учёта тепловых нагрузок к появлению качественно новых результатов не привело. Во всех случаях наблюдался переход от гармонических колебаний к хаотическим по сценарию Помо-Манневиля с характерными эффектами перемежаемости форм колебаний.

Во всех случаях с ростом нагрузки  $q$  наблюдался переход от гармонических колебаний к квазипериодическим, затем к хаотическим,

короткий возврат к квазипериодическим, более длинный диапазон  $q$  с хаотическими колебаниями, опять возврат к квазипериодическим колебаниям и окончательное наступление хаоса. Из всех трёх задач (тепловой удар, конвективный теплообмен, без учёта тепловых нагрузок) в случае теплового удара получены самые широкие зоны хаотических колебаний. При расчёте НДС оболочки это может привести при конкретных значениях  $q$  к сильно различающимся результатам. Так в табл.1 приведены зависимости  $w(t)$ , фазовые портреты и спектры мощности, полученные при помощи быстрого преобразования Фурье, для всех трёх задач при  $q = 60$ .

При решении задачи с конвективным теплообменом наблюдаются квазипериодические колебания в диапазоне от  $-1.2$  до  $+2.8$ . В остальных задачах наблюдаются хаотические колебания и максимальное значение прогибов достигает  $+3.5$ , что, несомненно, вызывает существенные расхождения остальных параметров НДС.

В табл.1 так же приведены характеристики колебаний оболочки в тепловых задачах для значения  $q = 100$ . В задаче с конвективным теплообменом наблюдается чуть более раннее наступление фазы окончательных хаотических колебаний. Максимальные прогибы достигают значений  $+6.7$ , тогда как при действии теплового удара они не превышают значений  $+3.8$ .

И, наконец, результаты решений связанной задачи термоупругости приведены в табл.2. Нами не ставилась цель исследования температурных полей, возникающих от воздействия механической нагрузки в оболочке. Отметим только, что все вычислительные эксперименты показали, что изменения температуры от механических нагрузок не превышало  $15^\circ$ , поэтому влияние учёта эффекта связанности явно не велико на фоне внешних тепловых нагрузок. В связи с этим связанные задачи рассматривались без учёта внешних тепловых воздействий при полной теплоизоляции оболочки.

При небольших значениях  $q$  учёт связанности приводит к незначительному изменению амплитуды колебаний, так, при  $q = 50$  максимальные прогибы в несвязанной задаче достигают 2, в связанной 2.3. Формы колебаний несколько различаются, но это связано с тем, что  $q = 50$  является нагрузкой, при которой начинается переход от квазипериодических колебаний к хаотическим. Далее сценарий перехода к необратимым хаотическим колебаниям полностью совпадает со сценариями, наблюдаемыми в задачах без учёта связанности или при учёте внешних тепловых нагрузок. Следует, однако, отметить некоторые эффекты, которые никогда не наблюдались нами в несвязанных задачах.

Учёт этого эффекта иногда приводит к попыткам системы несколько «саморегулироваться». В табл.2 приведены характеристики разных форм колебаний, возникающих при одной и той же нагрузке  $q = 76,8$  на разных

временных окнах внутри прослеживаемого интервала времени. Видно, что в диапазоне  $t \in [80; 100]$  колебания имеют более упорядоченный характер, чем в более раннем интервале. Амплитуды колебаний в эти периоды также сильно отличаются. При  $t > 100$  происходит возврат к хаотической форме колебаний.

Таблица 1

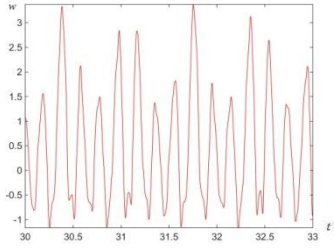
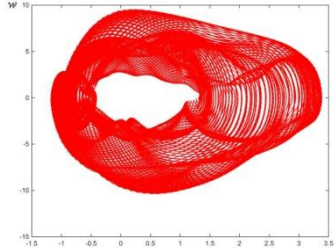
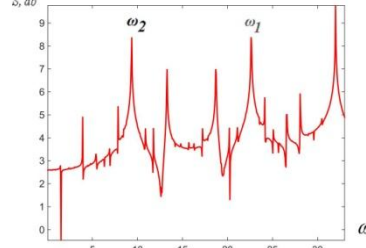
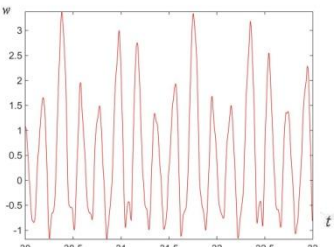
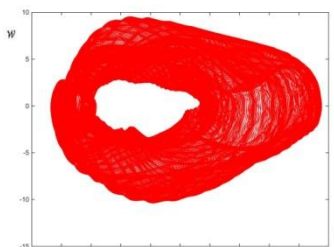
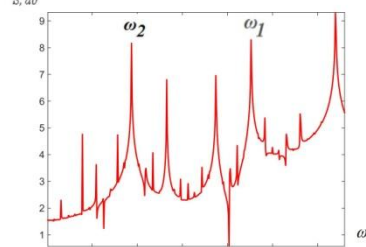
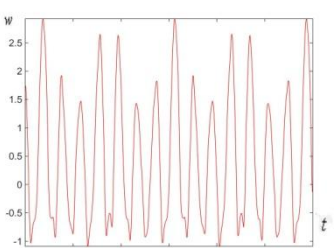
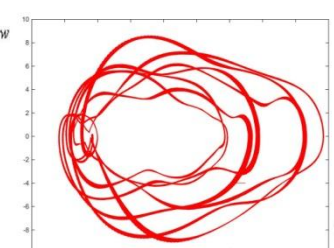
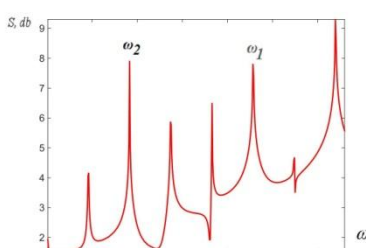
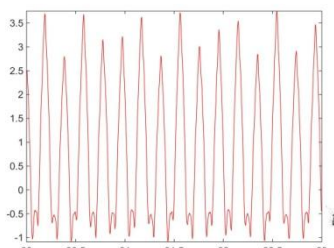
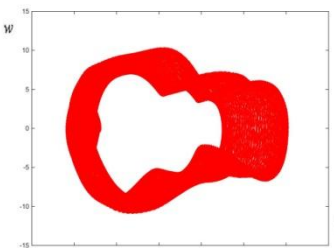
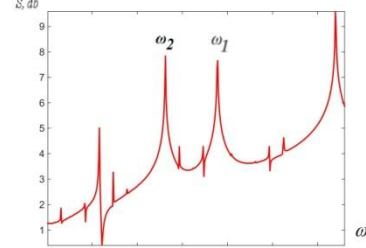
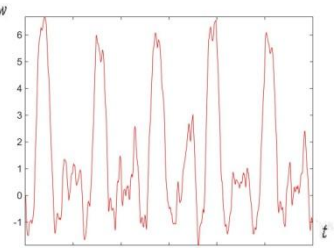
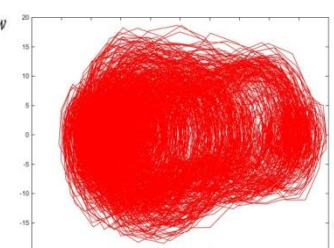
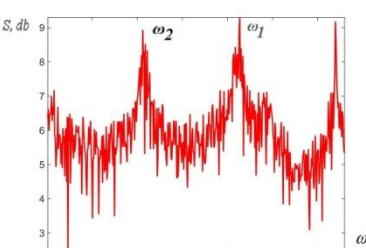
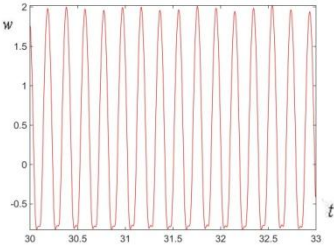
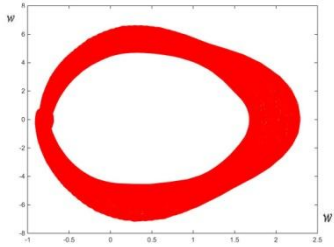
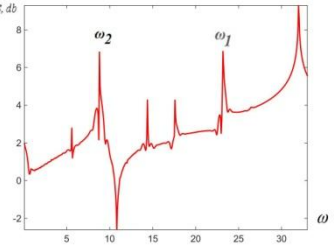
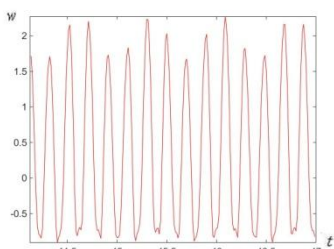
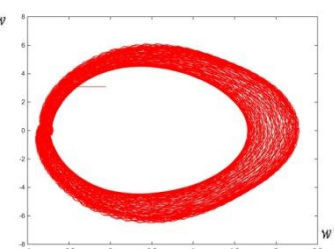
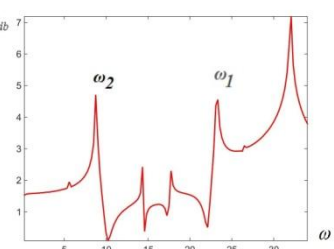
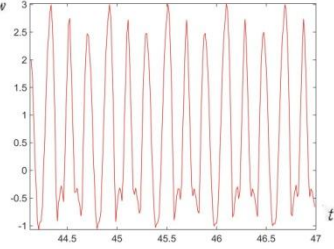
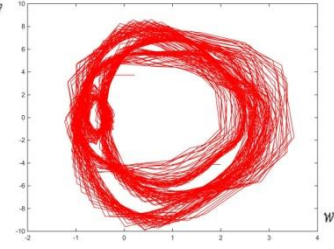
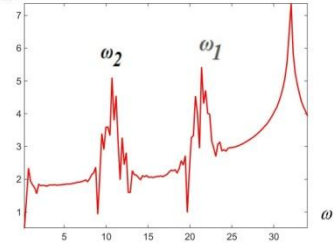
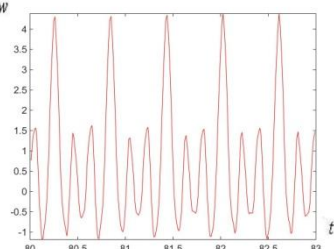
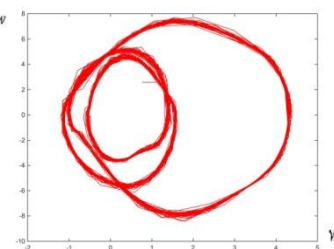
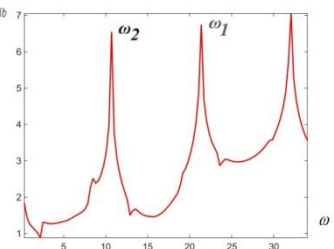
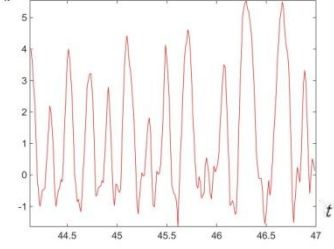
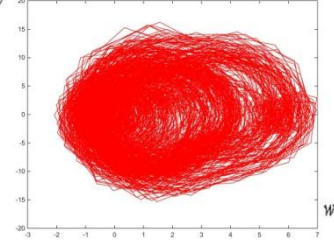
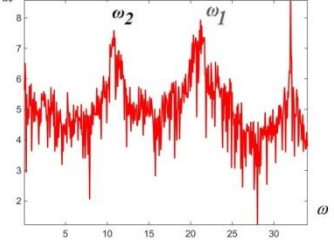
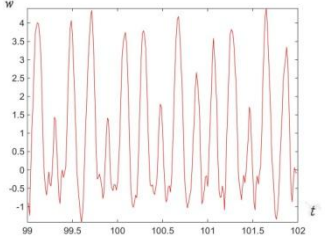
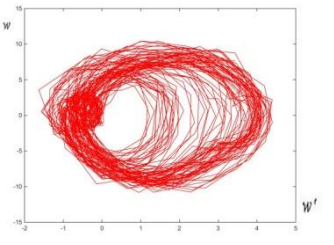
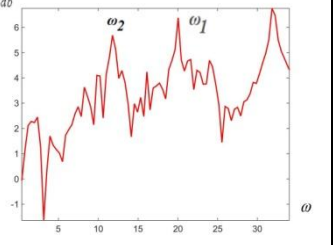
Задача	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности
$q=60$			
Без учета тепловых нагрузок			
Тепловой удар			
Конвективный теплообмен			
$q=100$			
Тепловой удар			
Конвективный теплообмен			

Таблица 2

$q$	$[t_0, t]$	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности
<b>Несвязанная задача</b>				
50	[30; 120]			
<b>Связанная задача</b>				
50	[30; 120]			
76.8	[44.125; 70]			
76.8	[80; 100]			
105	[44.125; 139]			
105	[99; 115]			



Нечто похожее иногда наблюдалось и при других нагрузках. Так, при  $q=105$  (табл.2) наблюдается примерно такое же «окно» во времени, где система пытается несколько упорядочить форму своих колебаний. Амплитуда колебаний в этом «окне» также резко отличается от амплитуды при других значениях  $t$ .

**Выводы.** Учёт связанности полей деформаций и температуры, учёт внешних тепловых нагрузок (тепловой удар, конвективный теплообмен) не оказывает существенного влияния на характер колебаний рассмотренной конструкции, если только реальный разогрев оболочки остаётся в пределах, допустимых для принятой модели. В то же время, учёт эффектов связанности и тепловых нагрузок может оказать существенное влияние на параметры НДС оболочки в расчётах при конкретных нагрузках.

Учёт связанности деформаций и температуры позволяет в некоторых случаях наблюдать эффекты небольшого изменения форм колебаний на прослеживаемом интервале времени. Нечастое наблюдение подобных эффектов вызвано, по-видимому, тем, что само влияние связанности незначительно. С одной стороны, система должна быть «разогнана» до соответствующих амплитуд колебаний, что обеспечивается ростом нагрузки  $q$ , с другой стороны, рост той же нагрузки приводит к незначительности влияния эффектов связанности на фоне внешних нагрузок.

Возможно, что в более сложных моделях колебаний оболочки или для материалов с иными физическими параметрами данный эффект проявится более ярко.

### Литература

1. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Nonclassical Thermoelastic Problems in Nonlinear Dynamics of Shells. Applications of the Bubnov-Galerkin and Finite Difference Numerical Methods. Springer, 2002. 438 p.
2. Awrejcewicz J., Kirichenko V.F., Kirichenko A.F., Krysko A.V., Krysko V. A. On the non-classical mathematical models of coupled problems of thermo-elasticity for multi-layer shallow shells with initial imperfections // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. Vol. 74. P. 51-72.
3. Крысько В.А., Сопенко А.А., Салий Е.В. Сложные колебания геометрически и физически нелинейных пологих оболочек на прямоугольном плане // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10. №1-2. С. 92-103.
4. Майорова О.А., Сопенко А.А., Черепанов М.Д. Сложные колебания геометрически и физически нелинейных пологих оболочек // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 3. С. 26-33. URL: [mathmod.esrae.ru/3-16](http://mathmod.esrae.ru/3-16).