

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/12-41

Ссылка для цитирования этой статьи:

Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И. Волны в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними и окруженные упругой средой // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №2

Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 16-01-00175-а.

УДК 532.516:539.3

ВОЛНЫ В ДВУХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СООСНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ, СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ МЕЖДУ НИМИ И ОКРУЖЕННЫЕ УПРУГОЙ СРЕДОЙ

Евдокимова Е.В.¹, Могилевич Л.И.²

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, eev2106@mail.ru

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, mogilevich@sgu.ru

WAVES IN TWO GEOMETRICALLY NONLINEAR ELASTIC COAXIAL CYLINDRICAL SHELLS, CONTAINING VISCOUS LIQUID BETWEEN THEM AND SURROUNDED BY AN ELASTIC MEDIUM

Evdokimova E.V.¹, Mogilevich L.I.²

¹Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, eev2106@mai.ru

²Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov,
mogilevich@sgu.ru

Аннотация. В современной волновой динамике одним из важных направлений является изучение поведения волн деформаций в упругих оболочках. Известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в виде обобщенных уравнений Кортвега де Вриза (КдВ). Также методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках. Данные модели отличаются от известных учетом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками. Они построены на основе связанных задач гидроупругости, которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, в виде системы обобщенных уравнений КдВ. В представленной статье проведено исследование модели волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических

оболочках Кирхгофа-Лява, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними, окруженных упругой средой, действующих в нормальном, так и в продольном направлении.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки.

Annotation. The investigation of deformation waves behavior in elastic shells is one of the important trends in the contemporary wave dynamics. There exist mathematical models of wave motions in infinitely long geometrically non-linear shells, containing viscous incompressible liquid based on the related hydroelasticity problems, which are derived by the shell dynamics and viscous incompressible liquid equations in the form of generalized Korteweg - de Vries (KdV) equations. In addition, mathematical models of the wave process in infinitely long geometrically non-linear coaxial cylindrical elastic shells are obtained by the perturbation method. These models differ from the known ones by the consideration of incompressible liquid between the shells, based on the related hydroelasticity problems. These problems are described by shell dynamics and viscous incompressible liquid equations with corresponding edge conditions in the form of generalized KdV equation system. The paper presents the investigation of wave occurrences in two geometrically non-linear elastic coaxial cylindrical shells of Kirchhoff-Love type, containing viscous incompressible liquid between them, and surrounded by an elastic Medium, acting in both normal and longitudinal directions.

Keywords: nonlinear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylindrical shells.

В современной волновой динамике одним из важных направлений является изучение поведения волн деформаций в упругих оболочках. Для абсолютно жесткой трубы с круговым сечением ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического по времени перепада давления исследовано в [1]. Для трубы – упругой цилиндрической оболочки – проведено аналогичное исследование в [2-5].

Известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически нелинейных оболочках [6], содержащих вязкую несжимаемую жидкость, на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в виде обобщенных уравнений Кортевега де Вриза (КдВ). Выявлены эффекты влияния вязкой несжимаемой жидкости на поведение волны деформации в оболочке в зависимости от коэффициента Пуассона материала оболочки. В частности, при наличии жидкости в оболочке из неорганических материалов (различные трубопроводы в технологических сооружениях) выявлен экспоненциальный рост амплитуды волны. В случае органического материала (кровеносные сосуды) наличие жидкости приводит к быстрому затуханию волны.

Методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных coaxial цилиндрических упругих оболочках [7], отличающиеся от известных учетом наличия несжимаемой жидкости между оболочками, на основе связанных задач гидроупругости, которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, в виде системы обобщенных

уравнений КдВ. Выявлены эффекты влияния несжимаемой вязкой жидкости между оболочками на поведение волны деформаций в соосных оболочках. Наличие волны деформаций во внешней оболочке приводит к возникновению волны деформаций во внутренней оболочке, которой не было в начальный момент времени, и происходит «перекачка энергии» (через слой жидкости) от внешней оболочки к внутренней, которая сопровождается немонотонным падением амплитуды волны во внешней оболочке и, как следствие, немонотонным снижением скорости её распространения. При этом во внутренней оболочке происходит немонотонное увеличение амплитуды. Вследствие колебаний амплитуд и скоростей с течением времени их скорости и амплитуды выравниваются.

Рассмотрим две соосные бесконечно длинные упругие оболочки на рис.1, между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость. Введем следующие обозначения: δ - ширина щели, занимаемой жидкостью, $R_1 = R^{(1)} - \frac{h_0^{(1)}}{2}$ - внутренний радиус внешней оболочки; $R_2 = R^{(2)} + \frac{h_0^{(2)}}{2}$ - внешний радиус внутренней оболочки; $R_3 = R^{(2)} - \frac{h_0^{(2)}}{2}$ - внутренний радиус внутренней оболочки, $R^{(1)}, R^{(2)}$ - радиусы срединных поверхностей внешней и внутренней оболочек; $h_0^{(1)}, h_0^{(2)}$ - их толщина, ρ - плотность жидкости, p - давление в жидкости; ν - кинематический коэффициент вязкости. Все механические перемещения внутренней оболочки обозначены индексом (2) сверху, а внешней – индексы (1).

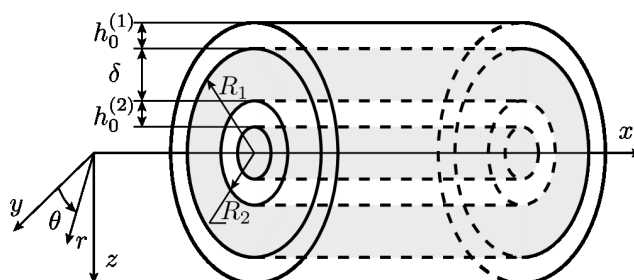


Рис.1

Записывая уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Киргофа-Лява, считаем материал упругим с линейной зависимостью интенсивности напряжения σ_i от интенсивности деформацией e_i [9]

$$\sigma_i = E e_i$$

где E – модуль Юнга.

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат (r, θ, x) в случае осесимметричного течения [8] записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right) \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

На границе оболочек и жидкости на рис. 1 при $r=R_i-W^{(i)}$ выполняются условия прилипания жидкости [8]

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}, \quad V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} \quad (2)$$

Здесь $U^{(i)}$ - продольное упругое перемещение оболочки по оси x ; $W^{(i)}$ - прогиб оболочки, положительный к центру кривизны; t - время; p - давление; ρ - плотность, ν - кинематический коэффициент вязкости жидкости; V_x, V_r - проекция на оси цилиндрической системы координат вектора скорости; x, r - цилиндрические координаты.

Уравнения динамики оболочки записываются в виде [10]

$$\begin{aligned} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \left[U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]_x - \rho_0 h_0^{(i)} U_{tt}^{(i)} - \\ \left[k_3 R^{(i)2} \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^4} U^{(i)} - k_4 \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^2 R^{(i)2}} U^{(i)3} \right] (2-i) = -q_x^{(i)} \\ \rho_0 h_0^{(i)} C_0^2 \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} (W_{xx}^{(i)} + U_x^{(i)} W_{xx}^{(i)})_{xx} - \right. \\ \left. - \left\{ W_x^{(i)} \left(U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right\}_x - \right. \\ \left. - \frac{1}{R} \left(\mu_0 U_x^{(i)} + \frac{1}{2} \mu_0 U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} \mu_0 W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \mu_0 W_{xx}^{(i)2} - \frac{W^{(i)}}{R} \right) \right\rangle + \\ + k_1 \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^2} W^{(i)} (2-i) + \rho_0 h_0^{(i)} W_{tt}^{(i)} = (-1)^{i-1} q_n \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $h_0^{(i)}$ - толщина оболочек, μ_0 - коэффициент Пуассона, ρ_0 - плотность, $U^{(i)}, W^{(i)}$ - продольное перемещение и прогиб, положительный к центру кривизны, x - продольная координата, t - время, q_x^i, q_n - напряжение со стороны жидкости, которая находится между оболочками. Нижние индексы у перемещений обозначают соответствующие частные производные,

$k_1 \frac{\rho_0 h_0^{(1)} c_0^2}{l^2} W^{(1)}$, $k_3 \frac{R^{(i)2} p_0 h_0^{(1)} c_0^2}{l^4} U^{(1)}$ - $k_4 \frac{\rho_0 h_0^{(1)} c_0^2}{l^2 R^{(1)2}} U^{(1)3}$ - реакции окружающей среды в нормальном и продольном направлениях.

$$\begin{aligned} q_n &= [P_{rr} \cos(-\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r) + P_{rx} \cos(-\bar{n}^{(i)}, \bar{i})] \Big|_{r=R_i-W^{(i)}} \\ q_x &= [P_{rx} \cos(-\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r) + P_{xx} \cos(-\bar{n}^{(i)}, \bar{i})] \Big|_{r=R_i-W^{(i)}} \quad (4) \\ P_{rr} &= -\rho + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad P_{rx} = \rho v \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right), \quad P_{xx} = -\rho + 2\rho v \frac{\partial V_x}{\partial x}. \end{aligned}$$

В подходе Эйлера имеем:

$$\begin{aligned} \cos(-\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r) &= \frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|}, \quad \cos(-\bar{n}^{(i)}, \bar{i}) = -\frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}, \\ \cos(-\bar{n}, \bar{n}_r) &= \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos(-\bar{n}, \bar{i}) = -\frac{\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}}{\left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (5) \\ |\bar{N}| &= (R_i - W^{(i)}) \left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Здесь \bar{n} - нормаль к срединной поверхности i -й оболочки, \bar{n}_r, \bar{i} - орты базиса (r, θ, x) цилиндрической системы координат, центр которой расположен на геометрической оси. Если снести напряжения на невозмущенную поверхность оболочки, то можно считать $-\bar{n} = \bar{n}_r$ и $\cos(-\bar{n}, \bar{n}_r) = 1$, $\cos(-\bar{n}, \bar{i}) = 0$.

2. Вывод уравнения динамики с учетом наличия жидкости между упругими оболочками.

Принимая длину волны l за характерный размер и обозначая амплитуду продольного перемещения u_m и прогиба w_m . Переходим к безразмерным переменным:

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \quad (6)$$

Здесь c_0 - скорость звука в оболочке.

Полагаем

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \quad \frac{R^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \quad \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon). \quad (7)$$

Введем полухарактеристические (бегущие) координаты и растянутое время:

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (8)$$

где c – неизвестная безразмерная скорость волны. Тогда, разделив обе части 1-го уравнения (4) на $\frac{1}{l} \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} = \frac{1}{l} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2$ получим:

$$\left\langle \frac{u_m}{l} \left[u_{1\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)2} + \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi}^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{12l^2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi\xi}^{(i)2} \right\} \right] \right\rangle_{\xi} - \quad (9)$$

$$- (2-i) \frac{u_m}{l} \left[k_3 \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 u_1 - k_4 \left(\frac{u_m}{R^{(i)}} \right)^2 u_1^3 \right] - \frac{u_m}{l} (c^2 u_{1\xi\xi}^{(i)} - 2\varepsilon c u_{1\xi\tau}^{(i)} + \varepsilon^2 u_{1\tau\tau}^{(i)}) = - \frac{l q_x^{(i)}}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}.$$

Разделив обе части 2-го уравнения (4) на $\frac{1}{R^{(i)}} \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} = \frac{1}{R^{(i)}} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2$,

Получим:

$$\frac{u_m}{l} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12l^2} \left[\frac{w_m R^{(i)}}{u_m l} u_{3\xi\xi}^{(i)} \left(1 + \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)} \right) \right] \right\rangle_{\xi\xi} +$$

$$+ \left[-\mu_0 u_{1\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} - \mu_0 \frac{1}{2} \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)2} - \mu_0 \frac{1}{2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi}^{(i)2} - \mu_0 \frac{1}{2} \frac{h_0^{(i)2}}{24l^2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi\xi}^{(i)2} \right] +$$

$$\frac{R^{(i)}}{l} \left\{ \frac{w_m}{l} u_{3\xi}^{(i)} \left[-u_{1\xi}^{(i)} + \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} - \frac{1}{2} \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)2} - \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi}^{(i)2} - \frac{1}{2} \frac{h_0^{(i)2}}{24l^2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi\xi}^{(i)2} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{w_m R^{(i)}}{l^2} (c^2 u_{3\xi\xi}^{(i)} - 2\varepsilon u_{3\xi\tau}^{(i)} + \varepsilon^2 u_{3\tau\tau}^{(i)}) + k_1 \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{w_m}{R^{(i)}} u_3^{(i)} (2-i) = R^{(i)} \frac{(-1)^{i-1} q_n}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \quad (10)$$

Разложим упругие перемещения по степеням $\varepsilon = \frac{u_m}{l}$:

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (11)$$

Подставим их в уравнения, разделим обе части уравнения на $\varepsilon = \frac{u_m}{l}$ и, оставляя члены ε^0 и ε^1 , получим:

$$\left(u_{10\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right)_{\xi} + \varepsilon \left\{ u_{11\xi\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} + \frac{1}{2} \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} \right\}_{\xi} -$$

$$- (2-i) \varepsilon \left[k_3 \frac{R^{(i)2}}{l^2 \varepsilon} u_{10} - k_4 \frac{u_m^2}{R^{(i)2} \varepsilon} u_{10}^3 \right] - c^2 u_{10\xi\xi}^{(i)} - \varepsilon c^2 u_{11\xi\xi}^{(i)} + 2\varepsilon c u_{10\xi\tau}^{(i)} = - \frac{l^2 q_x^{(i)}}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}$$

$$- \mu_0 u_{10\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} + \varepsilon \left\langle -\mu_0 u_{11\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} \right\rangle + \quad (12)$$

$$+ (2-i) \varepsilon k_1 \frac{R^{(i)} w_m}{l u_m \varepsilon} u_{30}^{(i)} + \varepsilon \frac{w_m R^{(i)}}{u_m l} c^2 u_{30\xi\xi}^{(i)} = R^{(i)} l \frac{(-1)^{i-1} q_n}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}$$

Приравниваем к нулю коэффициенты при ε^0 , получим систему уравнений

$$u_{10\xi\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30\xi}^{(i)} - c^2 u_{10\xi\xi}^{(i)} = 0,$$

$$-\mu_0 u_{10\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30\xi}^{(i)} = 0 \quad (13)$$

Из этой системы следует

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30\xi}^{(i)} = \mu_0 u_{10\xi}^{(i)}, \quad (1 - \mu_0^2 - c^2) u_{10\xi\xi}^{(i)} = 0 \quad (14)$$

Следовательно, u_{10} - произвольная функция, а безразмерная скорость волны $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$, так как $c^2 = 1 - \mu_0^2$, Приравниваем коэффициенты при ε в правых и левых частях уравнений и учитываем предыдущие результаты, тогда получаем:

$$\begin{aligned} & \left[\mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} \right]_{\xi} + \frac{1}{2} \frac{u_m}{l \varepsilon} \left[u_{10\xi}^{(i)^2} \right]_{\xi} + 2\sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi\xi}^{(i)} - (2 - i) \left[k_3 \frac{R^{(i)^2}}{l^2 \varepsilon} u_{10} - k_4 \frac{u_m^2}{R^{(i)^2} \varepsilon} u_{10}^3 \right] = \\ & = - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} q_x^{(i)}, \\ & - \mu_0 u_{11\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)^2}}{l^2} \mu_0 (1 - \mu_0^2) u_{10\xi\xi\xi}^{(i)} + (2 - i) k_1 \mu_0 \frac{R^{(i)^2}}{l^2 \varepsilon} u_{10\xi} = \\ & = R^{(i)} l \frac{(-1)^{i-1} q_n}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножаем обе части второго уравнения на μ_0 и про дифференцируем на ξ , получаем систему

$$\begin{aligned} & \left(\mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} \right)_{\xi} + \frac{1}{2} \frac{u_m}{l \varepsilon} \left[u_{10\xi}^{(i)^2} \right]_{\xi} + 2\sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi\xi}^{(i)} - (2 - i) \left[k_3 \frac{R^{(i)^2}}{l^2 \varepsilon} u_{10} - k_4 \frac{u_m^2}{R^{(i)^2} \varepsilon} u_{10}^3 \right] = \\ & = - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} q_x^{(i)} \\ & \left(\mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} \right)_{\xi} + \left[\frac{1}{2} \mu_0^2 \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)^2} \right]_{\xi} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)^2}}{l^2} \mu_0^2 (1 - \mu_0^2) u_{10\xi\xi\xi}^{(i)} - (2 - i) k_1 \mu_0^2 \frac{R^{(i)^2}}{l^2 \varepsilon} u_{10\xi} = \\ & = - \frac{R^{(i)} l}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \mu_0 \left((-1)^{i-1} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Вычтем из первого уравнения второе и разделив обе части этого уравнения на $2\sqrt{1 - \mu_0^2}$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & u_{10\xi\xi}^{(i)} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(i)} u_{10\xi\xi}^{(i)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi}^{(i)} + \\ & + \frac{2 - i}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \left[\mu_0^2 k_1 \frac{R^{(i)^2}}{l^2 \varepsilon} u_{10\xi\xi} - k_3 \frac{R^{(i)^2}}{l^2 \varepsilon} u_{10} + k_4 \frac{u_m^2}{R^{(i)^2} \varepsilon} u_{10}^3 \right] = \\ & = - \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[q_x^{(i)} - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} (-1)^{i-1} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

В случае, когда жидкость отсутствует, правая часть уравнений становится равна нулю и получаются независимые уравнения КдВ. Надо определить правую часть, для чего необходимо решить уравнение гидродинамики для случая кольцевого и кругового сечения трубы.

3. Определение напряжений, действующих на оболочки со стороны вязкой несжимаемой жидкости

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x, \quad r = R_2 + \delta r^*, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}$$

$$p = \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} P + p_0, \quad \psi = \frac{\delta}{R_2} = o(1), \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta} = \frac{w_m R_2}{R_2 \delta} = o\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\right),$$

$$\frac{w_m}{R_2} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_2} = \lambda \psi, \quad \frac{w_m}{l} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \lambda \psi \varepsilon^{1/2}, \quad \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \psi \varepsilon^{1/2}$$

Во введенных безразмерных переменных получим уравнения гидродинамики:

$$\left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \left\{ \frac{\delta c_0}{v} \frac{\delta}{l} \left[\frac{\partial v_r}{\partial t^*} + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right) \right] \right\} + \frac{\partial P}{\partial r^*} =$$

$$= \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{R_2(1+\psi_{r^*})} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} - \frac{\delta^2 v_r}{R_2^2(1+\psi_{r^*})^2} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^{*2}} \right] \quad (18)$$

$$\frac{\delta c_0}{v} \frac{\delta}{l} \left[\frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial r^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{R_2(1+\psi_{r^*})} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^{*2}};$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\delta v_r}{R_2(1+\psi_{r^*})} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия

$$v_x = \frac{\delta}{l} \frac{u_m}{w_m} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t^*}, \quad v_r = -\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t^*} \quad (19)$$

при $r^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}$ и $r^* = -\lambda u_3^{(2)}$

Пологая теперь $\delta/l = 0$, $\delta/R_2 = 0$ (нулевое приближение по δ/l - гидродинамическая теория смазки), а также $\frac{\delta c_0}{v} \frac{\delta}{l} = 0$ - ползущие течения, получим уравнения гидродинамики:

$$\frac{\partial P}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0 \quad (20)$$

и граничные условия: $v_r = -\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t^*}$, $v_x = 0$ при $r^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}$ и $r^* = -\lambda u_3^{(2)}$. Раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра λ

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots \quad (21)$$

Для первых членов разложения получим те же уравнения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (22)$$

и граничные условия

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}, v_x^0 = 0 \text{ при } r^* = 1, \quad (23)$$

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, v_x^0 = 0 \text{ при } r^* = 0, \quad (24)$$

С точностью до ψ , λ получим:

$$\cos(-\bar{n}, \bar{n}_r) \approx 1, \cos(-\bar{n}, \bar{i}) \approx 0$$

$$q_x^i = \rho v \frac{w_m c_0}{\delta^2} \left[\frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right] \Bigg|_{r_2^* = \frac{w_m u_3^{(2)}}{\delta}}^{r_1^* = 1 - \frac{w_m u_3^{(1)}}{\delta}} \approx \rho v \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Bigg|_{r_2^* = -\lambda u_3^{(2)}}^{r_1^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}} \quad (25)$$

$$q_n = -\rho v \frac{w_m l c_0}{\delta^3} P - p_0 + 2\rho v \frac{w_m c_0}{l \delta} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} =$$

$$-p_0 - \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} \left(P - 2 \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} \right) = \left\{ \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 = \psi_i^2 \varepsilon_i \right\} \approx -p_0 - p_0 - \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} P \quad (26)$$

Из уравнений движения жидкости получаем с учетом граничных условий

$$v_x^0 = \frac{r^{*2} - r^*}{2} \frac{\partial P^0}{\partial x^*} \quad (27)$$

Подставляя в уравнение непрерывности, получаем:

$$\frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = \frac{r^{*2} - r^*}{2} \frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}} \quad (28)$$

Тогда учитывая условия при $r^* = 0$, получаем:

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} - \frac{1}{2} \left(\frac{r^{*3}}{3} - \frac{r^{*2}}{2} \right) \frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}} \quad (29)$$

Удовлетворяя условиям при $r^* = 1$, найдем

$$\frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}} = 12 \left(\frac{\partial u_3^2}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right),$$

$$\frac{\partial P^0}{\partial x^*} = 12 \int \left(\frac{\partial u_3^2}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \quad (30)$$

$$P^0 = 12 \int \left[\int \left(\frac{\partial u_3^2}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*.$$

При этом имеем:

$$v_x^0 = (r^{*2} - r^*) 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \quad \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = (2r^* - 1) 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*,$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Bigg|_{r^*=1} = 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \quad \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Bigg|_{r^*=0} = 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right) dx^*. \quad (31)$$

Учитывая, что введены переменные $\xi = x^* - ct^*$ и $\tau = \varepsilon t^*$, $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$, найдем

$$\begin{aligned}
 P^0 &= 12 \int \left[\int \left(c \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - c \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} + \varepsilon c \frac{\partial u_{31}^{(1)}}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} - \varepsilon c \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} \right) d\xi \right] d\xi = \\
 &= 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi, \\
 &\quad - \frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} q_n = \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi, \\
 &\quad - \frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi
 \end{aligned} \tag{32}$$

и учитывая, что $w_m l u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_m R^{(i)} u_{10\xi}^{(i)}$, найдем

$$\frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = \frac{\rho v}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} [u_m R^{(2)} u_{10\xi}^{(2)} - u_m R^{(1)} u_{10\xi}^{(1)}], \quad q_x^{(i)} = \frac{\delta}{2l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^i. \tag{33}$$

4. Уравнение динамики оболочки

Система уравнений становится такой с учетом найденной правой частью

$$\begin{aligned}
 u_{10\xi\tau}^{(1)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(1)} u_{10\xi\xi}^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(1)} + \\
 + \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \left[k_1 \mu_0^2 \frac{R^{(1)^2}}{l^2 \varepsilon} u_{10\xi\xi} - k_3 \frac{R^{(2)^2}}{l^2 \varepsilon} u_{10} + k_4 \frac{u_m^2}{R^{(1)^2} \varepsilon} u_{10}^3 \right] + \\
 + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] [u_{10\xi}^{(1)} - u_{10\xi}^{(2)}] = 0 \\
 u_{10\xi\tau}^{(2)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(2)} u_{10\xi\xi}^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(2)} + \\
 + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] [u_{10\xi}^{(2)} - u_{10\xi}^{(1)}] - 2(1 - 4\mu_0^2) \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{\tilde{v}}{R c_0 \varepsilon} u_{10\xi}^{(2)} = 0
 \end{aligned} \tag{34}$$

Здесь с принятой точностью $h_0/R \approx O(\varepsilon)$, $\delta/R_2 = \psi \ll 1$ обозначено $R^{(1)} \approx R^{(2)} = R$ при этом положено $h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} \approx h_0$.

Можно также ввести обозначения $u_{10\xi}^{(1)} = c_3 \phi^{(1)}$, $u_{10\xi}^{(2)} = c_3 \phi^{(2)}$, $\eta = c_1 \xi$, $t = c_2 \tau$,

где

$$c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \frac{v}{\delta c_0}, \quad c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right]^{1/3}, \tag{35}$$

$$c_3 = \frac{c_2}{c_1} \frac{l \varepsilon^2}{u_m} \frac{12}{\sqrt{1 - \mu_0^2}}, \quad \sigma_1 = \frac{c_1}{c_2} \frac{k_1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \mu_0^2 \frac{R^2}{l^2 \varepsilon}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{c_1 c_2} \frac{k_2}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{R^2}{l^2 \varepsilon},$$

$$\sigma_4 = \frac{c_3^2}{c_2 c_1^3} \frac{k_4}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{u_m}{R^2 \varepsilon}.$$

$$\phi_t^{(1)} + 6\phi^{(1)} \phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \delta_1 \phi_\eta^{(1)} - \sigma_3 \int \phi^{(1)} d\eta + \sigma_4 \left(\int \phi^{(1)} d\eta \right)^3 + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} = 0 \tag{36}$$

$$\phi_t^{(2)} + 6\phi^{(2)}\phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} = 0$$

Система уравнений (36) при отсутствии жидкости распадается на два независимых уравнений, для $\phi^{(1)}$

$$\phi_t^{(1)} + 6\phi^{(1)}\phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \sigma_1\phi_\eta^{(1)} - \sigma_3\int\phi^{(1)}d\eta + \sigma_4\left(\int\phi^{(1)}d\eta\right)^3 = 0 \quad (37)$$

с точным решением

$$\phi^{(1)} = \frac{\sigma_3}{2\sigma_4}Ch^{-2}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}}\left[\eta - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_4} + 2\sigma_4 + \sigma_1\right)t\right]\right\} \quad (38)$$

или

$$\phi^{(1)} = 2k^2Ch^{-2}\left\{k\left[\eta - \left(4k^2 + \frac{\sigma_3}{2k^2} + \sigma_1\right)t\right]\right\}, \text{ где } k = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}} \quad (39)$$

и для $\phi^{(2)}$

$$\phi_t^{(2)} + 6\phi^{(2)}\phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} = 0 \quad (40)$$

с точным решением

$$\phi^{(2)} = 2k^2Ch^{-2}\{k[\eta - 4k^2t]\}, \quad (41)$$

где k - произвольное или

$$\phi^{(2)} = \frac{\sigma_3}{2\sigma_4}Ch^{-2}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}}\left[\eta - \frac{\sigma_3}{\sigma_4}t\right]\right\} \quad (42)$$

где $\frac{\sigma_3}{\sigma_4}$ - произвольная величина

Очевидно, что скорость солитона $\phi^{(1)}$ больше, чем скорость солитона $\phi^{(2)}$ при одинаковых амплитудах. При наличии жидкости необходимо численное исследование системы уравнений (36) при начальном условии

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(\eta,0) &= \frac{\sigma_3}{2\sigma_4}Ch^{-2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}}\eta, \quad \phi^{(2)}(\eta,0) = 0 \quad \text{или} \\ \phi^{(1)}(\eta,0) &= 0, \quad \phi^{(2)}(\eta,0) = 2k^2Ch^{-2}k\eta. \end{aligned} \quad (43)$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант №16-01-00175-а.

Литература

1. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах// Громека И.И. Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 149-171.
2. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т.3. № 1. С. 52-58.

3. Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор)// Акустический журнал. 2002. Т.48. № 6. С. 725-740.
4. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках : новое эволюционное уравнение // Акустический журнал. 2001. Т.47. № 3. С. 359-363.
5. Аршинов Г.А., Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // Акустический журнал. 2000. Т.46. № 1. С. 116-117.
6. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Ковалев А.Д., Могилевич Л.И. Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Изв. Сарат. Ун-та. Нов. Сер. Сер. Физика. 2012. Т.12, Вып.2. С. 12-18.
7. Блинкова А.Ю., Ковалева И.А., Могилевич Л.И. Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Вестн. РУДН. Сер Матем., информ., физ. 2013. Т.3. с. 42-51.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003, 840 с.
9. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М., 1960. 490 с.
10. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., 1972. 432 с.
11. Михасёв Г.И., Шайко А.И. О влиянии параметра упругой нелокальности на собственные частоты колебаний углеводородной нанотрубки в упругой среде // ТРУДЫ БГТУ. Физико-Математические науки и информатика. 2012. №6. С.41-44.
12. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
13. Чивилихин С.А., Попов И.Ю., Гусаров В.В. Динамика скручивания нанотрубок в вязкой жидкости // Докл. АН. 2007. Т. 412. №2. С. 201-203.
14. Попов И.Ю., Родыгина О.А., Чивилихин С.А., Гусаров В.В. Солитон в стенке нанотрубки и стасово течение в ней // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, № 18. С. 48-54.