

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/12-42

Ссылка для цитирования этой статьи:

Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Кондратов Д.В. Динамика сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости, взаимодействующего с упругой круглой пластиной // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №2

Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 16-01- 00175а и гранта Президента РФ МД-6012.2016.8.

УДК 681.03.06:531.383:532.516

ДИНАМИКА СДАВЛИВАЕМОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С УПРУГОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНОЙ

Грушенкова Е.Д.¹, Могилевич Л.И.², Кондратов Д.В.³

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, katenok.09041992@gmail.com

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, mogilevich@sgu.ru

³Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина – филиал
Российской академии народного хозяйства и государственной службы при
Президенте Российской Федерации, Россия, Саратов, kondratovdv@yandex.ru

THE DYNAMICS OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID CONSTRUCTED LAYER, INTERACTING WITH ELASTIC CIRCULAR PLATE

Grushenkova E.D.¹, Mogilevich L.I.², Kondratov D.V.³

¹ Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov,
katenok.09041992@gmail.com

² Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov,
mogilevich@sgu.ru

³ Volga Management Institute named after P.A. Stolypin - a branch of Federal State-
Funded Educational Institution of Higher Education Russian Presidential Academy of
National Economy and Public Administration, Russia, Saratov,
kondratovdv@yandex.ru

Аннотация. Задачи динамики демпферов и опор с тонким слоем вязкой несжимаемой жидкости рассматривается при взаимодействии его с упругим статором. Он может быть упругой круглой пластиной. Он может представлять собой трёхслойную упругую круглую пластину или геометрически нерегулярную (с рёбрами жёсткости) круглую пластину. Вибратор может быть как упругим, так и абсолютно твёрдым. Во всех этих задачах имеются

источники движения систем «жидкость - упругое тело». Для выявления динамических характеристик систем необходимо решать связанные задачи динамики упругих пластин и вязкой несжимаемой жидкости. Упрощающими задачу факторами являются малость толщины слоя жидкости по сравнению с линейным размером пластинки, как в теории смазки. В получающихся задачах гидроупругости вводится ещё предположение о малости амплитуды перемещений статора по сравнению с толщиной слоя жидкости, но не с толщиной пластинки. В этих условиях уравнения гидродинамики линеаризуются. Уравнения динамики упругих элементов остаются нелинейными, если таковыми были изначально. При отсутствии возможности найти точное решение, применяется метод итерации для решения уравнений гидродинамической теории смазки.

Ключевые слова: вязкая жидкость, упругие пластинки, колебания, волны.

Abstract. The problem of damping and basis dynamics of viscous incompressible liquid is considered under interaction with an elastic stator. It may take the form of an elastic circular plate. Besides the stator considered may represent a circular three-layered elastic plate or a geometrically irregular one (with rigidity rib). The vibrator may be elastic or absolutely solid. All these problems contain the systems “liquid – elastic body” movement sources. To reveal dynamic characteristic of these systems, it is necessary to solve the connected problems of an elastic plate and viscous incompressible liquid dynamics. The factor, making the problem simpler, is a small thickness of liquid layer in comparison with a linear size of the plate, as in lubrication theory. The problems under consideration contain this supposition about a small size of stator’s movements amplitude in comparison with liquid layer thickness, but not with a plates thickness. Under these conditions hydrodynamics equations become linear. The elastic elements dynamics equations remain non-linear, if they were such initially. If it is not possible to find the exact solution, the iteration method for solving the lubrication theory hydrodynamics equations applied.

Keywords: viscous liquid, elastic plates, oscillations, waves.

Задачи динамики демпферов и опор с тонким слоем вязкой несжимаемой жидкости рассматривается при взаимодействии его с упругим статором. Он может быть упругой пластиной в виде балки-полости или круглой. Он может представлять собой трёхслойную упругую пластину или пластину геометрически нерегулярную (с рёбрами жёсткости). Вибратор может быть как упругим, так и абсолютно твёрдым. Во всех этих задачах имеются источники движения систем «жидкость - упругое тело».

Следует заметить, что при рассмотрении задачи на основе линейной теории пластин, а также считать, что на систему действуют гармонические по времени воздействиях, решение задачи может определяться в виде гармонической зависимости всех параметров задачи по времени. Это возможно в силу влияния вязкости жидкости, которая приводит к демпфированию колебаний и быстрому затуханию по времени решения из-за начальных условий и выходу на стационарные колебания.

Эти условия позволяют найти точные решения линеаризованных уравнений механики жидкости, записанных в виде уравнений теории смазки, но с учётом локального члена инерции для любых значений колебательного (смазочного) числа Рейнольдса оставаясь в рамках ламинарного движения.

В указанных случаях нормальное напряжение жидкости (давление) на поверхности упругого тела значительно больше касательного напряжения и последним обычно пренебрегают [1-9].

Рассмотрим возможность получения приближённого значения решения уравнений динамики жидкости методом итерации, пренебрегая на первом шаге локальным членом инерции и учитывая его на втором шаге итерации. При этом можно доказать, что метод итерации сходится при условии, что колебательное число Рейнольдса меньше единицы [1]. Этот подход позволяет отказаться от требования гармонического закона по времени всех параметров жидкости и упругих элементов. Появляется возможность решать нелинейные уравнения динамики пластин или при негармонических законах изменения по времени источников движения, таких как ускорение, действующее на систему, или перепад давления в жидкости.

На рисунках представлены системы «жидкость-упругое тело». На рис. 1 представлен вибратор на пружине 1, упругий статор 2 и слой жидкости 3 между ними [2-6]. Для круглой пластины (рис 2) толщина слоя 3 значительно меньше радиуса пластинки 2, то есть $\delta_0 \ll R$ и вводится малый параметр $\psi = \delta_0/R \ll 1$.

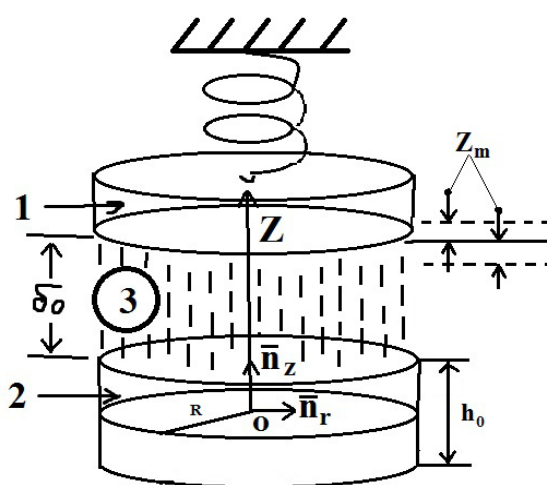


Рис 1

Амплитуда колебаний вибратора 1 (рис. 1) предполагается значительно меньше толщины слоя жидкости 3, то есть и вводится малый параметр $\lambda = z_m/\delta_0 \ll 1$.

Прогиб упругих элементов 2 значительно меньше толщины слоя жидкости 3, то есть $W \ll \delta_0$, $W \ll R$ и $W/\delta_0 = O(\lambda)$, порядка λ .

Рассмотрим постановку решения задачи гидродинамики слоя жидкости, взаимодействующего с жёстким штампом (вибратором) и упругой круглой пластинкой в условиях вибрации основания (рис. 1). Все тела заключены в едином корпусе, имеющем справа и слева торцевые полости, заполненные той

же жидкостью, что и жидкость между штампом и пластиной. Давление жидкости в правой и левой полости P_0 , а истечение жидкости можно считать свободным.

Штамп может перемещаться в вертикальном направлении за счёт наличия упругой связи (пружина или магнитный подвес) с корпусом. При этом частота колебаний штампа ω , а амплитуда его колебаний z_m . Сторона статора-пластины, соприкасающаяся с жидкостью, является плоской. Условия опирания пластины на торцах могут быть свободными или жёсткими.

Следует отметить, что эта задача полностью аналогична задаче гидроупругости для кольцевого сечения соосных цилиндров, один из которых – упругая оболочка, а другой - абсолютно твёрдый цилиндр [6,7].

Пусть закон движения вибрирующего основания представляется в виде:
 $z_0 = E_z f_0(\omega t), f_0(\omega t) = \sin \omega t$ (1)

Тогда ускорение вибрирующего основания можно записать так:

$$\ddot{z}_0 = E_z \frac{d^2 f_0}{dt^2} = -E_z \omega^2 f_0(\omega t) \quad (2)$$

Здесь E_z – амплитуда колебаний основания; $\omega = 1/t_0$ – частота вибрации, t_0 - характерное время; t - время; точка сверху - производная по времени.

Со стороны жидкости на пластину действует нормальное напряжение q_n и касательное напряжение q_r , которые определяются формулами:

$$\begin{aligned} q_{zz} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_z}{\partial z} \text{ при } z = W + \frac{h_0}{2} \\ q_{zr} &= \rho\nu \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \text{ при } z = W + \frac{h_0}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

На твердый штамп действует сила со стороны жидкости:

$$N = -2\pi \int_0^R q_{zz} r dr \text{ при } z = \frac{h_0}{2} + \delta_0 + z_m f_z(\omega t) \quad (4)$$

а закон его движения имеет вид $z = \delta_0 + z_m f_z(\omega t)$

Здесь p – давление; V_r, V_z - проекции скорости на оси Or и Oz ; ρ - плотность; ν - кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости имеют вид [10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} \right) \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} V_r + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения динамики жидкости дополняются условием прилипания жидкости к стенкам канала

$$V_r = 0, V_z = \dot{z} \text{ при } z = \frac{h_0}{2} + \delta_0 + z_m f_z(\omega t),$$

$$V_r = \frac{\partial U}{\partial t}, V_z = \frac{\partial W}{\partial t} \text{ при } z = \frac{h_0}{2} + W$$

и условиями свободного истечения жидкости в торцы

$$p = p_0 - \rho \ddot{z}_0 \left(z - \frac{h_0}{2} - \delta_0 - z_m f_z(\omega t) \right) \text{ при } r = R \quad (6)$$

Здесь U – упругое перемещение пластинки в направлении оси x ; W – прогиб.

Введем безразмерные переменные

$$\zeta = \frac{z - h_0/2}{\delta_0}, \xi = r/R, \tau = \omega t, U = u_m U_1, W = w_m U_3$$

$$p = p_0 - \rho \ddot{z}_0 \left(z - \frac{h_0}{2} - \delta_0 - z_m f_z(\omega t) \right) + \frac{\rho v z_m \omega}{\delta_0 \psi^2} P, \quad (7)$$

$$V_r = \frac{z_m \omega}{\psi} U_\xi, V_z = z_m \omega U_\zeta, \psi = \delta_0/R \ll 1, \lambda = \frac{z_m}{\delta_0} \ll 1,$$

где u_m, z_m – амплитуды упругих перемещений пластины. ψ – относительная толщина слоя вязкой жидкости; λ – относительная амплитуда колебаний вибратора; $w_m/z_m = 0$ (1).

В этом случае получаем уравнение инерционной теории смазки имеют вид:

$$\frac{\delta_0^2 \omega}{\nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi U_\xi) + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0,$$

$$U_\xi = 0, U_\zeta = \frac{df_z}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1, U_\xi = 0, U_\zeta = \frac{w_m}{z_m} \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \text{ при } \zeta = 0$$

$$P = 0 \text{ при } \xi = 1, \xi \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0. \quad (8)$$

Решение задачи (8) при гармоническом поведении параметров по времени имеет вид:

$$P = \frac{1}{4} (\xi^2 - 1) \left[2\varepsilon^2 \alpha \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 12\gamma \frac{df_z}{d\tau} \right] + \frac{w_m}{z_m} \int_{\xi}^1 \int_{\xi}^{\xi} \left[2\varepsilon^2 \alpha \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} + 12\gamma \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] d\xi d\xi \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = -\frac{1}{2} \xi \left[2\varepsilon^2 \frac{\alpha - 1}{2} \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 6\gamma \frac{df_z}{d\tau} \right] + \frac{w_m}{z_m} \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{\xi} \left[2\varepsilon^2 \frac{\alpha - 1}{2} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} + 6\gamma \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] d\xi.$$

Вторая формула, (для касательной составляющей q_{zr}) ранее не была получена, так как отбрасывалась в силу малости по сравнению с нормальной составляющей q_{zz} .

Метод итерации на первом шаге дает

$$P = 12 \left[\frac{1}{4} (\xi^2 - 1) \frac{df_z}{d\tau} + \frac{w_m}{z_m} \int_{\xi}^1 \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{\xi} \frac{\partial U_3}{\partial \tau} d\xi d\xi \right],$$

$$U_{\xi} = \frac{1}{2} (\zeta^2 - \zeta) \left[\frac{1}{2} \xi \frac{df_z}{d\tau} - \frac{w_m}{z_m} \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{\xi} \frac{\partial U_3}{\partial \tau} d\xi \right],$$

$$\left. \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = -6 \left[\frac{1}{2} \xi \frac{df_z}{d\tau} - \frac{w_m}{z_m} \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{\xi} \frac{\partial U_3}{\partial \tau} d\xi \right],$$

$$U_{\zeta} = \frac{1}{12} (3\zeta^2 - 2\zeta^3) \left[12 \frac{df_z}{d\tau} - \frac{w_m}{z_m} 12 \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] + \frac{w_m}{z_m} \frac{\partial U_3}{\partial \tau}. \quad (10)$$

На втором шаге итерации $\partial U_{\xi} / \partial \tau$ из (10) подставляем в (8) и, решая неоднородные уравнения, находим

$$P = \frac{1}{4} (\xi^2 - 1) \left[2\varepsilon^2 \frac{6}{5} \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 12 \frac{df_z}{d\tau} \right] + \frac{w_m}{z_m} \int_{\xi}^1 \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{\xi} \left[2\varepsilon^2 \frac{6}{5} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} + 12 \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] d\xi d\xi,$$

$$\left. \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = -\frac{1}{2} \xi \left[2\varepsilon^2 \frac{1}{10} \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 6 \frac{df_z}{d\tau} \right] + \frac{w_m}{z_m} \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{\xi} \left[2\varepsilon^2 \frac{1}{10} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} + 6 \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] d\xi. \quad (11)$$

Можно как и ранее ввести частотозависимые коэффициенты $\alpha(\omega)$ и $\gamma(\omega)$ и считать, что ε - любое, при этом получаем, что для любых данных \ddot{z}_0

$$P = \frac{1}{4} (\xi^2 - 1) \left[2\varepsilon^2 \alpha \frac{6}{5} \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 12\gamma \frac{df_z}{d\tau} \right] + \frac{w_m}{z_m} \int_{\xi}^1 \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{\xi} \left[2\varepsilon^2 \alpha \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} + 12\gamma \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] d\xi d\xi,$$

$$\left. \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = -\frac{1}{2} \xi \left[2\varepsilon^2 \frac{\alpha - 1}{2} \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 6\gamma \frac{df_z}{d\tau} \right] + \frac{w_m}{z_m} \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{\xi} \left[2\varepsilon^2 \frac{\alpha - 1}{2} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} + 6\gamma \frac{\partial U_3}{\partial \tau} \right] d\xi.$$

Эти формулы годятся и для нелинейных уравнений динамики круглой пластины (как трехслойной, так и с ребрами жесткости).

При этом, как и ранее учтем, что

$$\gamma = 1, \alpha = \frac{6}{5}, \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{1}{10} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \gamma = \frac{1}{6}\varepsilon, \alpha = 1, \alpha - 1 = \frac{1}{\varepsilon} \text{ при } \varepsilon > 4,$$

или

$$12\gamma = \sqrt{2\text{Re}}, \quad 2\varepsilon^2 \frac{\alpha - 1}{2} = \varepsilon = \sqrt{\frac{\text{Re}}{2}}, \quad 2\varepsilon^2 \alpha = 2\varepsilon^2 = \text{Re}, \text{ при } \varepsilon > 4.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант № 16-01-00175а и гранта Президента РФ МД-6012.2016.8

Литература

1. Андрейченко К.П., Могилевич Л.И. О динамике взаимодействия сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости с упругими стенками // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1982. № 2. С. 162-172.
2. Могилевич Л.И., Попов В.С., Скородумов Е.С. Динамика сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости, взаимодействующего с упругой пластиной // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. № 1; URL: mathmod.esrae.ru/11-36.
3. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдавливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №4. С. 23-32.
4. Могилевич Л.И., Попов В.С. Исследование взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости со стенками канала, образованного соосными вибрирующими дисками // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2011. №3. С. 42-55.
5. Попов В.С., Могилевич Л.И., Старовойтов Э.И. Гидроупругость виброопры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым наполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56-63.
6. Агеев Р. В., Могилевич Л. И., Попов В. С. Колебание стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 3-11
7. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64-72.
8. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И. Исследование амплитудных частотных характеристик колебаний упругих стенок трубы кольцевого профиля при пульсирующем движении вязкой жидкости в условиях жесткого защемления по торцам // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. №3. С. 15-21
9. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при свободном торцевом истечении в условиях вибрации // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. Т. 3. № 1 (26). С. 22-31.
10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа. 2003. 840 с.