

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/15-45](http://mathmod.esrae.ru/15-45)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Андрейченко К.П., Смарунь А.Б. Синтез регулятора системы управления движением манипулятора с упругим стержнем и закрепленным на его конце телом методом логарифмических частотных характеристик // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №4

УДК 629.78

## СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ МАНИПУЛЯТОРА С УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ И ЗАКРЕПЛЕННЫМ НА ЕГО КОНЦЕ ТЕЛОМ МЕТОДОМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Андрейченко К.П.<sup>1</sup>, Смарунь А.Б.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Россия, Саратов, kp\_andreichenko@renet.ru

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Россия, Саратов, sab220347@yandex.ru

## SYNTHESIS OF REGULATOR OF MANIPULATOR MOVEMENT MANAGEMENT SYSTEM WITH ELASTIC ROD AND SOLID AT ITS END BODY BY LOGGISMIC FREQUENCY CHARACTERISTICS METHOD

Andreichenko K.P.<sup>1</sup>, Smarun A.B.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Yuri Gagarin State University of Saratov, Russia, Saratov,  
kp\_andreichenko@renet.ru

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State University of Saratov, Russia, Saratov,  
sab220347@yandex.ru

**Аннотация.** В работе показано, что метод логарифмических частотных характеристик синтеза регулятора для системы управления манипулятора с рабочим органом в виде упругого стержня позволяет легко и наглядно обеспечивать устойчивость системы стабилизации и наилучшее качество переходных процессов в ней.

**Ключевые слова:** манипулятор, упругий стержень, синтез регулятора, метод логарифмических частотных характеристик

**Abstract.** In the paper, it is shown that the method of logarithmic frequency characteristics of the controller synthesis for the control system of the manipulator with a working member in the form of an elastic rod makes it possible to easily and clearly ensure the stability of the stabilization system and the best quality of the transient processes in it.

**Key words:** manipulator, elastic rod, regulator synthesis, method of logarithmic frequency characteristics

В работе [1] исследуются вопросы построения и анализа динамических моделей дискретно-континуальных систем, которые представляются в форме матриц квазирациональных дробей, являющихся отношениями квазимногочленов. Такое представление позволяет использовать частотные методы для синтеза регуляторов таких систем и в том числе при одномерном канале регулирования метод логарифмических частотных характеристик [2]. Этот метод достаточно прост, знаком, используется многими инженерами в реальных проектах и позволяет наглядно судить об устойчивости и качестве регулирования систем автоматического управления. В сложных случаях взаимозависимых каналов управления метод позволяет определять начальные значения параметров регуляторов для запуска различных методов оптимизации процессов регулирования. В [1] теоретические расчеты иллюстрируются на примере динамического моделирования упругого звена манипулятора. При этом используется параметрический синтез регулятора по желаемой вещественной частотной характеристике системы. В процессе параметрического синтеза регулятора возникает сложный вопрос выбора начальных значений параметров регулятора и в случае неэффективного выбора начальных значений параметров требуются достаточно большие затраты времени на вычисления.

В настоящей статье показана простота и эффективность использования метода логарифмических частотных характеристик для разработки регуляторов манипулятора с рабочим органом в виде упругого стержня.

### **1. Структурная схема системы управления движением манипулятора с рабочим органом в виде упругого стержня.**

Рассмотрим плоское угловое движение дискретно-континуальной механической модели манипулятора (рис. 1) с упругим стержнем длиной  $s$ , внутреннее трение в котором учитывается по теории Фойгта.

Обозначим  $y^*(z^*, t^*)$  – упругое смещение стержня от оси  $z^*$ . Начало стержня жестко заделано в точке  $O_1$  абсолютно жесткого вала 1 с моментом инерции  $J_0^*$ . На другом конце стержня в точке  $O_2$  закреплено абсолютно жесткое тело 2 с массой  $m_2^*$  и моментом инерции  $J_2^*$  ( $O_2$  – центр массы  $m_2^*$ ). К валу 1 приложен управляющий момент

$$L_0^* = p^* \alpha_0^* - \Pi p^* \alpha_1^* - k_0^* \dot{\alpha}_1^*,$$

где  $\alpha_0^*$  – управляющее воздействие (входная функция);

$\alpha_1^*$  – угол поворота жесткого вала 1;

$\Pi$  – оператор корректирующего устройства;

$p^*$  – коэффициент усиления;

$k_0^*$  – коэффициент демпфирования.

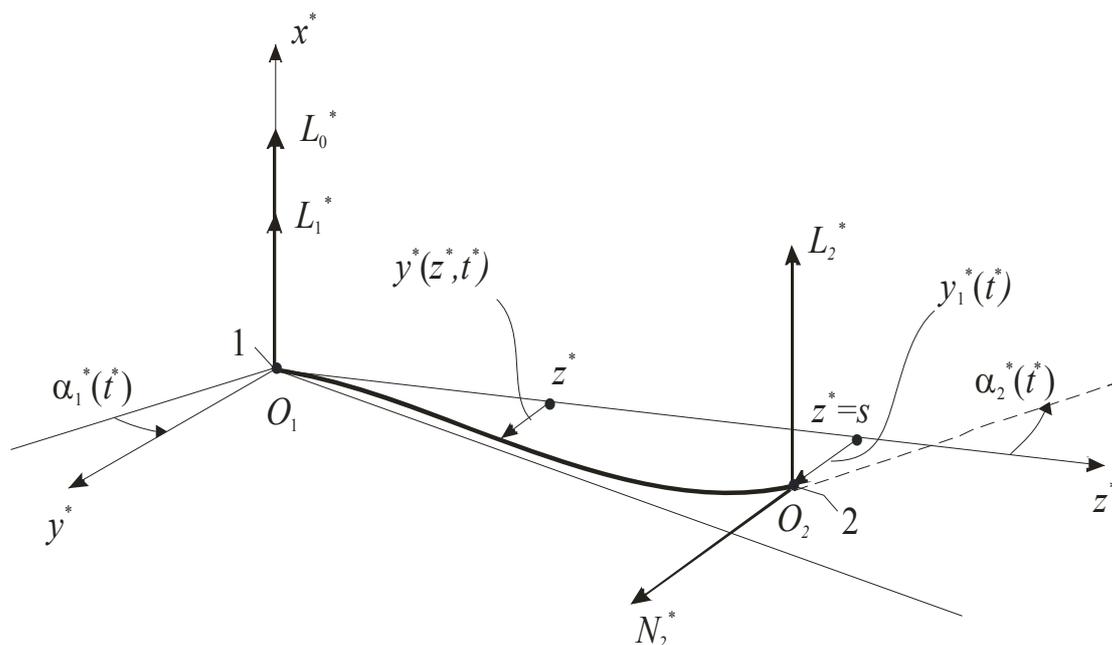


Рис. 1

Учитывая малость деформации стержня, запишем полярный угол  $\alpha^*(t^*)$  выходной точки  $O_2$  гибкого стержня в виде

$$\alpha^*(t^*) = \alpha_1^*(t^*) - y_1^*(t^*)/s,$$

где  $s$  – длина стержня. Причем  $|y^*(s, t^*)| = |y_1^*(t^*)| \ll s$  и  $|y^*(z^*, t^*)| \ll s$  для  $z^* \in [0, s]$ .

Обозначим через  $L_1^*$ ,  $L_2^*$ ,  $N_2^*$  реакции стержня соответственно моменты сил ( $L_1^*$ ,  $L_2^*$ ) и сила ( $N_2^*$ ), приложенные к абсолютно жестким телам 1 и 2.

Следуя работе [1] запишем уравнения плоского движения манипулятора в изображениях по Лапласу безразмерные:

$$\begin{aligned} (J_0 \lambda^2 + k_0 \lambda + \Pi(\lambda) p) \alpha_1(\lambda) - L_1(\lambda) &= p \alpha_0(\lambda) \\ J_2 \lambda^2 (\alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda)) - L_2(\lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$m_2 \lambda^2 (y_1(\lambda) - \alpha_1(\lambda)) - N_2(\lambda) = 0,$$

$$\alpha(\lambda) = \alpha_1(\lambda) - y_1(\lambda), \quad \Pi(\lambda) = \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$$

$$y'''(z, \lambda) - k^4 y(z, \lambda) = -k^4 z \alpha_1(\lambda), \quad k^4 = -\frac{\lambda^2}{1 + \gamma \lambda} \quad (1.2)$$

$$z = 0: y(0, \lambda) = 0, \quad y'(0, \lambda) = 0 \quad (1.3)$$

$$z = 1: y(1, \lambda) = y_1(\lambda), \quad y'(1, \lambda) = -a_2(\lambda)$$

$$L_1(\lambda) = -(1 + \gamma \lambda) y''(0, \lambda), \quad L_2(\lambda) = (1 + \gamma \lambda) y''(1, \lambda) \quad (1.4)$$

$$N_2(\lambda) = (1 + \gamma \lambda) y'''(1, \lambda)$$

Здесь  $\alpha_0(\lambda)$ ,  $\alpha_1(\lambda)$ ,  $\alpha_2(\lambda)$ ,  $y_1(\lambda)$ ,  $y(z, \lambda)$ ,  $L_1(\lambda)$ ,  $L_2(\lambda)$ ,  $N_2(\lambda)$  – изображения соответствующих оригиналов;  $A(\lambda)$  и  $B(\lambda)$  – многочлены;  $\Pi(\lambda)$  – рациональная дробь;  $\lambda$  – произвольный комплексный параметр.

После повторения всех выкладок, описанных подробно в [1], получим из уравнений (1.1) систему уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_{11}\alpha_2(\lambda) + \varphi_{12}y_1(\lambda) + \varphi_{13}\alpha_1(\lambda) &= B(\lambda)p\alpha_0(\lambda), \\ \varphi_{21}\alpha_2(\lambda) + \varphi_{22}y_1(\lambda) + \varphi_{23}\alpha_1(\lambda) &= 0, \\ \varphi_{31}\alpha_2(\lambda) + \varphi_{32}y_1(\lambda) + \varphi_{33}\alpha_1(\lambda) &= 0, \\ \alpha(\lambda) &= \alpha_1(\lambda) - y_1(\lambda). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= B(\lambda)\mu_{11}(1 + \gamma\lambda), \quad \varphi_{12} = B(\lambda)\mu_{12}(1 + \gamma\lambda), \\ \varphi_{13} &= [(J_0 + \mu_{13})\lambda^2 + k_0\lambda]B(\lambda) + A(\lambda)p, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{21} &= J_2\lambda^2 + \mu_{21}(1 + \gamma\lambda), \quad \varphi_{22} = \mu_{22}(1 + \gamma\lambda), \quad \varphi_{23} = (J_2 - \mu_{23})\lambda^2, \\ \varphi_{31} &= \mu_{31}(1 + \gamma\lambda), \quad \varphi_{32} = m_2\lambda^2 + \mu_{32}(1 + \gamma\lambda), \quad \varphi_{33} = -(m_2 + \mu_{33})\lambda^2, \end{aligned}$$

$$\mu_{11} = k \frac{V}{\Delta}, \quad \mu_{12} = k^2 \frac{U}{\Delta}, \quad \mu_{13} = \frac{1}{k^3 \Delta} (U(k - T) - V(1 - S)),$$

$$\mu_{21} = \frac{k}{\Delta} (UT - VS), \quad \mu_{22} = \frac{k^2}{\Delta} (T^2 - US),$$

$$\mu_{23} = \frac{1}{k^3} \left( V - [VS(1 - S) - US(k - T) + T^2(k - T) - UT(1 - S)] \frac{1}{\Delta} \right), \quad (1.7)$$

$$\mu_{31} = \frac{k^2}{\Delta} (US - V^2), \quad \mu_{32} = \frac{k^3}{\Delta} (TS - UV),$$

$$\mu_{33} = \frac{1}{k^2} \left( U - [V^2(1 - S) - UV(k - T) + TS(k - T) - US(1 - S)] \frac{1}{\Delta} \right),$$

$$\Delta = U^2 - TV,$$

$$S(k) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(k) + \cos(k)), \quad T(k) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh}(k) + \sin(k)) \quad (1.8)$$

$$U(k) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(k) - \cos(k)), \quad V(kz) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh}(k) - \sin(k)), \quad k = \left( -\frac{\lambda^2}{1 + \gamma\lambda} \right)^{1/4}.$$

Выражения (1.5) - (1.8) – математическая модель манипулятора с динамической моделью стержня, где весь бесконечный спектр собственных частот и форм колебаний стержня учитывается через переменные коэффициенты  $\mu_{ij}$  ( $i, j = \overline{1, 3}$ ), которые являются функциями комплексной переменной  $\lambda$ .

Из (1.5) легко получить передаточные функции замкнутой системы управления манипулятора в форме квазирациональных дробей.

$$\frac{\alpha(\lambda)}{\alpha_0(\lambda)} = \Phi(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{D(\lambda)}, \quad \frac{\alpha_1(\lambda)}{\alpha_0(\lambda)} = \Phi_1(\lambda) = \frac{Q_1(\lambda)}{D(\lambda)}, \quad (1.9)$$

$$Q(\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} + \varphi_{13} & B(\lambda)p \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} + \varphi_{23} & 0 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} + \varphi_{33} & 0 \end{vmatrix}, \quad Q_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & B(\lambda)p \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & 0 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 0 \end{vmatrix},$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix}.$$

Чуть сложнее получить передаточную функцию разомкнутой системы управления манипулятора, которая необходима для синтеза регулятора методом логарифмических амплитудных и фазовых частотных характеристик (ЛАФЧХ).

Из двух последних уравнений (1.5) получим зависимость угла  $\alpha_2$  и  $y_1$  от угла  $\alpha_1$ :

$$\alpha_2 = \varphi_{\alpha_2} \alpha_1, \quad y_1 = \varphi_{y_1} \alpha_1, \\ \varphi_{\alpha_2} = (\varphi_{23}\varphi_{32} - \varphi_{22}\varphi_{33}) / \Delta, \quad \varphi_{y_1} = (\varphi_{23}\varphi_{31} - \varphi_{22}\varphi_{33}) / \Delta, \quad \Delta = (\varphi_{21}\varphi_{32} - \varphi_{22}\varphi_{31}).$$

Подставим выражения для  $\alpha_2$  и  $y_1$  в первое уравнение системы (1.5) и преобразуем его к следующему виду

$$\psi(\lambda) \alpha_1 = p\alpha_0 - p\Pi(\lambda) \alpha_1 \quad (1.10)$$

$$\text{где } \psi(\lambda) = \frac{\varphi_{11}\varphi_{\alpha_2} + \varphi_{12}\varphi_{y_1} + [(J_0 + \mu_{13})\lambda^2 + k_0\lambda]B(\lambda)}{B(\lambda)}.$$

Из (1.10) следует структурная схема исследуемой системы управления с отрицательной обратной связью в форме

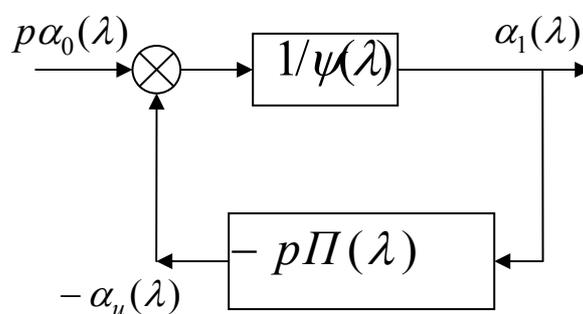


Рис. 2

Из данной структурной схемы можно получить передаточную функцию разомкнутой системы управления

$$W_p(\lambda) = \frac{p\Pi(\lambda)}{\psi(\lambda)}. \quad (1.11)$$

## 2. Синтез регулятора системы управления движением манипулятора с рабочим органом в виде упругого стержня.

Примем как в работе [1] модель манипулятора без груза на конце стержня  $m_2 = J_2 = 0$  с параметрами  $J_0 = 7.1 \cdot 10^{-3}$ ,  $k_0 = 1.5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\gamma = 4.8 \cdot 10^{-3}$ ,  $p = 31.5$  и построим ЛАФЧХ разомкнутой системы управления.

Как видно из рис. 3 на логарифмической амплитудно-частотной характеристике (ЛАЧХ) имеется четыре резких излома, которые обусловлены упругостью стержня. Для обеспечения устойчивости системы управления можно выполнить следующие действия [3]. Во-первых, компенсировать изломы на ЛАЧХ, используя в регуляторе корректирующее устройство вида (обозначения взяты из [1])

$$P_k(\lambda) = \frac{(T_7^2 \lambda^2 + 2\xi_1 T_7 + 1)(T_8^2 \lambda^2 + 2\xi_2 T_8 + 1)}{(T_9^2 \lambda^2 + 2\xi_3 T_9 + 1)(T_{10}^2 \lambda^2 + 2\xi_4 T_{10} + 1)},$$

а затем обеспечить устойчивость и качество регулирования, добавив в регулятор к  $P_k(\lambda)$  корректирующее устройство вида

$$P_0(\lambda) = \frac{(T_1 \lambda + 1)(T_2 \lambda + 1)(T_3 \lambda + 1)}{(T_4 \lambda + 1)(T_5 \lambda + 1)(T_6 \lambda + 1)}.$$

В работе [1] корректирующее устройство  $\Pi(\lambda) = P_0(\lambda) P_k(\lambda)$  и было выбрано для параметрического синтеза. Очевидно, что, не имея ЛАФЧХ, изображенных на рис. 3, выбрать начальные значения для четырнадцати параметров из  $\Pi(\lambda)$  достаточно трудно. После длительных расчетов в [1] были получены следующие значения параметров  $\Pi(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} T_1 &= 0.36, T_2 = 0.2544, T_3 = 0.246, T_4 = 3.8 \cdot 10^{-2}, T_5 = 1.0 \cdot 10^{-2}, T_6 = 1.76 \cdot 10^{-6}, \\ T_7 &= 7.246 \cdot 10^{-2}, \xi_1 = 1.0 \cdot 10^{-2}, T_8 = 2.934 \cdot 10^{-2}, \xi_2 = 7.0 \cdot 10^{-2}, \\ T_9 &= 7.246 \cdot 10^{-2}, \xi_3 = 1.0 \cdot 10^{-2}, T_{10} = 2.934 \cdot 10^{-2}, \xi_4 = 7.0 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

ЛАФЧХ разомкнутой скорректированной системы управления манипулятор изображена на рис. 4.

Как видно из рис. 4, согласно [2], замкнутая система должна быть устойчива и обладать неплохими показателями качества регулирования.

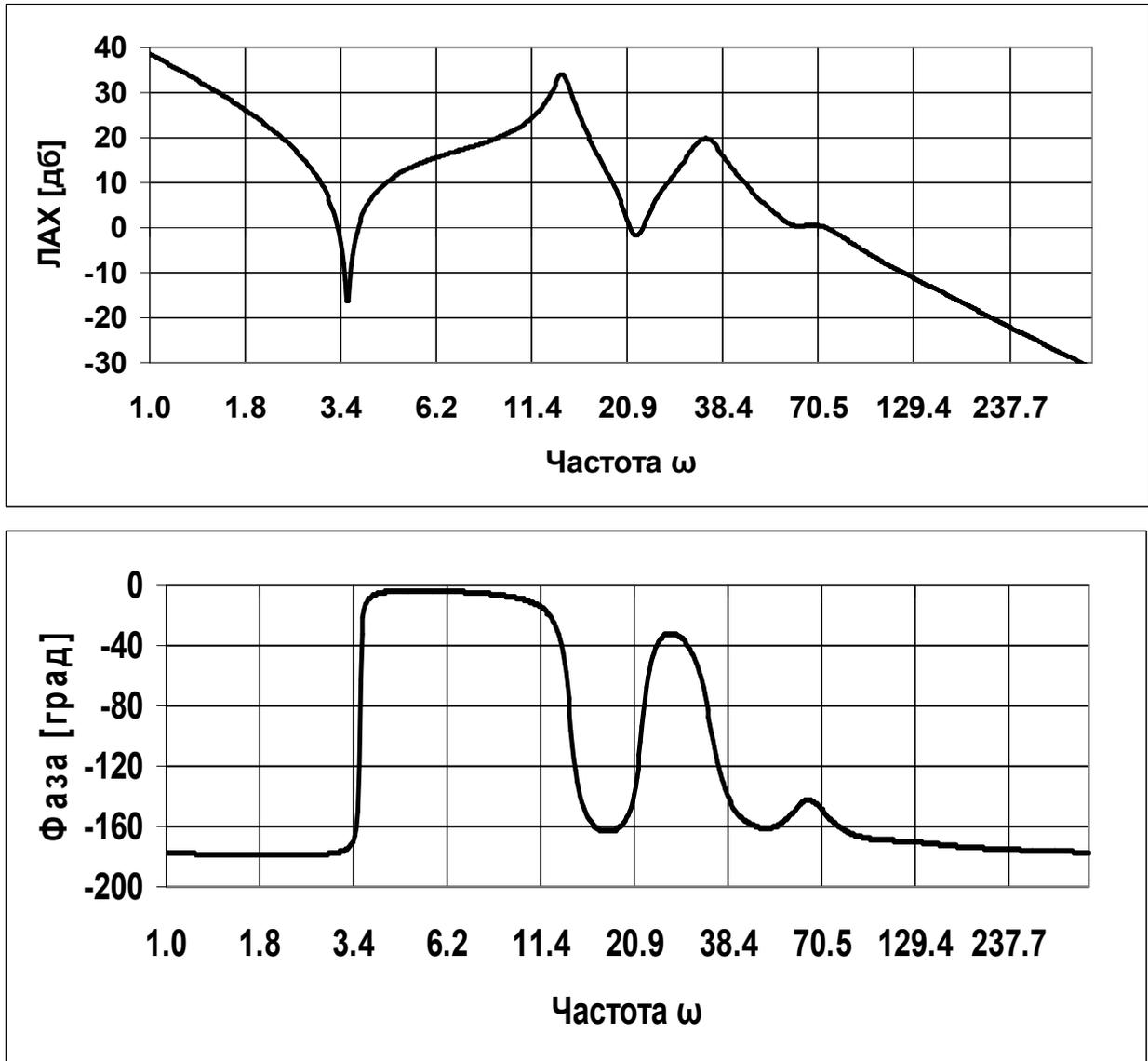


Рис. 3

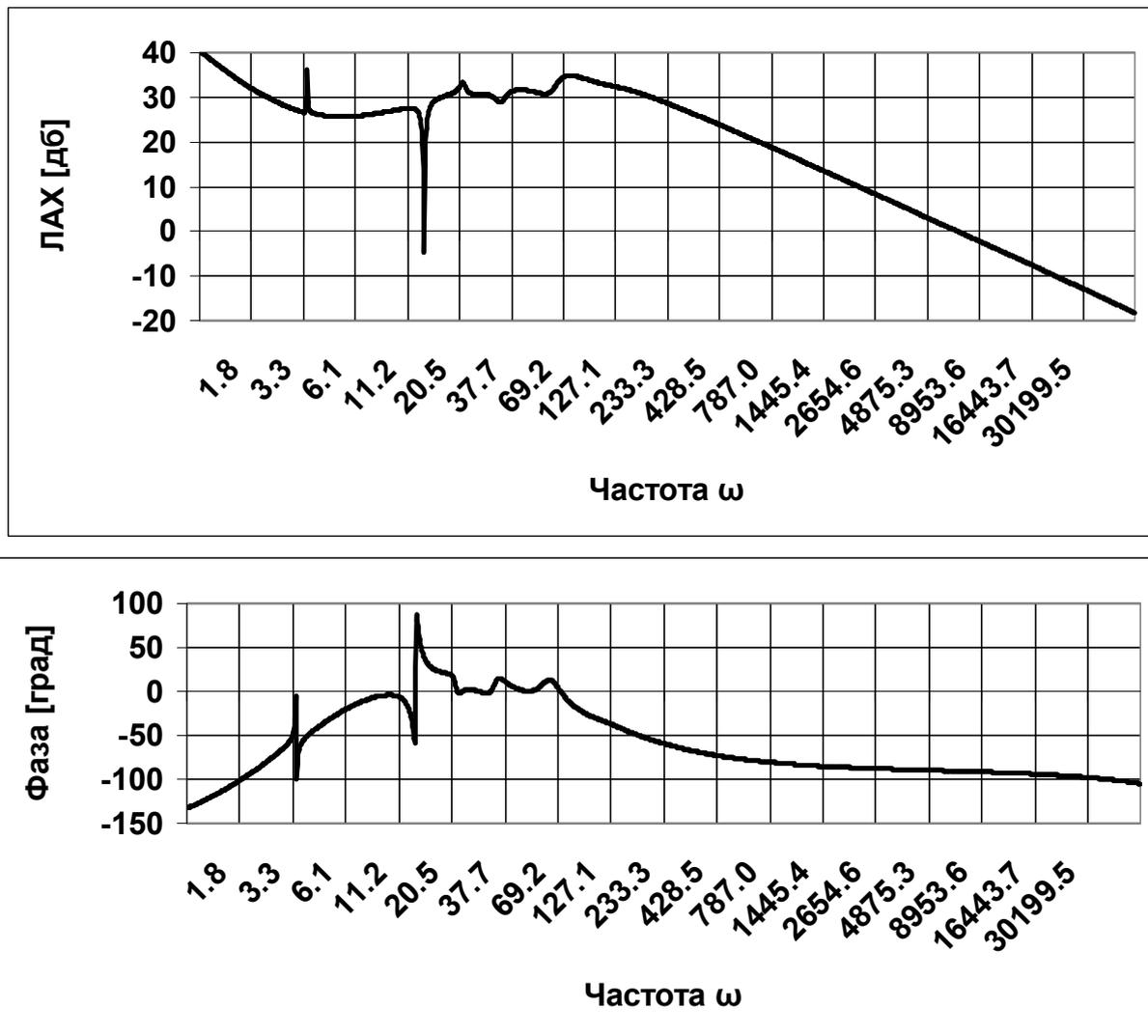


Рис. 4

На рис. 5 сплошной линией изображен переходный процессы по углу  $\alpha$ , а штриховой – по углу  $\alpha_1$  в системе с ЛАФЧХ рис. 4.

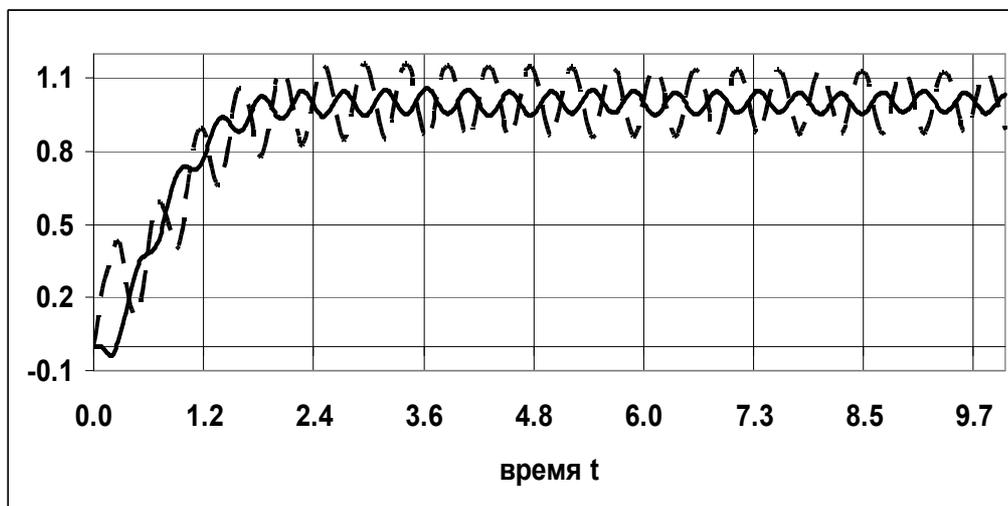


Рис. 5

Для улучшения переходных процессов воспользуемся анализом ЛАФЧХ на рис. 4. Как видно на ЛАФЧХ наблюдается два узких выброса на частотах примерно 3.4 и 13.5. Особенно неприятен выброс на частоте 13.5, дающий отрицательный запас по модулю. Скомпенсируем эти выбросы, изменив параметры  $\xi_1=0.05$  и  $\xi_3=0.01$ , и получим ЛАФЧХ разомкнутой системы.

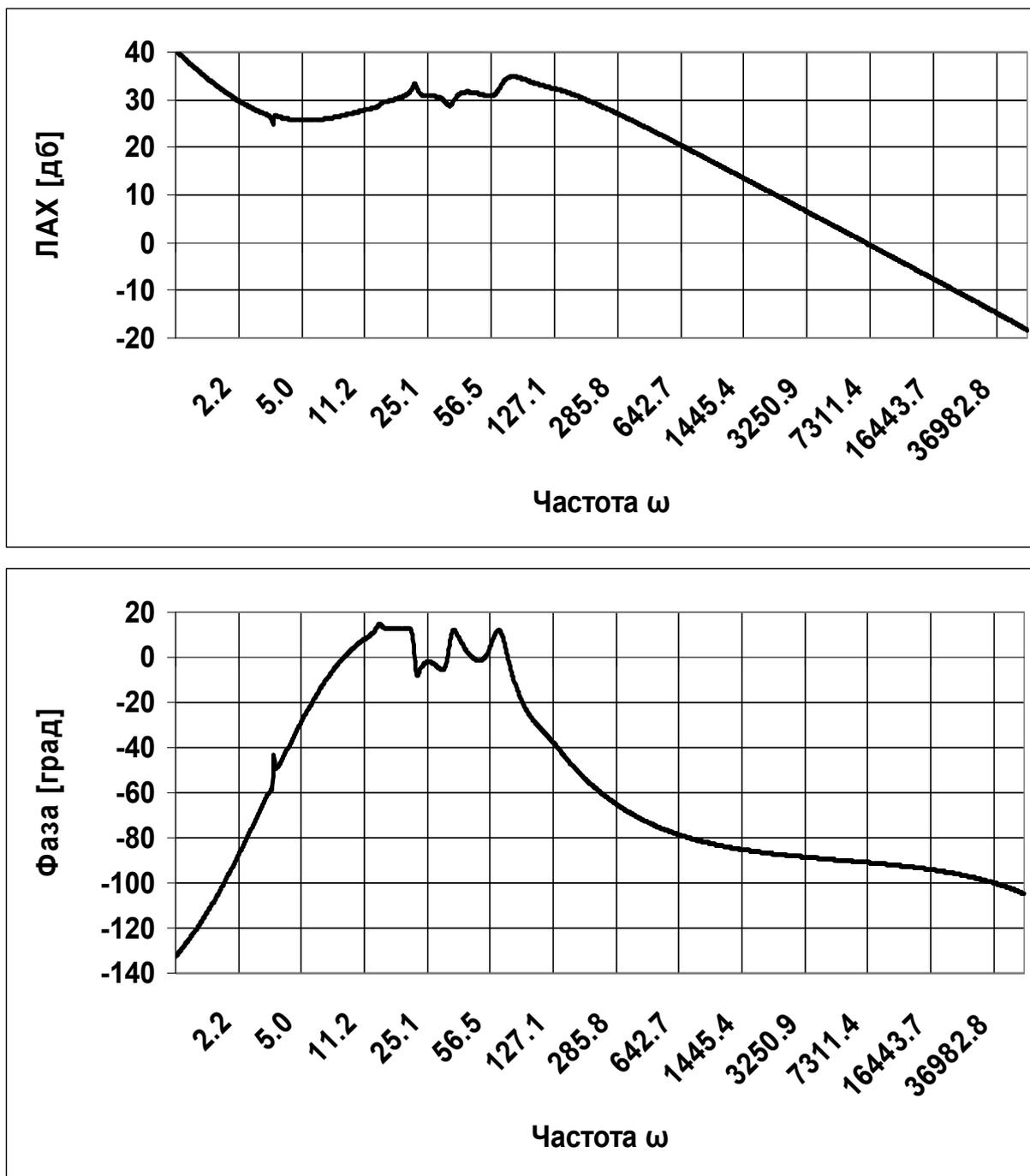


Рис. 6

На рис. 7 сплошной линией изображен переходный процесс по углу  $\alpha$ , а штриховой – по углу  $\alpha_1$  в системе с ЛАФЧХ рис. 6.

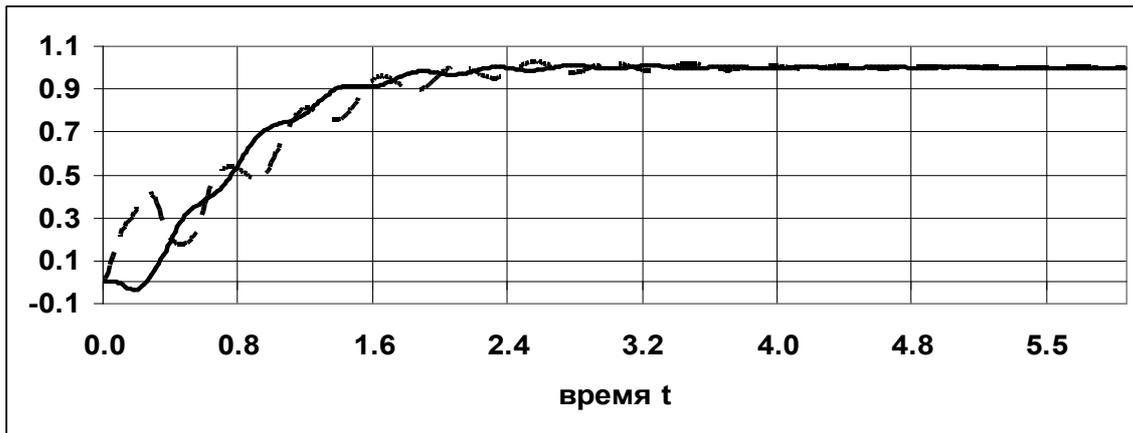


Рис. 7

Как видно из рис. 7 качество переходных процессов существенно повысилось.

В работе [1] приведен пример синтеза регулятора для манипулятора с грузом  $m_2=0.34$ ,  $J_2=0.1$  на конце стержня. Для регулятора  $\Pi(\lambda) = \Pi_0(\lambda) \Pi_k(\lambda)$  в результате синтеза получены следующие значения параметров:

$$T_1=1.36, T_2=0.96, T_3=4.0 \cdot 10^{-3}, T_4=3.81 \cdot 10^{-2}, T_5=1.0 \cdot 10^{-2}, T_6=1.0 \cdot 10^{-4}, \\ T_7=0.2206, \xi_1=1.0 \cdot 10^{-2}, T_8=5.54 \cdot 10^{-2}, \xi_2=5.0 \cdot 10^{-2}, \\ T_9=0.446, \xi_3=4.0 \cdot 10^{-3}, T_{10}=0.1193, \xi_4=1.0 \cdot 10^{-2}.$$

Построим для этих значений параметров ЛАФЧХ.

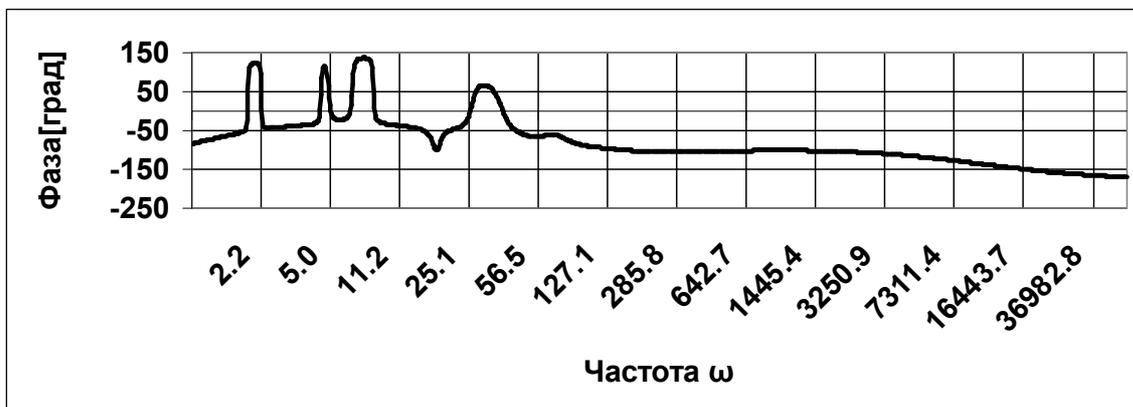
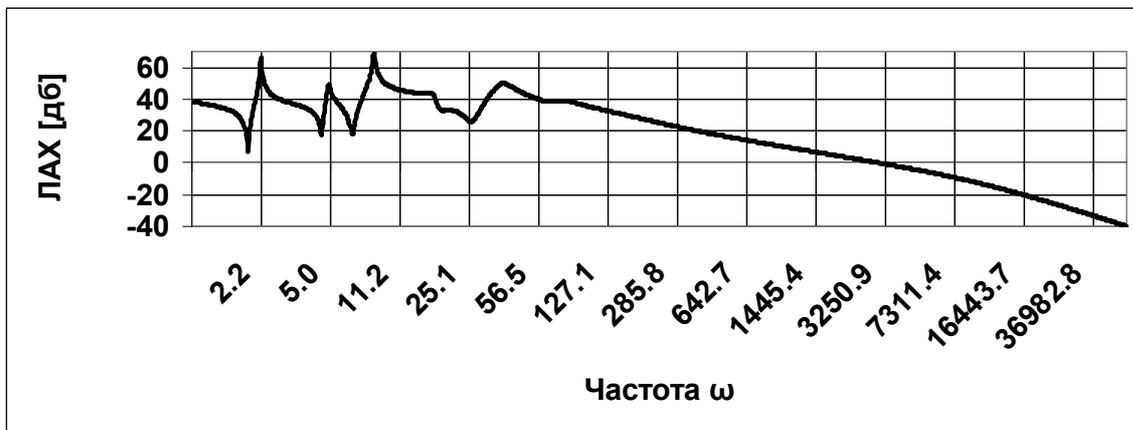


Рис. 8

На рис. 9 сплошной линией изображен переходный процесс по углу  $\alpha$ , а штриховой – по углу  $\alpha_1$  в системе с ЛАФЧХ рис. 8.

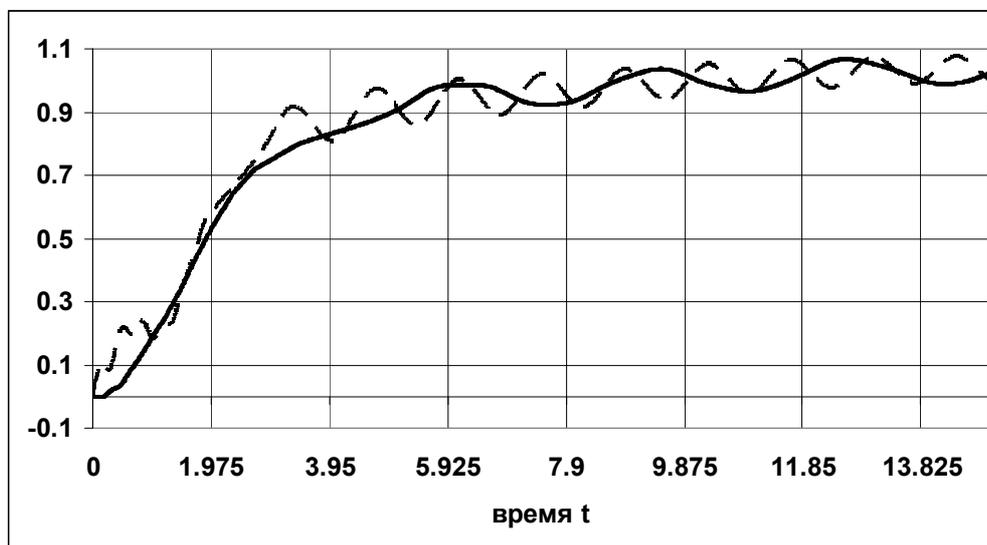


Рис. 9

Как видно из рис. 8 на ЛАФЧХ не произошла компенсации регулятором резких изгибов логарифмической амплитудно-частотной характеристики, обусловленных гибким стержнем с массой на конце. Исправим это упущение.

Исходная ЛАФЧХ манипулятора с массой на конце гибкого стержня без регулятора изображена на рис. 10.

Как следует из рис. 10 масса на конце гибкого стержня в манипуляторе к четырем изгибам ЛАФЧХ, обусловленным гибким стержнем добавляет еще два изгиба ЛАФЧХ. Таким образом, для полной компенсации всех изгибов ЛАФЧХ дополнительно к  $\Pi_k(\lambda)$  требуется добавить колебательное звено и дифференцирующее звено второго порядка

$$\Pi_k(\lambda) = \frac{(T_7^2 \lambda^2 + 2\xi_1 T_7 + 1)(T_8^2 \lambda^2 + 2\xi_2 T_8 + 1)(T_9^2 \lambda^2 + 2\xi_3 T_9 + 1)}{(T_{10}^2 \lambda^2 + 2\xi_4 T_{10} + 1)(T_{11}^2 \lambda^2 + 2\xi_5 T_{11} + 1)(T_{12}^2 \lambda^2 + 2\xi_6 T_{12} + 1)}$$

Используя методы, изложенные в [2], и сохраняя примерно те же запасы устойчивости и частоту среза, что и на рис. 8 можно получить следующие параметры передаточных функций  $\Pi_0(\lambda)$  и  $\Pi_k(\lambda)$

$$T_1=1.36, T_2=0.96, T_3=0, T_4=3.81 \cdot 10^{-2}, T_5=1.0 \cdot 10^{-4}, T_6=0, \\ T_7=0.201, \xi_1=2.5 \cdot 10^{-2}, T_8=5.81 \cdot 10^{-2}, \xi_2=5.0 \cdot 10^{-2}, T_9=2.58 \cdot 10^{-2}, \xi_3=7.0 \cdot 10^{-2}, \\ T_{10}=0.52, \xi_4=5.0 \cdot 10^{-3}, T_{11}=0.153, \xi_5=1.0 \cdot 10^{-2}, T_{12}=3.77 \cdot 10^{-2}, \xi_6=5.0 \cdot 10^{-2}.$$

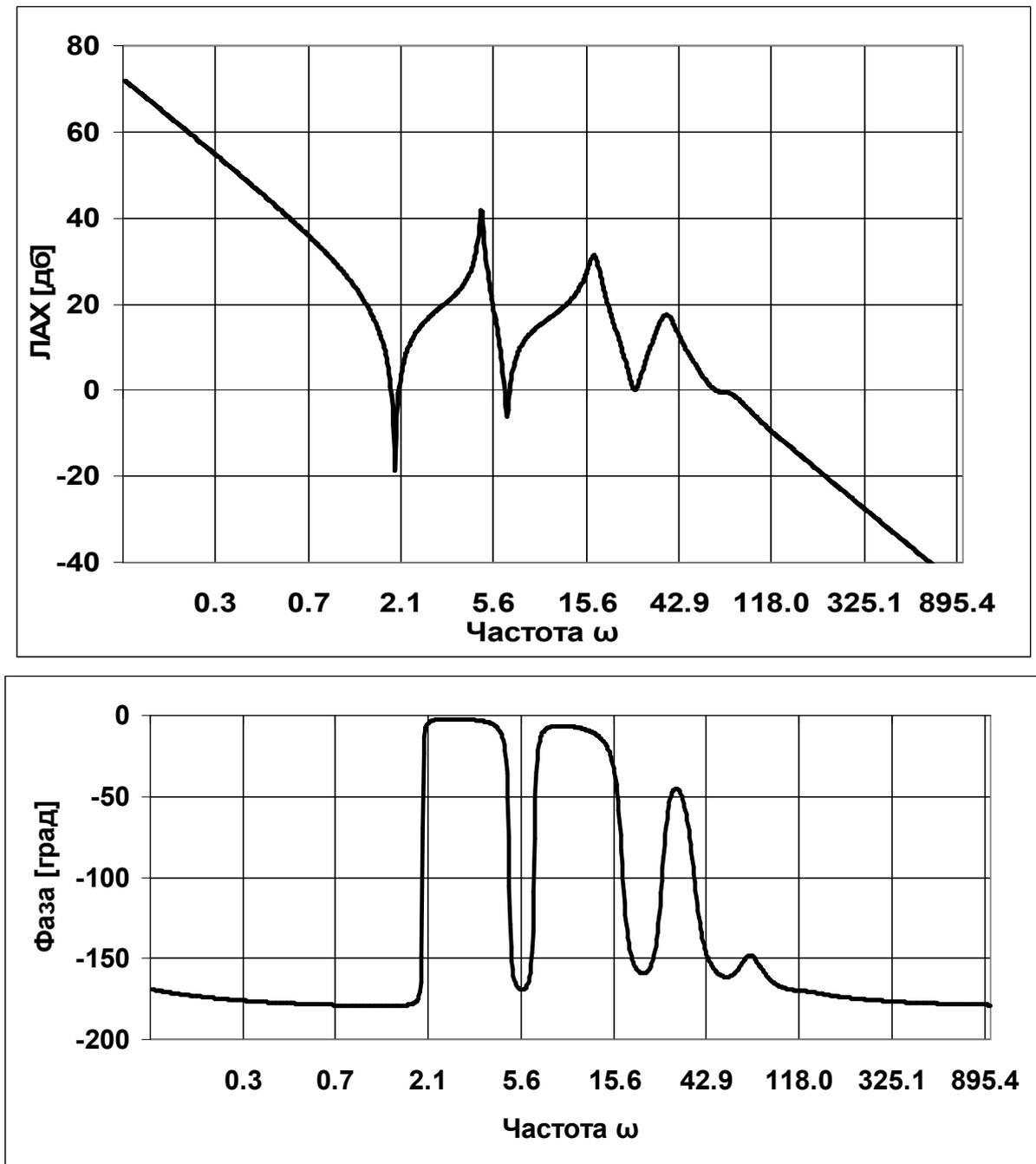


Рис. 10

При таких параметрах корректирующего устройства  $\Pi(\lambda) = \Pi_0(\lambda) \Pi_k(\lambda)$  ЛАФЧХ разомкнутой системы регулирования имеет вид см. рис. 11.

На рис. 12 сплошной линией изображен переходный процесс по углу  $\alpha$ , а штриховой – по углу  $\alpha_1$  в системе с ЛАФЧХ рис.11.

Как видно из рис. 12 произошло повышение качества переходных процессов в сравнении с рис. 9.

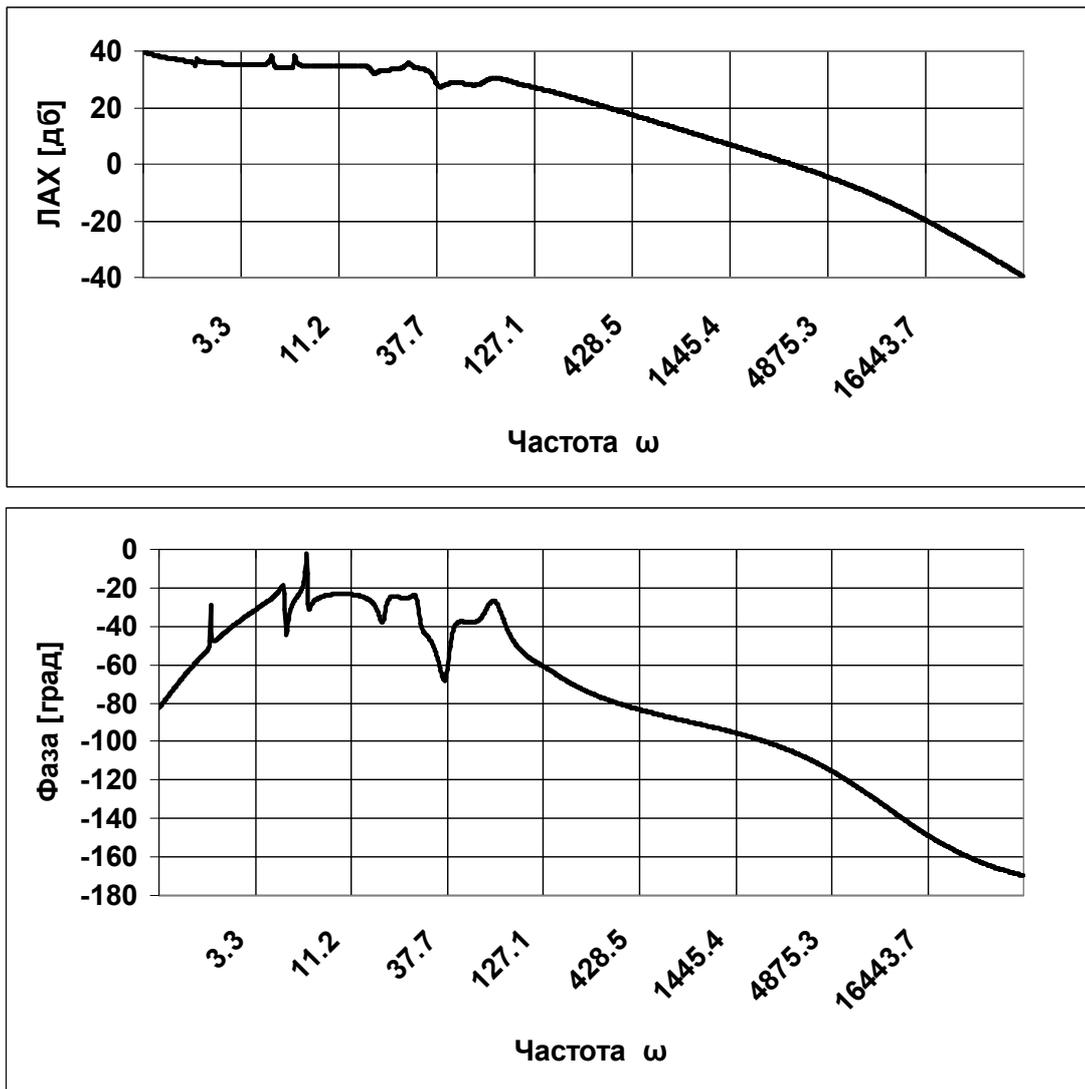


Рис. 11

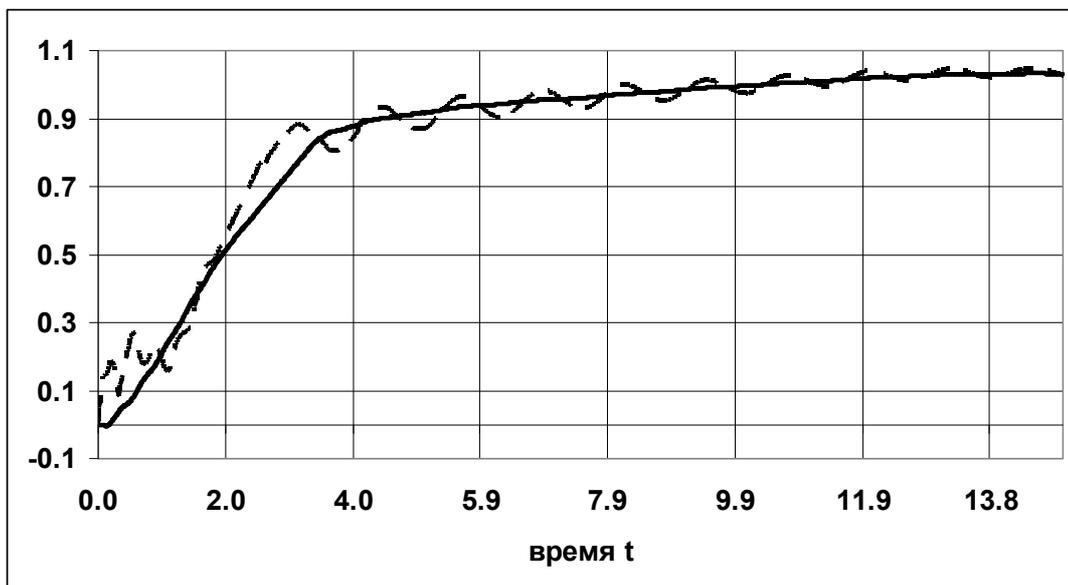


Рис. 12

В результате проведенных в данной статье и в [3] исследований можно утверждать, что метод логарифмических амплитудных и фазовых частотных характеристик является применимым к синтезу регуляторов, по крайней мере, для одномерных дискретно-континуальных систем. Метод прост, нагляден и позволяет значительно сократить время синтеза.

### Литература

1. Андрейченко К.П., Андрейченко Д.К., Смарунь А.Б. Динамическое моделирование линейных дискретно-континуальных систем // ПММ. 2000. т. 64. Вып. 2. С. 183-195.
2. Бессекерский В.А., Попов Е.Н. Теория систем автоматического управления / В.А. Бессекерский, Е.П. Попов – Изд. 4-е, перераб. и доп. – СПб, Изд-во “Профессия”, 2003. – 752 с.
3. Андрейченко К.П., Смарунь А.Б. Синтез методом логарифмических частотных характеристик регулятора газореактивной системы управления движением спутника с упругим стержнем и закрепленным на его конце телом // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2016.– № 2. С. 4-17. URL: [mathmod.esrae.ru/2-9](http://mathmod.esrae.ru/2-9)