Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/15-47
Ссылка для цитирования этой статьи:
Ерофеев В.И., Плехов А.С., Солдатов И.Н. Распространение поверхностной сдвиговой волны вдоль границы раздела упругого полупространства и проводящей вязкой жидкости, взаимодействующей с магнитным полем // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №3.
Выполнено при поддержке Российского научного фонда (грант № 15-19-10026).

УДК 530

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ПРОВОДЯЩЕЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Ерофеев В.И.[1,3], Плехов А.С.[2] , Солдатов И.Н.[3]

[1]Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Россия, Нижний Новгород, erof.vi@yandex.ru
[2]Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Россия, Нижний Новгород, aplehov@mail.ru
[3]Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Россия, Нижний Новгород, erfv@inbox.ru

THE PROPAGATION OF A SURFACE SHEAR WAVE ALONG THE INTERFACE BETWEEN AN ELASTIC HALF-SPACE AND A CONDUCTING VISCOUS FLUID INTERACTING WITH A MAGNETIC FIELD

Erofeev V.I.[1,3], Plekhov A.S.[2], Soldatov I.N.[3]

[1]R.E. Alekseev Nyzhny Novgorod Technical University, Russia, Nyzhny Novgorod, erof.vi@yandex.ru
[2]R.E. Alekseev Nyzhny Novgorod Technical University, Russia, Nyzhny Novgorod, aplehov@mail.ru
[3] Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Russia, Nizhny Novgorod, erfv@inbox.ru

Аннотация. Рассматривается влияние магнитного поля на фазовую скорость, коэффициент затухания и глубину проникновения волнового поля поверхностной сдвиговой волны (ПСВ) на границе раздела упругого изотропного полупространства и проводящей вязкой жидкости.
Ключевые слова: поверхностная сдвиговая волна, упругое полупространство, вязкая проводящая жидкость, магнитное поле.

Abstract. The influence of the magnetic field on the phase velocity, the damping factor, and the depth of penetration of the wave field of the surface shear wave (PSW) at the interface between an

ISSN 2541-9269

elastic isotropic half-space and a conducting viscous liquid are considered.
Keywords: surface shear wave, elastic half-space, viscous conducting liquid, magnetic field.

Примем, что упругое изотропное непроводящее полупространство занимает область z<0. Распространение плоской сдвиговой волны, экспоненциально убывающей от границы раздела, описывается уравнением

$$u_{tt} = c_\tau^2 \Delta u \tag{1}$$

где $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{zz}$, c_τ – скорость сдвиговой волны, u – перемещение вдоль оси y. Направление распространения волны совпадает с осью x.

Однородное постоянное магнитное поле направлено вдоль оси z: $\vec{\mathrm{B}} = \mathrm{B}\,\vec{e}_z$. В этом случае волновой процесс в проводящей вязкой жидкости в МГД-приближении описывается уравнениями [1, 2]

$$\begin{aligned} &\mathrm{v}_t = \nu\Delta \mathrm{v} - \frac{\sigma \mathrm{B}}{\rho}\mathrm{E} - \frac{\sigma \mathrm{B}^2}{\rho}\mathrm{v}, \\ &\operatorname{div}\vec{E} + (\vec{\mathrm{B}}, \operatorname{rot}\vec{\mathbf{v}}) = 0, \\ &\operatorname{rot}\vec{E} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

где $\vec{E}$– вектор напряженности электрического поля, $\mathrm{E} = (\vec{E}, \vec{e}_x)$, V – скорость смещения частиц жидкости вдоль оси y, σ – проводимость жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости.

С использованием электрического потенциала θ, $\vec{E} = \nabla\theta$ первые два уравнения системы (2) запишутся в виде

$$\mathrm{v}_t = \nu\Delta \mathrm{v} - \frac{\sigma \mathrm{B}^2}{\rho}\theta_x - \frac{\sigma \mathrm{B}^2}{\rho}\mathrm{v}, \tag{3}$$

$$\Delta\theta + \mathrm{B}\,\mathrm{v}_x = 0 \tag{4}$$

На границе раздела сред должны выполняться условия

$$\begin{aligned} &u_t\big|_{z=-0} = \mathrm{v}\big|_{z=+0}, \qquad \left.\frac{\partial\theta}{\partial z}\right|_{z=+0} = 0 \\ &\mu\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=-0} = \rho\nu\left.\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z}\right|_{z=+0} \end{aligned} \tag{5}$$

2017, №3
ISSN 2541-9269

(μ– модуль сдвига упругой среды, ρ – плотность жидкости), имеющие физический смысл непрерывности скорости перемещений частиц на границе, непротекания тока через границу и непрерывности сдвиговых напряжений.

Запишем уравнение (3) в векторном виде

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = -\nu\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} + \frac{\sigma B}{\rho}\times$$

$$\times\left\{\left[\mathrm{rot}\nabla\theta, \vec{e}_z\right] + \nabla\left(\nabla\theta, \vec{e}_z\right) - \vec{e}_{z\nabla\theta}\right\} - \frac{\sigma B^2}{\rho}\mathrm{rot}\,\vec{v}$$

$$\vec{\mathrm{v}}_t = \nu\Delta\vec{\mathrm{v}} + \frac{\sigma B}{\rho}\left[\nabla\theta, \vec{e}_z\right] - \frac{\sigma B^2}{\rho}\vec{\mathrm{v}}, \tag{6}$$

(квадратные скобки используются для обозначения векторного произведения) и применим к нему операцию *rot*

Первый член в фигурных скобках, очевидно, равен нулю, а третий член в тех же скобках, используя второе уравнение системы (8.47), преобразуем к виду $\frac{\sigma B^2}{\rho}\vec{e}_z\left(\vec{e}_z, \mathrm{rot}\,\vec{v}\right)$.

Далее еще раз применим операцию *rot*

$$\Delta\left(\vec{v}_t - \nu\Delta\vec{v} + \frac{\sigma B^2}{\rho}\vec{v}\right) + \frac{\sigma B^2}{\rho}\left[\nabla\left(\vec{e}_z, \mathrm{rot}\,\vec{v}\right), \vec{e}_z\right] = 0 \tag{7}$$

Применяя к уравнению (4) последовательно операции *grad* и *rot*, получим

$$\Delta^2\theta - div\left[\vec{\mathrm{B}}, \Delta\vec{v}\right] = 0.$$

Используя выражение для $\Delta\vec{\mathrm{v}}$ из (6) и проводя простейшие преобразования, приходим к уравнению только для одной неизвестной θ

$$\Delta\left(\theta_t - \nu\Delta\theta + \frac{\sigma B^2}{\rho}\theta\right) + \frac{\sigma B^2}{\rho}\left(\vec{e}_z, rot\left[\nabla\theta, \vec{e}_z\right]\right) = 0 \tag{8}$$

Будем искать решение уравнений (2),(3), (4) в виде плоской неоднородной волны, распространяющейся в положительном направлении оси x:

$$v = V(z)\exp(ikx - i\omega t)$$

$$u = U(z)\exp(ikx - i\omega t)$$

$$\theta = \Theta(z)\exp(ikx - i\omega t)$$

ISSN 2541-9269

Подставляя эти выражения в уравнения (7), (8) и (9), получим дифференциальные уравнения для функций $V(z)$, $U(z)$ и $\Theta(z)$.

$$\frac{d^4V}{dz^4}+\left(\frac{i\omega}{\nu}-2k^2-\frac{\sigma B^2}{\rho\nu}\right)\frac{d^2V}{dz^2}+\left(k^4-\frac{i\omega}{\nu}k^2\right)V=0$$
$$\frac{d^2U}{dz^2}+\left(\frac{\omega^2}{c_\tau^2}-k^2\right)U=0 \qquad (9)$$

Уравнение для Θ имеет тот же вид, что и для V. Из четырех линейно независимых решений первого уравнения (9) будут удовлетворять условию убывания к нулю при $z\to+\infty$

$$V=\sum_{j=1}^{2}\hat{V}_j\exp(-\lambda_j z), \qquad j=1,2 \qquad (10)$$

где λ_j – корни с положительной действительной частью алгебраического уравнения

$$\lambda^4+\left(\frac{i\omega}{\nu}-2k^2-\frac{\sigma B^2}{\rho\nu}\right)\lambda^2+k^4-\frac{i\omega k^2}{\nu}=0 \qquad (11)$$

Аналогичное соображение справедливо для U

$$U=\hat{U}\exp(\lambda z)$$
$$\lambda=\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{c_\tau^2}}, \quad \operatorname{Re}\lambda>0.$$

Для Θ справедливо представление в виде суммы двух экспонент, подобное (10)

$$\Theta=\sum_{j=1}^{2}\hat{\theta}_j\exp(-\lambda_j z) \qquad j=1,2$$

Из граничных условий (5) вытекает следующее связующее соотношение для амплитудных факторов $\hat{V}_j,\hat{U},\hat{\theta}_j$.

$$-i\omega\hat{U}=\hat{V}_1+\hat{V}_2$$
$$\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2=0 \qquad (12)$$
$$\mu\lambda\hat{U}=-\rho\nu\left(\lambda_1\hat{V}_1+\lambda_2\hat{V}_2\right)$$

Из первого и третьего соотношений (12) следует

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\mu\lambda-i\omega\rho\nu\lambda_j\right)\hat{V}_j=0 \qquad (13)$$

ISSN 2541-9269

Уравнение (4) определяет следующую связь между амплитудными факторами $\hat{\theta}_j$ и $\hat{V}_j$

$$\left(\lambda_j^2 - k^2\right)^2 \hat{\theta}_j + ik\mathrm{B}\,\hat{V}_j = 0,$$

которое позволяет записать второе соотношение (12) в виде

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 - k^2}\hat{V}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_2^2 - k^2}\hat{V}_2 = 0 \qquad (14)$$

Условие совместности однородных уравнений (13) и (14)

$$\lambda_2\left(\lambda_1^2 - k^2\right)\left(\mu\lambda - i\omega\rho\nu\lambda_1\right) - \lambda_1\left(\lambda_2^2 - k^2\right)\times$$
$$\times\left(\mu\lambda - i\omega\rho\nu\lambda_2\right) = 0 \qquad (15)$$

является дисперсионным уравнением для сдвиговой поверхностной волны.

Дисперсионное уравнение (15) имеет довольно-таки «непрозрачный» вид, однако его анализ облегчает учет порядка входящих в него величин, позволяющий написать приближенные формулы для действительной k_r и мнимой β частей волнового числа $k = k_r(\omega) + i\beta(\omega)$ в его зависимости от циклической частоты.

Интересен случай, когда влияние магнитного поля больше влияния сил вязкости и сил инерции. Как видно из выражения (11), глубину проникновения волнового поля в жидкость определяют безразмерные комплексы $\dfrac{\sigma\mathrm{B}^2 c_\tau^2}{\rho\nu\omega^2}$ и $\dfrac{c_\tau^2}{\nu\omega}$ типа чисел Гартмана и Рейнольдса. Величина первого комплекса характеризует отношение пондеромоторной силы к силе вязкости, а второго – силы инерции к силе вязкости. Введем обозначения $Ha^2 = \dfrac{\sigma B^2 c_\tau^2}{\rho\nu\omega^2}$, $\mathrm{Re} = \dfrac{c_\tau^2}{\nu\omega}$.

Когда $Ha^2 \gg 1$ и $Ha^2 > \mathrm{Re}$ справедливы следующие приближенные выражения для λ_1 и λ_2

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{\sigma\mathrm{B}^2}{\rho\nu}}\left(1 + \frac{\rho^2\omega^2}{8\sigma^2\mathrm{B}^4}\right) + i\sqrt{\frac{\rho}{\sigma\mathrm{B}^2\nu}}\,\frac{\omega}{2},$$
$$\lambda_2 \approx \sqrt{\frac{\rho\rho_s}{2\mu\sigma\mathrm{B}^2}}\,\omega^{3/2} + i\sqrt{\frac{\rho\rho_s}{\mu\sigma\mathrm{B}^2}}\,\omega^{3/2}, \qquad (16)$$

где ρ_s – плотность упругого тела. В проводящей жидкости при наличии магнитного поля существуют два неоднородных волновых поля, быстро убывающих от границы раздела, а не одно, как в случае непроводящей

ISSN 2541-9269

жидкости. Как показывают расчеты, основную энергию несет поле с показателем экспоненты λ_1. Поле с показателем экспоненты λ_2 на низких частотах значительно глубже проникает в жидкость, но плотность энергии этого поля очень невелика.

При обычных порядках параметров, характеризующих твердую среду и жидкий металл $\rho, \rho_s \approx 10^3$ кг/м^3, $\nu \approx 10^{-6}$ м^2/с, $\mu \approx 10^{-10}$ Н/м^2, $\sigma \approx 10^6$ См/м в сильном магнитном поле В ≈ 1 Тл для λ_1 и λ_2 имеем оценку в единицах СИ

$$\lambda_1 \approx 10^4\left(1+10^{-7}\omega^2\right)+i10\omega,$$
$$\lambda_2 \approx 10^{-5}\omega^{3/2}+i10^{-5}\omega^{3/2}.$$

Здесь опущены единицы размерности у числовых величин. Приведенные оценки позволяют записать дисперсионное уравнение (8.60) в следующем приближенном виде

$$\sqrt{\mu^2k^2-\omega^2\rho_s\mu-i\omega\rho\nu\left[\sqrt{\frac{\sigma \mathrm{B}^2}{\rho\nu}}\left(1+\frac{\rho^2\omega^2}{8\sigma^2\mathrm{B}^4}\right)+\frac{i}{2}\omega\sqrt{\frac{\rho}{\sigma\mathrm{B}^2\nu}}\right]}\approx 0 \tag{17}$$

Не представляет особой сложности из уравнения (8.62) записать выражение для действительной и мнимой частей волнового числа. Однако эти выражения остаются все еще достаточно длинными. Возможно дальнейшее упрощение их при учете того, что даже в сильных магнитных полях и при высокой проводимости жидкости очень малы безразмерные комплексы $\dfrac{\nu\rho\sigma\,\mathrm{B}^2}{\mu\rho_s}$ и $\dfrac{\nu^2\rho^4\omega^2}{4\mu^2\rho_s^2}$ (второй безразмерный комплекс мал, если циклическая частота не превышает 10^{10} Гц). Разложение в ряд по малым безразмерным комплексам и удерживание первых слагаемых позволяет записать следующие приближенные выражения для действительной части волнового числа и коэффициента затухания

$$k_r \approx \frac{\omega}{c_\tau}\left(1-\frac{\nu^2\rho^2\left(4\rho_s^2-\rho^2\right)\omega^2+4\mu\rho_s\nu\rho\sigma\,\mathrm{B}^2}{8\mu^2\rho_s^2}\right),$$
$$\beta \approx \frac{\nu\rho^2\omega^2}{2\mu^{3/2}\rho_s^{1/2}}. \tag{18}$$

Выражение для коэффициента затухания имеет тот же вид, что и в отсутствие магнитного поля. Как видно из формул (18), влияние сильного магнитного поля на фазовую и групповую скорости сдвиговой волны превышает влияние вязкости на низких частотах. На рис.1 построена зависимость безразмерной скорости ПСВ $\dfrac{c-c_\tau}{c_\tau}$ от безразмерного комплекса $Ha^2=\dfrac{\sigma\mathrm{B}^2c_\tau^2}{\rho\nu\omega^2}$, при следующих трех значениях числа $\mathrm{Re}=\dfrac{c_\tau^2}{\nu\omega}$:

2017, №3
ISSN 2541-9269

$1{,}5\cdot10^{10}$, 10^{10}, $0{,}5\cdot10^{10}$ и отношении плотности жидкости и твердого тела $r=\dfrac{\rho}{\rho_s}$, равном 0,5.

Рис.2 демонстрирует поведение безразмерного коэффициента затухания $\dfrac{\beta c_\tau 2\pi}{\omega}$ от Re, когда r принимает значения 0,5; 0,35; 0,2.

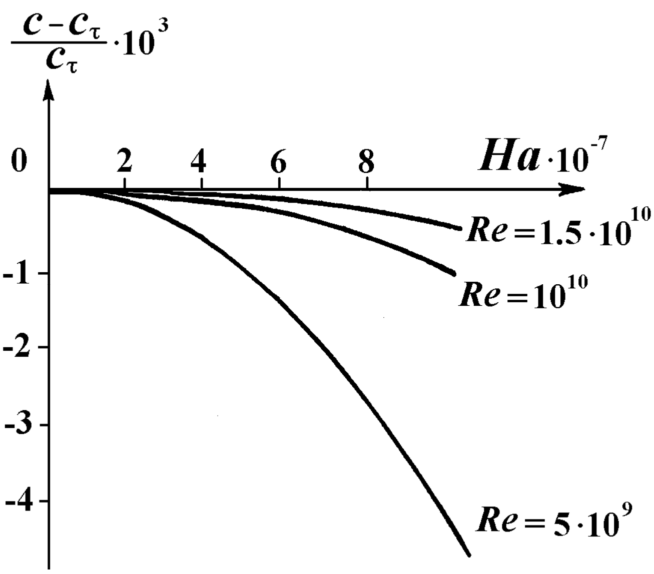

Рис.1. Зависимость скорости распространения поверхностной сдвиговой волны от *Ha*

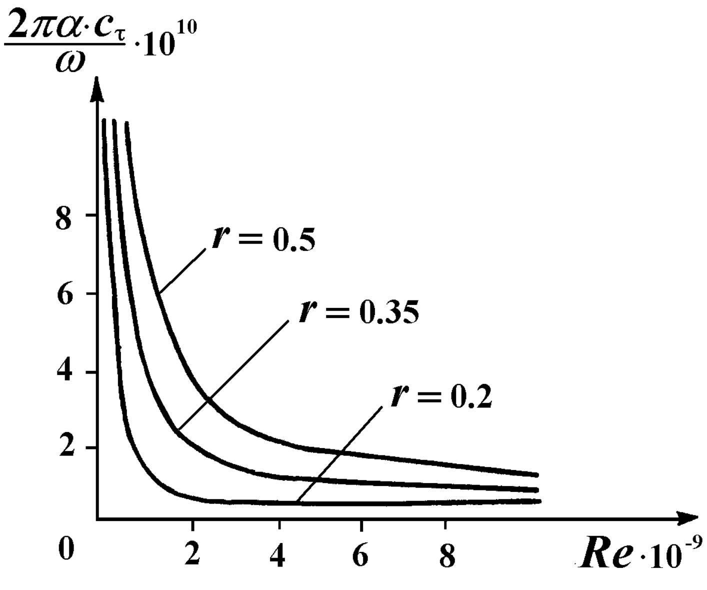

Рис.2. Зависимость коэффициента затухания поверхностной сдвиговой волны от *Re*

В упругом полупространстве убывание амплитуды поверхностной сдвиговой волны при удалении от границы с проводящей жидкостью на низких

ISSN 2541-9269

частотах $\left(\frac{\omega}{2\pi} < 10^3\,\text{Гц}\right)$ характеризуется реальной частью показателя экспоненты $\operatorname{Re}(\lambda) \approx \frac{\nu^{1/2}\rho^{3/2}\omega^2}{2\mu\sigma^{1/2}B}$.

При принятых значениях параметров $\operatorname{Re}(\lambda) \approx 10^{-12}\omega^2$. В то же время отсутствие магнитного поля

$$\operatorname{Re}(\lambda) \approx \frac{\nu^{1/2}\rho\omega^{3/2}}{\sqrt{2}\mu} \tag{19}$$

и имеет приближенную оценку $\operatorname{Re}(\lambda) \approx 10^{-10}\omega^{3/2}$.

Таким образом, магнитное поле уменьшает спадание амплитуды волнового поля вглубь упругого тела. При частотах более высоких $\left(\frac{\omega}{2\pi} > 10^3\,\text{Гц}\right)$, величина показателя λ, характеризующего экспоненциальное убывание волнового поля вглубь упругой среды при наличии магнитного поля, быстро приближается к значению λ, когда магнитное поле отсутствует.

В заключение отметим следующее. Магнитное поле существенно меняет структуру волнового поля сдвиговой поверхностной волны в жидкости на низких частотах и практически не влияет на коэффициент затухания СПВ. Волновое поле глубже проникает в упругое тело под влиянием магнитного поля, что представляется нежелательным с точки зрения ультразвуковой дефектоскопии поверхностей невысоких частот.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 15-19-10026).

Литература

1. *Селезов И.Т., Корсунский С.В.* Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. Киев: Наукова думка, 1991. 200 с.
2. *Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. 320 с.