Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/15-48
Ссылка для цитирования этой статьи:
Ерофеев В.И., Мальханов А.О., Титов Д.Ю. Дисперсия и затухание магнитоупругих волн // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №3.
Выполнено при поддержке Российского научного фонда (грант № 15-19-10026).

УДК 530

ДИСПЕРСИЯ И ЗАТУХАНИЕ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН

Ерофеев В.И.[1,2], Мальханов А.О.[2], Титов Д.Ю.[3]

[1]Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Россия, Нижний Новгород, erof.vi@yandex.ru
[2]Институт проблем машиностроения Российской академии наук, Россия, Нижний Новгород, alexey.malkhanov@gmail.com
[3]Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Россия, Нижний Новгород, era@nntu.ru

DISPERSION AND ATTENUATION OF MAGNETOELASTIC WAVES

Erofeev V.I.[1,2], Malkhanov A.O.[2], Titov D.Yu.[3]

[1]R.E. Alekseev Nyzhny Novgorod Technical University, Russia, Nyzhny Novgorod, erof.vi@yandex.ru
[2]Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Russia, Nizhny Novgorod, alexey.malkhanov@gmail.com
[3]R.E. Alekseev Nyzhny Novgorod Technical University, Russia, Nyzhny Novgorod, era@nntu.ru

Аннотация. Исследовано влияние внешнего магнитного поля и конечной электропроводности материала на дисперсионные и диссипативные характеристики продольной упругой волны, выражающееся, в частности, в формировании ускоренной и замедленной волн по отношению к волне, распространяющейся в материале с бесконечной проводимостью.
Ключевые слова: магнитоупругая волна, дисперсия, затухание.

Abstract. The effect of an external magnetic field and the finite electrical conductivity of a material on the dispersion and dissipative characteristics of a longitudinal elastic wave is studied, which is manifested, in particular, in the formation of accelerated and decelerated waves with respect to a wave propagating in a material with infinite conductivity.
Keywords: magnetoelastic wave, dispersion, damping.

ISSN 2541-9269

Динамические процессы в упругой среде, характеризуемой вектором перемещений $\vec{u}$, и находящейся во внешнем магнитном поле с вектором напряженности $\vec{H}$ описывается системой уравнений [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \dfrac{1}{4\pi\rho}\left[rot\,\vec{H}, \vec{H}\right]_i, \\ \dfrac{\partial H_i}{\partial t} = rot_i\left[\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \vec{H}\right], \\ div\,\vec{H} = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

где ρ - плотность среды, σ_{ik} - тензор напряжений.

Магнитное поле представим в виде суммы постоянной составляющей (H_0) и малого возмущения ($\vec{h}$) : $\vec{H} = H_0\vec{n} + \vec{h}$,

Рассмотрим распространение продольной волны в линейной среде. При этом будем полагать, что внешнее постоянное магнитное поле с напряженностью H_0 перпендикулярно направлению распространения волны. В этом случае

$$\vec{u} = (u_1, 0, 0) \equiv u(x,t); \vec{h} = (0, 0, h_3) \equiv h(x,t); \vec{H} = (0, 0, H_0 + h),$$

и система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{H_0}{4\pi\rho}\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + H_0\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \dfrac{c^2}{4\pi\sigma}\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

где c_0 - скорость продольной волны в отсутствии магнитного поля, c - скорость света, σ - проводимость.

Рассмотрим сначала случай, когда магнитное поле стационарно, т.е. $h(x,t) \equiv h(x)$. Система (2) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{H_0}{4\pi\rho}\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{4\pi\sigma H_0}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \end{cases} \qquad (3)$$

Интегрируя последнее уравнение системы (3) по x, и полагая постоянную интегрирования равной нулю, систему (3) сведем к уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sigma H_0}{c^2 \rho} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (4)$$

Откуда видно, что внешнее магнитное поле H_0 приводит к возникновению затухания (вязкого трения).

Для дальнейшего анализа, приведем систему (2) к безразмерному виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} - \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + C \dfrac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = 0, \\ \dfrac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} - \dfrac{1}{\Sigma} \dfrac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial \tilde{x}^2} = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

где $C = \dfrac{c_A^2}{c_0^2}$ - безразмерная скорость, $\Sigma = \dfrac{\sigma}{\sigma_0}$ - безразмерная проводимость,

$c_A = \sqrt{\dfrac{H_0^2}{4\pi\rho}}$ - скорость волны Альфвена.

Полагая, что $\tilde{u}(x,t)$ и $\tilde{h}(x,t)$ - это гармонические волны вида

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 e^{i(\omega t - kx)}, \qquad (6)$$

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

подставим выражения (6) в систему (5), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\tilde{u}_0$ и $\tilde{h}_0$. Приравнивая детерминант полученной системы к нулю, получим связь волнового числа и частоты продольной волны деформации при наличии магнитного поля, которая представляет собой комплексное биквадратное по волновому числу уравнение:

$$\frac{1}{\Sigma} k^4 - \left(\frac{1}{\Sigma}\omega^2 - i\omega(1+C)\right)k^2 - i\omega^3 = 0 \qquad (7)$$

Для идеально проводящего тела ($\Sigma = \infty$) уравнение (7) сводится к виду:

$$(1+C)k^2 + \omega^2 = 0 \qquad (8)$$

Из (8) видно, что магнитное поле определяет величину фазовой скорости $V_\Phi = \sqrt{1+C}$, чем больше величина магнитного поля, тем больше фазовая скорость волны.

ISSN 2541-9269

Конечная проводимость среды ($\Sigma \neq \infty$) приводит к появлению мнимой части волнового числа, которая характеризует затухание волны. Результаты численного решения уравнения (7) для конечной проводимости представлены на рис.1-3. Расчет проводился при следующих значениях безразмерных скорости и проводимости: C=0.1, Σ=2. Было учтено, что величина $C = \dfrac{c_A^2}{c_0^2} < 1$, поскольку скорость волны Альфвена, как правило, меньше скорости продольной волны.

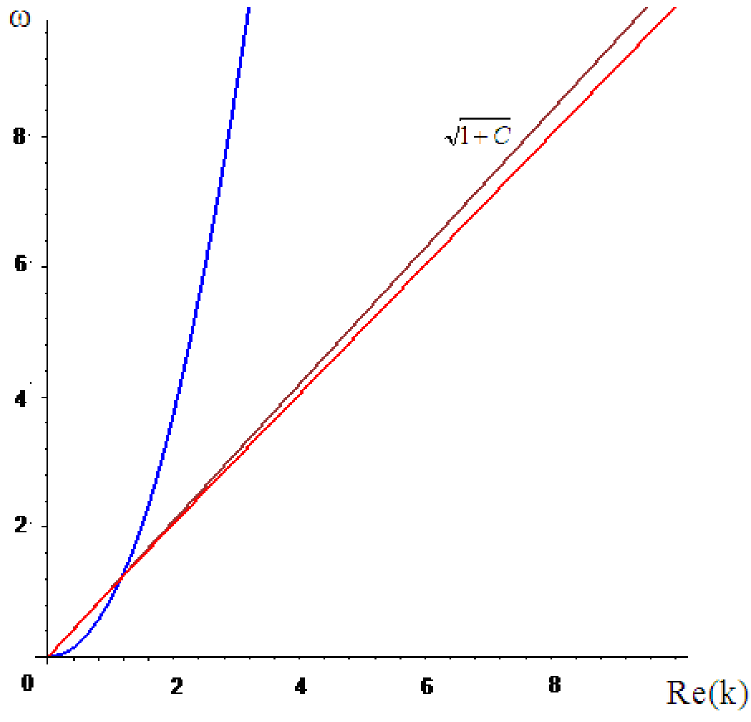

Рис.1.

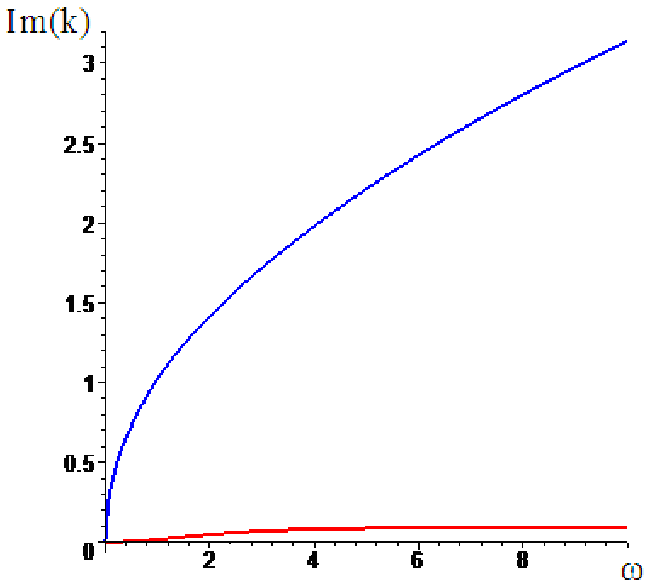

Рис.2.

ISSN 2541-9269

На рис.1 для сравнения представлена также зависимость волнового числа от частоты для случая бесконечной проводимости. Видно, что в случае конечной проводимости имеется две волны, причем одна из них замедлена, а вторая ускорена относительно волны, соответствующей среде с бесконечной проводимостью.

На рис.3 изображены графики отношений действительных частей волновых чисел к мнимым. Видно, что первая волна распространяется почти без затухания и, с ростом частоты действительная часть волнового числа значительно преобладает над мнимой. Вторая волна распространяется также почти без затухания, но с ростом частоты преобладание действительной части волнового числа над мнимой уменьшается.

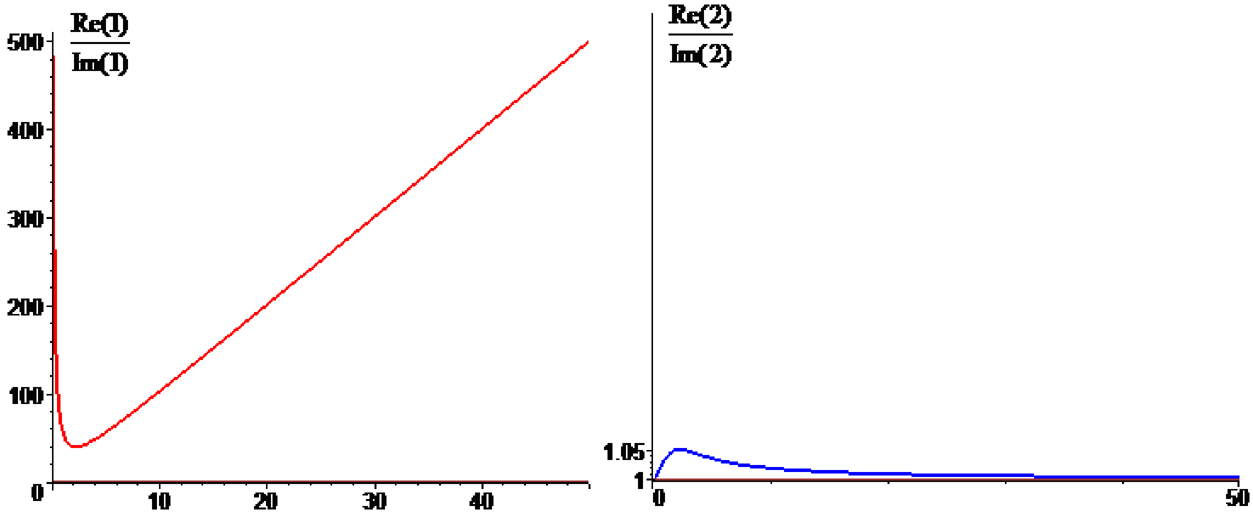

Рис.3.

Фазовая скорость первой волны изображена на рис.4. При нулевой частоте она совпадает с фазовой скоростью продольной волны в среде с бесконечной проводимостью и с ростом частоты стремится к 1, которой в «размерных» координатах соответствует скорость продольной волны c_0. Таким образом, магнитное поле приводит к увеличению фазовой скорости первой волны при нулевой частоте.

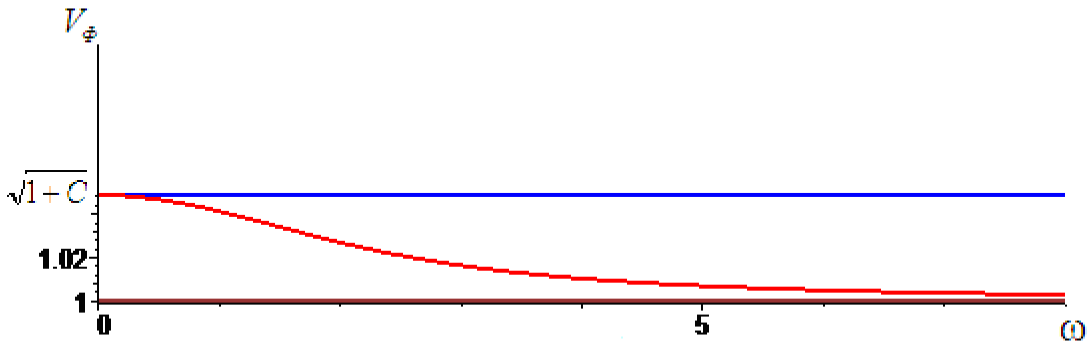

Рис.4

Фазовая скорость второй волны растет с ростом частоты рис. 5.

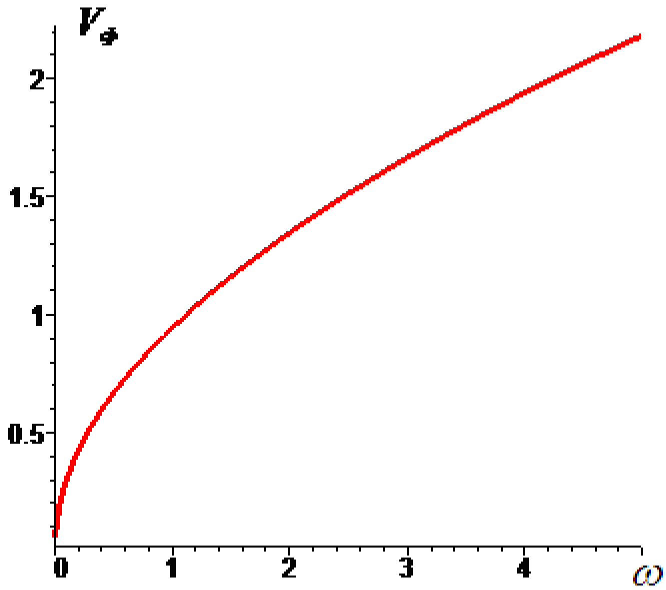

Рис.5.

Рассмотрим систему (5) при $C=0$. В этом случае её можно свести к уравнению для возмущения магнитного поля h:

$$\frac{1}{\Sigma}\frac{\partial^4 \tilde{h}}{\partial x^2 \partial t^2}-\frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial t^3}-\frac{1}{\Sigma}\frac{\partial^4 \tilde{h}}{\partial x^4}+\frac{\partial^3 \tilde{h}}{\partial x^2 \partial t}=0 \qquad (9)$$

Подставим выражение для $\tilde{h}$ из (6) получим связь волнового числа и частоты продольной волны деформации для рассматриваемого случая:

$$\frac{1}{\Sigma}k^4-(\frac{1}{\Sigma}\omega^2-i\omega)k^2-i\omega^3=0 \qquad (10)$$

Решая это уравнение, получим:

$$k=\pm\omega, k=\pm\sqrt{-\frac{i\omega}{\Sigma}} \qquad (11)$$

Откуда видно, что поведение первой волны аналогично поведению продольной волны в среде при отсутствии внешнего магнитного поля. Частотные зависимости действительной и мнимой частей волнового числа второй волны изображены на рис. 6-7.

Отношение действительной к мнимой части волнового числа второй волны постоянно и равно 1. Фазовая скорость этой волны растет с ростом частоты как изображено на рис. 8.

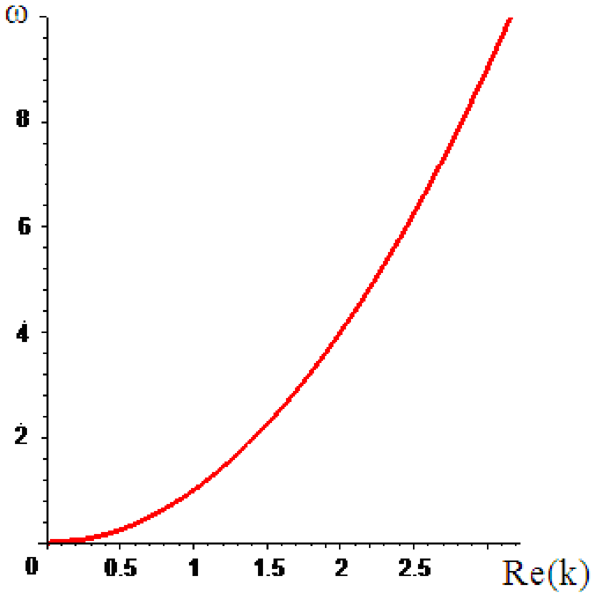

Рис.6.

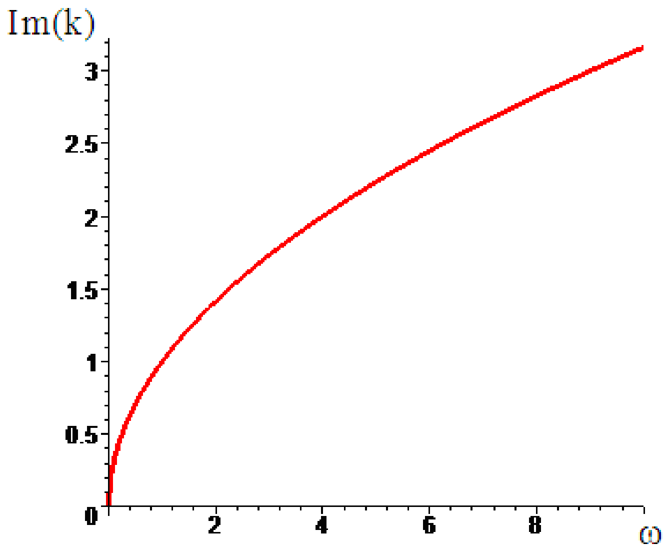

Рис.7.

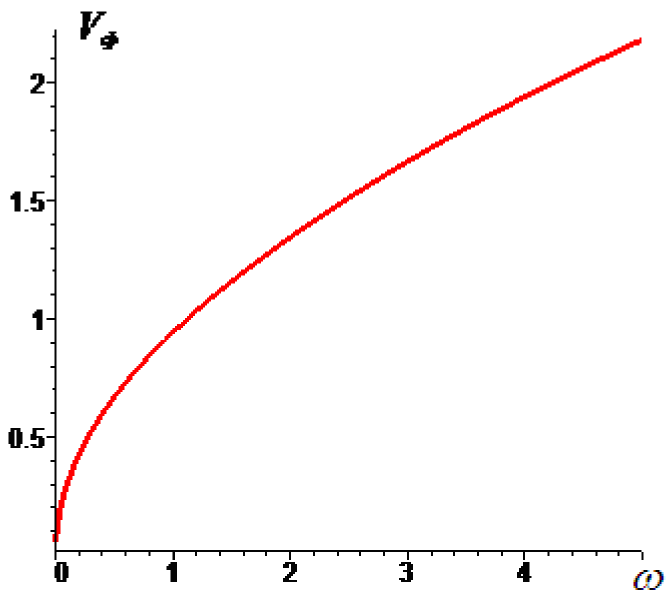

Рис.8.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 15-19-10026).

Литература

1. *Bagdoev A.G., Erofeyev V.I., Shekoyan A.V.* Wave Dynamics of Generalized Continua. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg. 2016. 274 p.