

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/15-50](http://mathmod.esrae.ru/15-50)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Агеев Р.В., Евдокимова Е.В., Ковалева И.А., Могилевич Л.И. Динамика осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубе кругового и кольцевого сечений // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №3.

*Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 16-01-00175а.*

УДК 681.03.06:531.383:532.516

## ДИНАМИКА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ ТРУБЕ КРУГОВОГО И КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЙ

Агеев Р.В.<sup>1</sup>, Евдокимова Е.В.<sup>2</sup>, Ковалева И.А.<sup>3</sup>, Могилевич Л.И.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Россия, Саратов, r255@mail.ru

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Россия, Саратов, eev2106@mail.com

<sup>3</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Россия, Саратов, irinakovaleva1406@gmail.com

<sup>4</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Россия, Саратов, mogilevich@sgu.ru

## THE DYNAMICS OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID AXISYMMETRIC FLOW IN ELASTIC PIPE OF CIRCULAR AND ANNULAR CROSS-SECTIONS

Ageev R.V.<sup>1</sup>, Evdokimova E.V.<sup>2</sup>, Kovaleva I.A.<sup>3</sup>, Mogilevich L.I.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, r255@mail.ru

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov,  
eev2106@mail.com

<sup>3</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov,  
irinakovaleva1406@gmail.com

<sup>4</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov,  
mogilevich@sgu.ru

**Аннотация.** Рассматриваются задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости в упругой цилиндрической оболочке под воздействием некоторых факторов, как с круговым так и кольцевым сечением. Во всех этих задачах имеются источники движения систем «жидкость- упругое тело». Для выявления динамических характеристик систем необходимо решать связанные задачи динамики упругих оболочек и вязкой несжимаемой жидкости.

Упрощающими задачу факторами являются малость радиуса оболочки по сравнению с её длиной, как в теории смазки. В получающихся задачах гидроупругости вводится ещё предположение о малости прогибов оболочки по сравнению с радиусом оболочки или толщиной слоя жидкости, но не с толщиной оболочки. В этих условиях уравнения гидродинамики линеаризуются. Уравнения динамики упругих элементов остаются нелинейными, если таковыми были изначально. При отсутствии возможности найти точное решение, применяется метод итерации для решения уравнений гидродинамической теории смазки.

**Ключевые слова:** вязкая жидкость, упругие оболочки, колебания, волны.

**Abstract.** The problems of viscous incompressible liquid movement in an elastic cylinder shell as of circular, as well as of annular cross-sections under the impact of some factors are considered. All these problems contain the systems “liquid – elastic body” movement sources. To reveal dynamic characteristic of these systems, it is necessary to solve the connected problems of an elastic shell and viscous incompressible liquid dynamics. The factor, making the problem simpler, is a small size of a shell radius in comparison with its length, as in lubrication theory. The problems under consideration contain this supposition about a small size of the shell sagging in comparison with a shell radius, or liquid layer thickness, but not with a shell thickness. Under these conditions hydrodynamics equations become linear. The elastic elements dynamics equations remain non-linear, if they were such initially. If it is not possible to find the exact solution, the iteration method for solving the lubrication theory hydrodynamics equations applied.

**Keywords:** viscous liquid, elastic shell, oscillations, waves.

В случае линейной теории оболочек и в предположении гармонических по времени воздействиях на систему, решение задачи может определяться в виде гармонической зависимости всех параметров задачи по времени. Это возможно в силу влияния вязкости жидкости, которая приводит к демпфированию колебаний и быстрому затуханию по времени решения из-за начальных условий и выходу на стационарные колебания.

Эти условия позволяют найти точные решения линеаризованных уравнений механики жидкости, записанных в виде уравнений теории смазки, но с учётом локального члена инерции для любых значений колебательного (смазочного) числа Рейнольдса оставаясь в рамках ламинарного движения.

В указанных случаях нормальное напряжение жидкости (давление) на поверхности упругого тела значительно больше касательного напряжения и последним обычно пренебрегают [1-15].

Рассмотрим возможность получения приближённого значения решения уравнений динамики жидкости методом итерации, пренебрегая на первом шаге локальным членом инерции и учитывая его на втором шаге итерации. При этом можно доказать, что метод итерации сходится при условии, что колебательное число Рейнольдса меньше единицы [1]. Этот подход позволяет отказаться от требования гармонического закона по времени всех параметров жидкости и упругих элементов. Появляется возможность решать нелинейные уравнения динамики оболочек или при негармонических законах изменения по времени источников движения.

На рисунках 1,2 представлены системы «жидкость - упругое тело». На рис. 1 представлена упругая оболочка с жидкостью 3 внутри [5]. На рис 2 представлены две соосные оболочки с жидкостью между ними [6,7,14].

Для упругой оболочки (рис. 1) внутренний радиус оболочки 2 значительно меньше её длины, то есть  $R \ll l$  и вводится малый параметр  $\psi = R/l \ll 1$ . Прогиб упругих элементов 1,2 значительно меньше толщины слоя жидкости 3, то есть  $W \ll R, W \ll \delta_0$ , и  $\frac{W}{R} = O(\lambda), \frac{W}{\delta_0} = O(\lambda)$ , порядка  $\lambda$ .

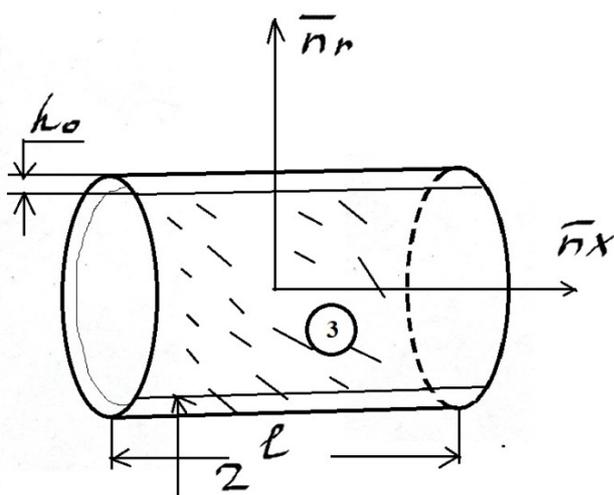


Рис. 1

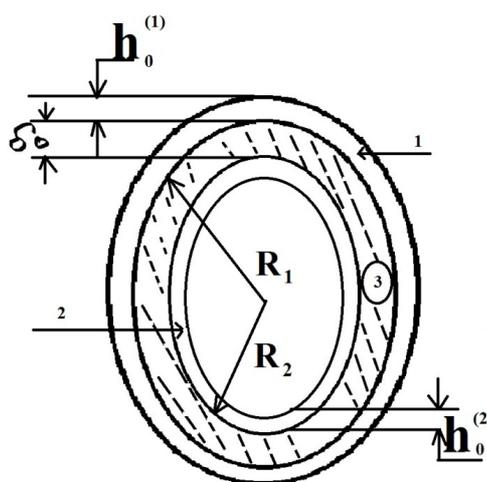


Рис. 2

Рассмотрим ламинарное течение в упругой цилиндрической оболочке. Уравнения динамики жидкости в осесимметричном случае имеют вид [16]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= v \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= v \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $V_x, V_r$  – проекции вектора скорости жидкости на продольную ось  $Ox$  и нормаль к этой оси в цилиндрической системе координат  $(\bar{n}_r, \bar{i})$ ,  $x$ -продольная координата вдоль оси оболочки трубы,  $r$ -расстояние от оси оболочки трубы, с внутренним радиусом -  $R_1$ , длиной  $l$ .

Граничные условия – условия прилипания жидкости на внутренней оболочке, условия ограниченности скорости на оси трубы и условия на концах трубы для давления

$$\begin{aligned} V_r = -\frac{\partial W}{\partial t}, V_x = \frac{\partial U}{\partial t} \text{ при } r = R_1 - W \\ r \frac{\partial V_r}{\partial r} = 0, r \frac{\partial V_x}{\partial r} = 0 \text{ при } r=0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$p = p_0(t) \text{ при } x = l/2 \text{ и } x = -l/2$$

и первое условие для давления можно заменить условием симметрии давления  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  при  $x=0$ . (3)

Здесь  $U$  – продольное упругое перемещение оболочки;  $W$  – прогиб, положительный к центру кривизны;  $R_1$  – внутренний радиус оболочки толщины  $h_0$  и длины  $l$ .

Поверхностная нагрузка определяется напряжением со стороны жидкости

$$q_{rr} = q_n = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad q_{rx} = q_x = \rho\nu \left( \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial r} \right). \quad (4)$$

Введем безразмерные переменные

$$\zeta = \frac{r}{R_1}, \quad \xi = \frac{2x}{l}, \quad \tau = \omega t, \quad W = w_m U_3, \quad U = u_m U_1,$$

$$V_r = w_m \omega U_\zeta, \quad V_x = w_m \omega \frac{l}{2R_1} U_\xi, \quad p = p_0 + \frac{\rho\nu w_m \omega}{R_1 \left( \frac{2R_1}{l} \right)^2} P,$$

$$\psi = \frac{2R_1}{l} \ll 1, \quad \lambda = \frac{w_m}{R_1} \ll 1, \quad \text{Re} = R_1^2 \omega / \nu \quad (5)$$

Учитывая наличие малых параметров  $\psi$  и  $\lambda$  получим уравнения динамики жидкости (теория смазки с учетом локального члена инерции) и граничные условия

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \text{Re} \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right), \quad \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta U_\zeta) + \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} = 0,$$

$$U_\zeta = -\frac{\partial U_3}{\partial \tau}, \quad U_\xi = \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} \text{ при } \zeta = 1, \quad \zeta \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = \zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \zeta = 0,$$

$$P = 0 \text{ при } \xi = -1, \quad \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0. \quad (6)$$

Полагая гармоническую зависимость от времени давления, скоростей жидкости и упругих перемещений оболочки находим

$$P = \int_{-1}^{\xi} \left\{ 2 \text{Re} \left[ (\alpha - 1) \frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} - \alpha \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} d\xi \right] + 16\gamma \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau} d\xi \right] \right\} d\xi,$$

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=1} = \text{Re}(\alpha - 1) \left( \frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} - \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} d\xi \right) + 8\gamma \left( \frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - \int_0^{\xi} \frac{\partial U_3}{\partial \tau} d\xi \right) \quad (7)$$

При этом

$$q_{rr} = q_n = -p = -p_0 - \rho \frac{l/2 \omega^2}{\text{Re} \psi} \left[ 2 \text{Re} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{\alpha - 1}{2} \psi u_m U_1 - \alpha \int_0^{\xi} w_m U_3 d\xi \right) + 16\gamma \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{2} \psi u_m U_1 - \int_0^{\xi} w_m U_3 d\xi \right) \right] d\xi \quad (8)$$

$$q_{rx} = q_x = \rho \frac{l/2 \omega^2}{\text{Re}} \left[ \text{Re}(\alpha - 1) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 8\gamma \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \left( \frac{1}{2} \psi u_m U_1 - \int_0^{\xi} w_m U_3 d\xi \right),$$

$$\text{здесь } \alpha - 1 = \frac{2\sqrt{\text{Re}q_0} - 4s_0}{\text{Re} p_0 - 4\sqrt{\text{Re}q_0} + 4s_0}, \quad \alpha = \frac{\text{Re} p_0 - 2\sqrt{\text{Re}q_0}}{\text{Re} p_0 - 4\sqrt{\text{Re}q_0} + 4s_0}, \quad 16\gamma = \frac{4\sqrt{\text{Re}r_0}}{\text{Re} p_0 - 4\sqrt{\text{Re}q_0} + 4s_0}$$

где

$$p_0 = ber^2 \sqrt{\text{Re}} + bei^2 \sqrt{\text{Re}}, \quad q_0 = ber \sqrt{\text{Re}} + bei' \sqrt{\text{Re}} - ber' \sqrt{\text{Re} bei} \sqrt{\text{Re}},$$

$$r_0 = ber \sqrt{\text{Re} ber'} \sqrt{\text{Re}} + bei \sqrt{\text{Re} bei'} \sqrt{\text{Re}}, \quad s_0 = ber'^2 \sqrt{\text{Re}} + bei'^2 \sqrt{\text{Re}},$$

$ber$  и  $bei$  функции Кельвина нулевого порядка, штрих означает производную.

Отметим, что

$$\alpha = 4/3, \quad \gamma = 1 \text{ при } \text{Re} \rightarrow 0$$

$$\alpha = 1, \quad \alpha - 1 = \sqrt{2/\text{Re}}, \quad \gamma = 2\sqrt{\text{Re}}/8, \text{ при } \text{Re} > 20$$

Отказываясь от гармоничности по времени параметров течения, что означает отсутствие гармоничности  $p_0(t)$  и, считая  $\omega = 1/t_0$ , где  $t_0$  – характерное время, применим метод итерации к задаче (6).

На первом шаге итерации отбросим локальный член инерции и получим

$$P = 16 \int_{-1}^{\xi} \left( \frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - \int_0^{\xi} \frac{\partial U_3}{\partial \tau} d\xi \right) d\xi$$

$$U_{\xi} = \frac{1}{4} (\zeta^2 - 1) 16 \left( \frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - \int_0^{\xi} \frac{\partial U_3}{\partial \tau} d\xi \right) + \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial U_1}{\partial \tau}$$

На втором шаге итерации будем иметь

$$P = \int_{-1}^{\xi} \left\{ 2 \text{Re} \left[ \frac{1}{6} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} - \frac{4}{3} \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} d\xi \right] + 16 \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau} d\xi \right] \right\} d\xi,$$

$$\left. \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = \text{Re} \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} - \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} d\xi \right) + 8 \left( \frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - \int_0^{\xi} \frac{\partial U_3}{\partial \tau} d\xi \right) \quad (9)$$

Можно снова ввести частотозависимые коэффициенты  $\alpha(\omega)$  и  $\gamma(\omega)$  и считать, что  $\text{Re}$  – любое, при этом получаем

$$P = \int_{-1}^{\xi} \left\{ 2 \text{Re} \left[ (\alpha - 1) \frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} - \alpha \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} d\xi \right] + 16\gamma \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau} d\xi \right] \right\} d\xi,$$

$$\left. \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = \text{Re} (\alpha - 1) \left( \frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} - \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau^2} d\xi \right) + 8\gamma \left( \frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial U_1}{\partial \tau} - \int_0^{\xi} \frac{\partial U_3}{\partial \tau} d\xi \right), \quad (10)$$

что формально совпадает с точным решением (7) для гармонических законов изменения параметров среды, но позволяет использовать эти формулы как для негармонического изменения со временем  $p_0$ , так и для нелинейных уравнений динамики оболочки.

Следует отметить, что в [1] доказана сходимостъ метода итерации.

Рассмотрим динамику тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости, заключённого между двумя соосными упругими оболочками (см. рис. 2). Внешняя оболочка 1 имеет внутренний радиус  $R_1$ , толщину  $h_0^{(1)}$  и радиус срединной поверхности  $R^{(1)} = R_1 + h_0^{(1)}/2$ . Внутренняя оболочка 2 имеет

внешний радиус  $R_2$ , толщину  $h_0^{(2)}$  и радиус срединной поверхности  $R^{(2)} = R_1 + h_0^{(2)}/2$ . Ширина зазора  $\delta$ , заполненного вязкой несжимаемой жидкостью значительно меньше  $R_1, R_2$ . Характерная длина  $l$  (длина волны или оболочки) значительно больше радиусов  $R_1, R_2$ .

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости имеют вид (1). На границах оболочек и жидкости выполняются условия прилипания

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}, V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} \quad \text{при } r = R_i - W^{(i)} \quad (i=1,2) \quad (11)$$

здесь  $U^{(i)}$  - продольное упругое перемещение оболочек 1,2;  $W^{(i)}$  - прогиб, положительный к центру кривизны оболочек 1,2; индекс  $i=1$  относится к внешней, а  $i=2$  к внутренней оболочкам.

Напряжения со стороны жидкости определяются формулами (4).

Принимая за характерную длину величину  $l$  (длина волны или половины длины оболочки) переходим к безразмерным переменным

$$r^* = \frac{r - R_2}{\delta}, x^* = \frac{x}{l}, t^* = \frac{c_0}{l} t, W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, U^{(i)} = u_m u_1^{(i)},$$

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x, p = p_0 + \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} P, c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1 - \mu_0^2)}}$$

$$\psi = \frac{\delta}{R_2} \ll 1, \lambda = \frac{w_m}{\delta} \ll 1, \frac{u_m}{l} = \varepsilon \ll 1, \frac{w_m}{R_2} = O(\varepsilon), \frac{R^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), \frac{\delta}{l} = O(\psi \varepsilon^{\frac{1}{2}}) \quad (12)$$

Учитывая наличие малых параметров  $\psi$  и  $\lambda$ , получим уравнение динамики жидкости и граничные условия

$$\frac{\partial P}{\partial r^*} = 0, \tilde{\text{Re}} \frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0 \quad (13)$$

$$v_r = -\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t^*}, v_x = 0 \quad \text{при } r^* = 1, r^* = 0; \tilde{\text{Re}} = \frac{\delta}{l} \frac{\delta c_0}{\nu}$$

Для гармонических по времени решений из (13), в которых вместо  $c_0/l$  положим  $\omega$ , получим

$$P = \int \int [12\gamma \left( \frac{\partial U_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \alpha \tilde{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 U_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right)] dx^* dx^*$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} = \int [6\gamma \left( \frac{\partial U_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \frac{\alpha - 1}{2} \tilde{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 U_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} \right)] dx^* \quad (14)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} = \int [6\gamma \left( \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial t^*} - \frac{\partial U_3^{(2)}}{\partial t^*} \right) + \frac{\alpha - 1}{2} \tilde{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 U_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} \right)] dx^*$$

где  $2\varepsilon^2 = \delta_0^2 \omega / \nu = \text{Re}$  - число Рейнольдса

$$\gamma(\omega) = \frac{1}{6} \frac{\varepsilon^3 (sh \varepsilon - \sin \varepsilon)}{\varepsilon^2 (ch \varepsilon + \cos \varepsilon) - 2\varepsilon (sh \varepsilon + \sin \varepsilon) + 2(ch \varepsilon - \cos \varepsilon)} \quad (15)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\varepsilon [\varepsilon (ch \varepsilon + \cos \varepsilon) - (sh \varepsilon - \sin \varepsilon)]}{\varepsilon^2 (ch \varepsilon + \cos \varepsilon) - 2\varepsilon (sh \varepsilon + \sin \varepsilon) + (ch \varepsilon - \cos \varepsilon)}$$

Отметим, что

$$\alpha = 1, 2 \text{ и } \gamma = 1 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0; \alpha = 1, \alpha - 1 = 1/\varepsilon, \gamma = \varepsilon/6 \text{ при } \varepsilon > 4 \quad (16)$$

Решаем (13) методом итерации [1]. На первом шаге итерации найдём:

$$P = 12 \int \left[ \int \left( \frac{\partial U_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t^*} = 6(r^{*2} - r^*) \int \left( \frac{\partial^2 U_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 U_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) dx^*,$$

Подставим  $\frac{\partial v_x}{\partial t^*}$  во второе уравнение (13), на втором шаге итерации находим

$$P = \int \int \left[ 12 \left( \frac{\partial U_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \frac{6}{5} \tilde{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 U_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^* dx^*$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} = \int \left[ 6 \left( \frac{\partial U_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 U_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^* \quad (17)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} = \int \left[ 6 \left( \frac{\partial U_3^{(1)}}{\partial t^*} - \frac{\partial U_3^{(2)}}{\partial t^*} \right) + \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 U_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 U_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^*$$

Эти формулы позволяют найти нормальное и касательное напряжение на оболочках

$$(-1)^{i-1} q_n = (-1)^{i-1} q_{rr} = \left[ -p_0 - \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} P \right] (-1)^{i-1};$$

$$q_x^{(1)} = q_{rx}^{(1)} = \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^2} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}; \quad (18)$$

$$q_x^{(2)} = q_{rx}^{(2)} = \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^2} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0}$$

Как видно из (18) эти величины имеют противоположные значения на верхней и нижней оболочках.

Отметим, что характерное время  $t_0 = l/c_0$  может быть заменено на частоту  $1/\omega$  в случае колебательного процесса, а не волнового.

Если на втором шаге итерации ввести поправочные частотозависимые коэффициенты  $\alpha$  перед локальным членом и  $\gamma$  – перед силами трения, то формулы (14) совпадает с (18). Это совпадение является формальным, но (14) при этом можно использовать и для негармонических волновых процессов при  $c_0 t/l = \omega t$ . Этот случай включает в себя и нелинейные уравнения оболочек.

Надо только учесть что

$$\gamma = 1, \alpha = \frac{6}{5}, \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{1}{10} \text{ при } \varepsilon \ll 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-01-00175а.

## Литература

1. Андрейченко К.П., Могилевич Л.И. О динамике взаимодействия сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости с упругими стенками // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1982. № 2. С. 162-172.
2. Могилевич Л.И., Попова А.А. Динамическая задача гидроупругости виброопоры с упругой ребристой пластиной // Наука и техника транспорта. 2007. № 4. С. 55-61.
3. Могилевич Л.И., Попов В.С., Старовойтов Э.И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым наполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56-63.
4. Агеев Р. В., Могилевич Л. И., Попов В. С. Колебание стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 3-11
5. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64-72.
6. Д.В.Кондратов, Ю.Н. Кондратова, Л.И. Могилевич. Исследование амплитудных частотных характеристик колебаний упругих стенок трубы кольцевого профиля при пульсирующем движении вязкой жидкости в условиях жесткого защемления по торцам // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. №3. С. 15-21
7. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при свободном торцевом истечении в условиях вибрации // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. Т. 3. № 1 (26). С. 22-31.
8. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Моделирование колебаний и волн в цилиндрической оболочке с вязкой несжимаемой жидкостью внутри нее // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 13-19.
9. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64-72.
10. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Колебания гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением под действием ударных нагрузок со стороны поршневой группы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 100-106.

11. Могилевич Л.И., Попов В.С., Чернов А.М. Колебания упругого цилиндра конечной длины, окружённого слоем вязкой несжимаемой жидкости // Математика. Механика. 2002. № 4. С. 196-200.
12. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия цилиндропоршневой группы двигателя внутреннего сгорания и слоя охлаждающей жидкости // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003. № 1. С. 79.
13. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2004. № 5. С. 179-190.
14. Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическое моделирование динамики взаимодействия слоя вязкой жидкости в кольцевой щели со стенкой, окруженной упругой средой // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. Т. 3. № 1. С. 346-350.
15. Епишкина И.Н., Могилевич Л.И., Попов В.С., Симдянкин А.А. Математическое моделирование вынужденных колебаний гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 4. С. 19-26.
16. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа. 2003. 840 с.