Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/15-51
Ссылка для цитирования этой статьи:
Землянухин А.И., Бочкарев А.В., Блинков Ю.А., Ковалева И.А., Ребрина А.Ю. Периодические волны дифференциального уравнения 4-го порядка с нелинейностью 5-й степени // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №3.
Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 16-01-00176-а.

УДК 534.1:517.957

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 4-ГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ 5-Й СТЕПЕНИ

Землянухин А.И.[1], Бочкарев А.В.[2], Блинков Ю.А.[3], Ковалева И.А.[4], Ребрина А.Ю.[5]

[1]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, zemlyanukhinai@sstu.ru
[2]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, ab2009sar@list.ru
[3] Национальный исследовательский Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, blinkovua@gmail.com
[4]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, irinakovaleva1406@gmail.com
[5]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, anblinkova26@gmail.com

PERIODIC WAVES OF THE 4-TH ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH NONLINEARITY OF 5-TH DEGREE

Zemlyanukhin A.I.[1], Bochkarev A.V.[2], Blinkov Yu.A.[3], Kovaleva I.A.[4], Rebrina A.Yu.[5]

[1]Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, zemlyanukhinai@sstu.ru
[2]Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, ab2009sar@list.ru
[3]Saratov state university, Russia, Saratov, blinkovua@gmail.com
[4]Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, irinakovaleva1406@gmail.com
[5]Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, anblinkova26@gmail.com

Аннотация. Рассмотрено дифференциальное уравнение 4-го порядка, моделирующее распространение стационарных осесимметричных изгибно-продольных волн в цилиндрической оболочке, взаимодействующей с внешней нелинейно-упругой средой. Исследована редукция уравнения, представляющая собой обобщенное уравнение Дуффинга. При помощи метода геометрического ряда построены его точные периодические решения.

Ключевые слова: точные периодические решения, цилиндрическая оболочка, изгибно-продольные волны

Abstract. The 4th-order equation describing the propagation of stationary axially symmetric bending-longitudinal waves in a cylindrical shell interacting with an external nonlinear elastic medium is considered. The reduction of the equation which is a generalized Duffing equation is investigated. Exact periodic solutions of the equation are constructed using the geometric series method.

Keywords: exact periodic solutions, cylindrical shell, bending-longitudinal waves

В последнее десятилетие активно развиваются методы нахождения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с высокими порядками производных и нелинейных членов. Одним из активных поставщиков таких уравнений являются неклассические задачи теории деформируемого твердого тела, в которых изучаются, в частности, волновые процессы в пористых средах, взаимодействия деформационных и электромагнитных возмущений и многие другие явления [1,2].

Моделирование процесса стационарного осесимметричного распространения продольно-изгибных волн в цилиндрической оболочке приводит к необходимости решения нелинейного дифференциального уравнения для прогиба срединной поверхности

$$\frac{d^4w}{d\xi^4}+c_1\frac{d^2w}{d\xi^2}+c_2w+c_3w^3+c_4w^5+c_5\frac{d^2\left(w^3\right)}{d\xi^2}+c_6\frac{d^2\left(w^5\right)}{d\xi^2}=0, \qquad (1)$$

в котором окружающая оболочку нелинейно-упругая среда моделируется полиномом пятой степени по нечетным степеням прогиба w [3]. В [4] показано, что уравнение (1) при выполнении условий на коэффициенты

$$c_3c_6=c_4c_5, \quad c_2c_6^2=c_4\left(c_1c_6-c_4\right). \qquad (2)$$

допускает факторизацию и редуцируется к обобщенному уравнению Дуффинга

$$\frac{d^2w}{d\xi^2}+b_2w+b_3w^3+b_4w^5=0, \qquad (3)$$

$$b_2=(c_1c_6-c_4)/c_6\,,\, b_3=c_5\,,\, b_4=c_6\,. \qquad (4)$$

В [3] построены точные уединенно – волновые решения уравнения (3) с использованием метода геометрического ряда, предложенного и развитого в [5-8]. В данной работе этот метод используется для нахождения точных периодических решений уравнения (3).

Будем искать решение в форме

$$w=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k w_k\left(\xi\right), \qquad (5)$$

ISSN 2541-9269

где $w_k(\xi)$ – неизвестные функции, ε – формальный параметр. Подставляя (5) в (3) и группируя по степеням параметра ε, получим бесконечную цепочку уравнений для определения функций w_k:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^1: \quad w_1'' + b_2 w_1 = 0,\\
&\varepsilon^2: \quad w_2'' + b_2 w_2 = 0,\\
&\varepsilon^3: \quad w_3'' + b_2 w_3 = -b_3 w_1^3,\\
&\varepsilon^4: \quad w_4'' + b_2 w_4 = -3b_3 w_1^2 w_2,\\
&\varepsilon^5: \quad w_5'' + b_2 w_5 = -b_4 w_1^5 - 3b_3\left(w_1^2 w_3 + w_1 w_2^2\right),\\
&\qquad\qquad \ldots
\end{aligned} \tag{6}$$

в которых штрихи обозначают дифференцирование по ξ. Первое уравнение системы (6) представляет собой уравнение гармонических колебаний и имеет периодическое решение

$$w_1 = \mathrm{e}^{i\sqrt{b_2}\xi} \tag{7}$$

при условии

$$b_2 > 0. \tag{8}$$

Чтобы представить частные решения следующих уравнений системы (6) в виде $w_n = K_n w_1^n$, следует принять $w_2 = 0$. Последовательно находя коэффициенты K_n, $n = 3, 4, 5, \ldots$ и вводя обозначение

$$y = \varepsilon \mathrm{e}^{i\sqrt{b_2}\xi}, \tag{9}$$

разложению (5) можно придать форму степенного ряда по нечетным степеням y:

$$\begin{aligned}
w = y + \frac{b_3}{8b_2} y^3 + \frac{8b_2 b_4 + 3b_3^2}{192 b_2^2} y^5 + \frac{b_3\left(8b_2 b_4 + b_3^2\right)}{512 b_2^3} y^7 +\\
+ \frac{32 b_2^2 b_4^2 + 48 b_2 b_3^2 b_4 + 3b_3^4}{12288 b_2^4} y^9 + \ldots,
\end{aligned} \tag{10}$$

Анализ ведущих членов [9] уравнения (3) показывает, что его решение, представляемое рядом (10), имеет полюс дробного порядка ½. Для перехода к простому полюсу возведем выражение (10) в квадрат, произведем замену

$$y^2 = z \tag{11}$$

и получим

$$\begin{aligned}
w^2 = z + \frac{b_3}{4b_2} z^2 + \frac{16 b_2 b_4 + 9b_3^2}{192 b_2^2} z^3 + \frac{16 b_2 b_3 b_4 + 3b_3^3}{384 b_2^3} z^4 + \ldots\\
+ \frac{256 b_2^2 b_4^2 + 480 b_2 b_3^2 b_4 + 45 b_3^4}{36864 b_2^4} z^5 + \ldots
\end{aligned} \tag{12}$$

Степенной ряд (12) соответствует функции с полюсом 1-го порядка и является геометрическим: все диагональные аппроксиманты Паде для этого ряда, начиная со второго порядка, совпадают между собой [7] и равны

$$\frac{192b_2^2 z}{192b_2^2 - 48b_2b_3z + \left(3b_3^2 - 16b_2b_4\right)z^2}. \tag{13}$$

Отношение (13) есть точная сумма ряда (12). Выполняя над ним обратные преобразования, то есть извлекая квадратный корень, заменяя z на y^2 в соответствии с (11) и подставляя (9), получим

$$w = \pm 8\sqrt{3}b_2\varepsilon\sqrt{\frac{e^{2i\sqrt{b_2}\xi}}{192b_2^2 - 48b_2b_3\varepsilon^2 e^{2i\sqrt{b_2}\xi} + \left(3b_3^2 - 16b_2b_4\right)\varepsilon^4 e^{4i\sqrt{b_2}\xi}}}, \tag{14}$$

где знак перед дробью выбирается совпадающим со знаком ε.

Выражение (14) является точным комплексным решением уравнения (3), что подтверждается непосредственной подстановкой в уравнение.

Найдем условия, при которых (14) представляет собой вещественную функцию. Считая $b_3, b_4, \varepsilon, \xi$ вещественными числами, выделим мнимую часть подкоренного выражения из (14). Приравняв ее нулю, получим первое условие

$$b_4 = \frac{3}{16}\frac{b_3^2\varepsilon^4 - 64b_2^2}{b_2\varepsilon^4}, \tag{15}$$

при выполнении которого (14) принимает вид

$$w = \pm\frac{2\varepsilon}{\sqrt{16\cos^2\left(\sqrt{b_2}\xi\right) - \frac{b_3\varepsilon^2}{b_2} - 8}}. \tag{16}$$

Легко видеть, что подкоренное выражение из (16) является положительным при

$$b_3 < -\frac{8b_2}{\varepsilon^2}. \tag{17}$$

Таким образом, при условиях (8), (15) и (17) уравнение (3) имеет точное периодическое решение (16) в форме кноидальной волны, пример графика которой показан на рис. 1.

Другое периодическое решение уравнения (3) можно построить в окрестности произвольной постоянной.

Перейдем в уравнении (3) к новой зависимой переменной $u(\xi) = \sqrt{w(\xi)}$:

$$2uu'' - (u')^2 + 4u^2\left(b_2 + b_3u + b_4u^2\right) = 0. \tag{18}$$

Будем искать решение уравнения (18) в форме

$$u = E + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k u_k(\xi), \tag{19}$$

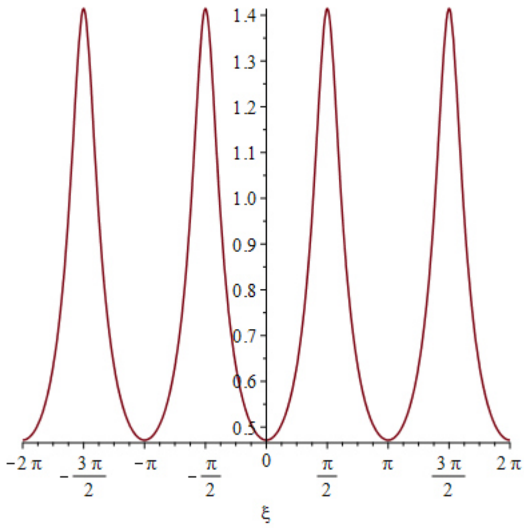


Рис. 1. График функции (16) при $\varepsilon = 1,\ b_2 = 1, b_3 = -10.$

где E – произвольная постоянная. Подставляя (19) в (18) и группируя по степеням ε, для определения функций u_k получим систему

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0: \quad b_2 + Eb_3 + E^2 b_4 = 0\\
&\varepsilon^1: \quad u_1'' + 2\left(2b_2 + 3Eb_3 + 4E^2 b_4\right)u_1 = 0,\\
&\varepsilon^2: \quad u_2'' + 2\left(2b_2 + 3Eb_3 + 4E^2 b_4\right)u_2 = \frac{1}{2E}\left(u_1'\right)^2 + 2\left(\frac{b_2}{E} - 2Eb_4\right)u_1^2,\\
&\qquad \ldots
\end{aligned} \tag{20}$$

Из первого уравнения получаем

$$b_2 = -E\left(b_3 + Eb_4\right). \tag{21}$$

Второе уравнение системы при

$$b_3 = \frac{1 - 4E^2 b_4}{2E} \tag{22}$$

имеет периодическое решение

$$u_1 = \mathrm{e}^{i\xi}. \tag{23}$$

Последовательно определяя из следующих уравнений системы функции $u_2, u_3, \ldots$ в форме $u_n = K_n u_1^n$ и обозначая $z = \varepsilon\,\mathrm{e}^{i\xi}$, для разложения (19) имеем

$$\begin{aligned}
u - E = z + \frac{4E^2 b_4 + 3}{6E} z^2 + \frac{16E^4 b_4^2 + 40E^2 b_4 + 9}{48E^2} z^3 + \\
+ \frac{64E^6 b_4^3 + 336E^4 b_4^2 + 252E^2 b_4 + 27}{432E^3} z^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{24}$$

Степенной ряд (24) соответствует функции с полюсом 1-го порядка и является геометрическим: все диагональные аппроксиманты Паде для этого ряда, начиная со второго порядка, совпадают между собой и равны

$$\frac{144E^2 z}{144E^2 - 24E\left(4E^2 b_4 + 3\right)z + \left(16E^4 b_4^2 - 24E^2 b_4 + 9\right)z^2}. \tag{25}$$

Возвращаясь в (25) к переменной ξ, для исходной зависимой переменной получим

$$w = \sqrt{E + \frac{144E^2 \varepsilon e^{i\xi}}{144E^2 - 24E\left(4E^2 b_4 + 3\right)\varepsilon e^{i\xi} + \left(16E^4 b_4^2 - 24E^2 b_4 + 9\right)\varepsilon^2 e^{2i\xi}}}. \tag{26}$$

Выражение (26) есть точное периодическое решение уравнения (3) при выполнении соотношений (21) и (22). Выясним условия, при которых это решение является вещественной функцией.

Мнимая часть подкоренного выражения из (26) обращается в нуль при

$$b_4 = \frac{3}{4}\frac{\varepsilon \pm 4E}{E^2 \varepsilon}, \tag{27}$$

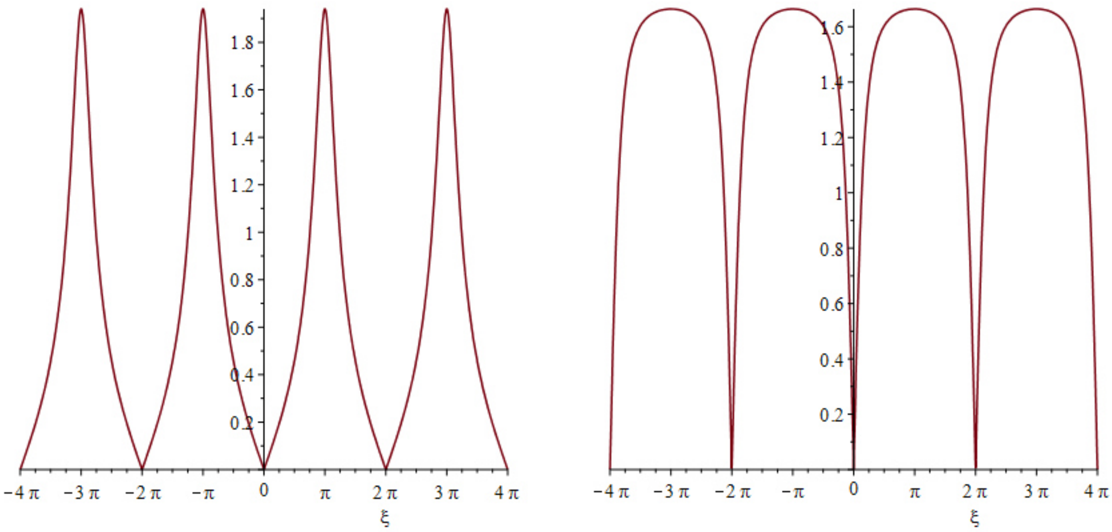
при этом (26) принимает вид

$$w = \sqrt{E + \frac{E\varepsilon}{2E\left(\cos(\xi) \mp 1\right) - \varepsilon}}, \tag{28}$$

При выполнении неравенства

$$4E \pm \varepsilon > 0 \tag{29}$$

(28) является вещественной периодической функцией. Примеры графиков этой функции показаны на рис. 2.



а) б)

Рис. 2. Графики функции (28) при выборе знака “плюс” и
а) $\varepsilon = 1,\ E = -4/17$, б) $\varepsilon = 1,\ E = 3$

Отметим, что с использованием метода геометрического ряда, точные периодические решения (16), (28) обобщенного уравнения Дуффинга (3) построены на основе периодических решений соответствующих линеаризованных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00176-а).

Список литературы

1. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Шешенин С.Ф. Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стесненным вращением // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. № 4. С. 67-75.
2. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М. Нелинейные продольные магнитоупругие волны в стержне // Нелинейный мир. 2009. Т. 7. № 7. С. 533-540.
3. Землянухин А.И., Бочкарев А.В., Блинков Ю.А., Ковалева И.А., Блинкова А.Ю. Уединенные волны квазигиперболического уравнения 4-го порядка с нелинейностью 5-й степени // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 3; URL: mathmod.esrae.ru/3-20
4. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I., Tindova E.G. Axisymmetric Longitudinal-Bending Waves in a Cylindrical Shell Interacting with a Nonlinear Elastic Medium // Modelling and Simulation in Engineering. 2016, Vol. 2016, Article ID 6596231, 7 p. http://dx.doi.org/10.1155/2016/6596231
5. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Метод возмущений и точные решения уравнений нелинейной динамики сред с микроструктурой // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9, № 2. с. 182-191. http://dx.doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.2.16
6. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Непрерывные дроби, метод возмущений и точные решения нелинейных эволюционных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 4. с. 71-85. http://dx.doi.org/10.18500/0869-6632-2016-24-4-71-85
7. Бочкарев А.В., Землянухин А.И. Метод геометрического ряда построения точных решений нелинейных эволюционных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 7. с. 1113–1125. http://dx.doi.org/10.1134/S0965542517070065
8. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Непрерывные дроби и точное решение уравнения Калоджеро-Дегаспериса-Фокаса // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. №1. URL: http://mathmod.esrae.ru/1-7
9. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. дом “Интеллект”, 2010. 368 с.