Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/15-52
Ссылка для цитирования этой статьи:
Зеленая А.С., Изгиб упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №3

УДК 539.3

ИЗГИБ УПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Зеленая А.С.
Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь, Гомель,
lady-nastia@mail.ru

BENDING OF ELASTIC THREE-LAYER RECTANGULAR PLATE WITH COMPRESSIBLE FILLER

Zelenaya A.S.
Belarusian State University of Transport, Belarus, Gomel, lady-nastia@mail.ru

Аннотация. Исследован изгиб несимметричных по толщине упругих трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем. Кинематические гипотезы основаны на гипотезе ломаной линии: для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, в жестком сжимаемом заполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной. Равномерно распределенная нагрузка приложена к внешней поверхности первого несущего слоя. Получена система уравнений равновесия и ее аналитическое решение в перемещениях. Проведен численный анализ решения.

Ключевые слова: трехслойная прямоугольная пластина, сжимаемый заполнитель, несимметричная по толщине пластина.

Abstract. The bending of the elastic three-layered plates with the compressible filler is asymmetric in thickness. Kinematic hypotheses are based on the hypothesis of a broken line: Kirchhoff's hypotheses are accepted for the outer layers, in the rigid compressible filler the deformed normal remains rectilinear. A uniformly distributed load is applied to the outer surface of the first carrier layer. A system of equilibrium equations and its analytical solution in displacements are obtained. Numerical analysis of solutions is carried out.

Keywords: three-layer rectangular plate, compressible filler, asymmetrical in thickness plate.

В условиях деформации изгиба трехслойные конструкции, которые состоят из двух несущих слоев и сжимаемого заполнителя, оказываются наиболее рациональными, то есть близкими к оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость.

В монографии [1] исследовано статическое и динамическое деформирование трехслойных конструкций, связанных с упругим основанием. Статьи [2-4] посвящены исследованию трехслойных прямоугольных и трехслойных круговых пластин. Работы [5-6] посвящены изучению статического и динамического деформирования многослойных конструкций. Изгиб и колебания трехслойного стержня рассмотрены в работах [7-11]. В статье [12] исследованы радиальные колебания трехслойной цилиндрической оболочки со сжимаемым заполнителем. В работе [13] рассматривается осесимметричная задача о гидроупругих колебаниях стенок канала с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости. Статья [14] посвящена исследованию гидродинамической реакции тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости, сдавливаемого непроницаемыми стенками. В статьях [15-16] исследована задача гидроупругости применительно к трехслойным элементам конструкций. В монографии [17] исследованы математические вопросы гидроупругости трехслойных элементов конструкций.

Постановка задачи. Рассмотрим трехслойную пластину со сжимаемым заполнителем, которая представлена на рис. 1. Систему координат x, y, z свяжем со срединной плоскостью заполнителя. Принимаем, что для изотропных несущих слоев справедливы гипотезы Кирхгофа. В жестком заполнителе применим точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. Учитываем, что на границах контакта перемещения непрерывны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

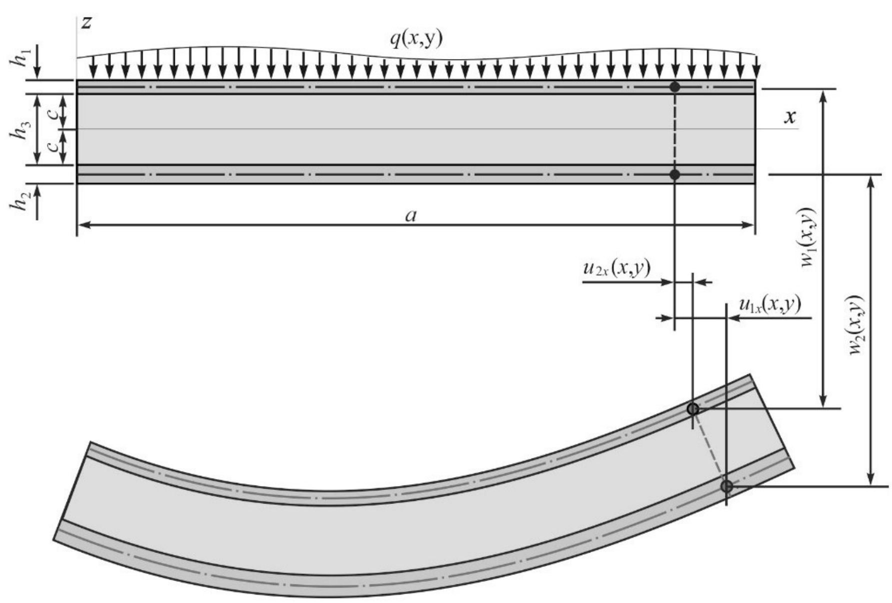

Рис.1.

На внешнюю поверхность первого несущего слоя действует произвольная распределённая нагрузка, проекции которой на координатные оси: $q(x,y), p_x(x,y)$, $p_y(x,y)$. За искомые функции принимаем продольные перемещения $u_{kx}(x,y)$, $u_{ky}(x,y)$ и прогибы $w_k(x,y)$ срединных поверхностей несущих слоев $(k=1,2)$, после этого находим деформации в слоях.

С помощью введенных гипотез продольные перемещения $u^{(k)}(x,y,z)$ и прогибы $w^{(k)}(x,y,z)$ в слоях выражаются через искомые функции $u_{1x}(x,y)$, $u_{1y}(x,y)$, $u_{2x}(x,y)$, $u_{2y}(x,y)$, $w_1(x,y)$, $w_2(x,y)$ следующими соотношениями $(k=1,2,3)$:

- в несущих слоях $(c \le z \le c+h_1)$

$$u_x^{(1)} = u_{1x} - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right) w_{1,x}, \quad w^{(1)} = w_1,$$

$$u_y^{(1)} = u_{1y} - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right) w_{1,y}, \quad u_x^{(2)} = u_{2x} - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right) w_{2,x},$$

$$w^{(2)} = w_2 \quad (-c-h_2 \le z \le -c), \quad u_y^{(2)} = u_{2y} - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right) w_{2,y};$$

- в заполнителе $(-c \le z \le c)$

$$u_x^{(3)} = \left(1+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_{1x} + \frac{h_1}{4}w_{1,x}\right) + \left(1-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_{2x} - \frac{h_2}{4}w_{2,x}\right),$$

$$u_y^{(3)} = \left(1+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_{1y} + \frac{h_1}{4}w_{1,y}\right) + \left(1-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_{2y} - \frac{h_2}{4}w_{2,y}\right),$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{c}\right)w_1 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{c}\right)w_2, \tag{1}$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной линии заполнителя.

Компоненты тензора деформаций следуют из соотношения Коши [18, с. 22], напряжения – из закона Гука. Внутренние силы и моменты, отнесенные к единице длины, вводятся соотношениями:

$$N_{xx}^{(k)} = \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \mathrm{d}z, \quad N_{yy}^{(k)} = \int_{h_k} \sigma_{yy}^{(k)} \mathrm{d}z, \quad M_{xx}^{(k)} = \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z \,\mathrm{d}z, \quad M_{yy}^{(k)} = \int_{h_k} \sigma_{yy}^{(k)} z \,\mathrm{d}z,$$

$$M_{xy}^{(k)} = \int_{h_k} \sigma_{xy}^{(k)} z \,\mathrm{d}z, \quad Q_{xy}^{(k)} = \int_{h_k} \sigma_{xy}^{(k)} \mathrm{d}z, \quad N_{zz}^{(3)} = \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)} \mathrm{d}z, \quad M_{xz}^{(3)} = \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z \,\mathrm{d}z,$$

$$M_{yz}^{(3)} = \int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)} z \,\mathrm{d}z, \quad Q_{xz}^{(3)} = \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \mathrm{d}z, \quad Q_{yz}^{(3)} = \int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)} \mathrm{d}z, \tag{2}$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_{zz}^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений; интегралы берутся по толщине k-го слоя.

Для связи тензоров напряжений и деформаций в слоях рассматриваемой пластины используем соотношение закона Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k Э_{ij}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (i, j = x, y, z,\ k = 1,2,3), \tag{3}$$

где – G_k сдвиговой модуль упругости материалов, $Э_{ij}^{(k)}$ – компоненты девиатора тензора деформаций, K_k – объемный модуль упругости материалов, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровая часть тензора деформаций.

Компоненты тензора напряжений записываются в виде:

при k=1, 2:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_{xx}^{(k)} + K_k^- \varepsilon_{yy}^{(k)}, \quad \sigma_{yy}^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_{yy}^{(k)} + K_k^- \varepsilon_{xx}^{(k)}, \quad \sigma_{xy}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{xy}.$$

Для третьего слоя

$$\sigma_{xx}^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{yy}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)}, \quad \sigma_{yy}^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_{yy}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{zz}^{(3)},$$

$$\sigma_{zz}^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^- \varepsilon_{yy}^{(3)}, \quad \sigma_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz},\ \sigma_{yz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{yz}, \tag{4}$$

где $K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k$, $K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k$.

Используя вариационный принцип Лагранжа, получим уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины

$$\delta A = \delta W, \tag{5}$$

где δA, δW – вариации работы внешней и внутренней сил.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки

$$\delta A = \iint_S (p_x(\delta u_{1x} - \frac{h_1}{2}\delta w_1,_x) + p_y(\delta u_{1y} - \frac{h_1}{2}\delta w_1,_y) + q\delta w_1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{6}$$

Вариация работы внутренних сил упругости

$$\delta W = \iint_S \Big\{ \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} (\sigma_{xx}^{(k)}\delta\varepsilon_{xx}^{(k)} + \sigma_{yy}^{(k)}\delta\varepsilon_{yy}^{(k)} + 2\sigma_{xy}^{(k)}\delta\varepsilon_{xy}^{(k)})\,\mathrm{d}z +$$

$$+2\int_{h_3} \left(\sigma_{xz}^{(3)}\delta\varepsilon_{xz}^{(3)} + \sigma_{yz}^{(3)}\delta\varepsilon_{yz}^{(3)} + \sigma_{zz}^{(3)}\delta\varepsilon_{zz}^{(3)}\right)dz \Big\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{7}$$

Подставив (5), (6) в (7) была получена система шести дифференциальных уравнений равновесия пластины в усилиях. Из нее, с помощью соотношений (1), (3) и (4), внутренние усилия и моменты (2) выражаем через функции u_{1x}, u_{2x}, u_{1y}, u_{2y}, w_1, w_2. В результате получим систему дифференциальных уравнений, описывающих перемещения в упругой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем:

$$a_1 u_{1x} - a_1 u_{2x} - a_4 u_{1x},_{xx} - a_5 u_{2x},_{xx} - a_{19} u_{1x},_{yy} - a_{18} u_{2x},_{yy} - a_{21} u_{1y},_{xy} - a_{23} u_{2y},_{xy} +$$

$$+ a_2 w_1,_x + a_3 w_2,_x - 2a_{24} w_1,_{xyy} + a_{25} w_2,_{xyy} - 2a_6 w_1,_{xxx} + a_7 w_2,_{xxx} = p_x,$$

$$-a_1 u_{1x} + a_1 u_{2x} - a_5 u_{1x},_{xx} - a_9 u_{2x},_{xx} - a_{18} u_{1x},_{yy} - a_{20} u_{2x},_{yy} - a_{23} u_{1y},_{xy} - a_{22} u_{2y},_{xy} -$$

$$- a_{10} w_1,_x - a_{17} w_2,_x - a_{24} w_1,_{xyy} + 2a_{25} w_2,_{xyy} - a_6 w_1,_{xxx} + 2a_7 w_2,_{xxx} = 0,$$

ISSN 2541-9269

$$a_1 u_{1y} - a_1 u_{2y} - a_4 u_{1y},_{yy} - a_5 u_{2y},_{yy} - a_{19} u_{1y},_{xx} - a_{18} u_{2y},_{xx} - a_{21} u_{1x},_{xy} - a_{23} u_{2x},_{xy} +$$
$$+ a_2 w_1,_{y} + a_3 w_2,_{y} - 2a_{24} w_1,_{xxy} + a_{25} w_2,_{xxy} - 2a_6 w_1,_{yyy} + a_7 w_2,_{yyy} = p_y ,$$
$$-a_1 u_{1y} + a_1 u_{2y} - a_5 u_{1y},_{yy} - a_9 u_{2y},_{yy} - a_{18} u_{1y},_{xx} - a_{20} u_{2y},_{xx} - a_{23} u_{1x},_{xy} - a_{22} u_{2x},_{xy} -$$
$$- a_{10} w_1,_{y} - a_{17} w_2,_{y} - a_{24} w_1,_{xxy} + 2a_{25} w_2,_{xxy} - a_6 w_1,_{yyy} + 2a_7 w_2,_{yyy} = 0,$$
$$-a_2 u_{1x},_{x} - a_2 u_{1y},_{y} + a_{10} u_{2x},_{x} + a_{10} u_{2y},_{y} + 2a_6 u_{1x},_{xxx} + a_6 u_{2x},_{xxx} + 2a_6 u_{1y},_{yyy} +$$
$$+ a_6 u_{2y},_{yyy} + 2a_{24} u_{1x},_{xyy} + a_{24} u_{2x},_{xyy} + 2a_{24} u_{1y},_{xxy} + a_{24} u_{2y},_{xxy} + a_{11} w_1,_{xx} +$$
$$+ a_{11} w_1,_{yy} - a_{12} w_2,_{xx} - a_{12} w_2,_{yy} + a_{15} w_1,_{xxxx} + a_{15} w_1,_{yyyy} - a_{16} w_2,_{xxxx} -$$
$$- a_{16} w_2,_{yyyy} + a_{26} w_1,_{xxyy} - a_{28} w_2,_{xxyy} + a_8 w_1 - a_8 w_2 = q + \frac{p_x,_{x} h_1}{2} + \frac{p_y,_{y} h_1}{2},$$
$$-a_3 u_{1y},_{y} - a_3 u_{1x},_{x} + a_{17} u_{2y},_{y} + a_{17} u_{2x},_{x} - a_7 u_{1y},_{yyy} - a_7 u_{1x},_{xxx} - 2a_7 u_{2y},_{yyy} -$$
$$- 2a_7 u_{2x},_{xxx} - 2a_{27} u_{2y},_{xxy} - a_{25} u_{1y},_{xxy} - 2a_{25} u_{2x},_{xyy} - a_{25} u_{1x},_{xyy} - a_{12} w_1,_{xx} -$$
$$- a_{12} w_1,_{yy} + a_{14} w_2,_{xx} + a_{14} w_2,_{yy} - a_{16} w_1,_{xxxx} - a_{16} w_1,_{yyyy} + a_{13} w_2,_{xxxx} +$$
$$+ a_{13} w_2,_{yyyy} - a_{28} w_1,_{xxyy} + a_{27} w_2,_{xxyy} - a_8 w_1 + a_8 w_2 = 0, \tag{8}$$

где a_i $(i = 1,...,28)$ – коэффициенты, выражающиеся через объемный K_k и сдвиговой G_k модули упругости материалов, и геометрические параметры слоев пластины:

$$a_1 = \frac{G_3}{2c}; \quad a_2 = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}; \quad a_3 = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2};$$

$$a_4 = K_1^+ h_1 + \frac{2K_3^+ c}{3}; \quad a_5 = \frac{K_3^+ c}{3}; \quad a_6 = \frac{K_3^+ c h_1}{6}; \quad a_7 = \frac{K_3^+ c h_2}{6};$$

$$a_8 = \frac{K_3^+}{2c}; \quad a_9 = K_2^+ h_2 + \frac{2K_3^+ c}{3}; \quad a_{10} = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2};$$

$$a_{11} = \frac{K_3^- h_1}{2} - \frac{G_3 c}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6};$$

$$a_{12} = \frac{K_3^- (h_1 + h_2)}{4} + \frac{G_3 c}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right)\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{G_3 c}{6}; \quad a_{13} = \frac{K_2^+ h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_2^2}{6};$$

$$a_{14} = \frac{K_3^- h_2}{2} - \frac{G_3 c}{2}\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6}; \quad a_{15} = \frac{K_1^+ h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_1^2}{6};$$

$$a_{16} = \frac{K_3^+ c h_2 h_1}{12}; \quad a_{17} = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2};$$

$$a_{18} = \frac{G_3 c}{3}; \quad a_{19} = G_1 h_1 + \frac{2}{3} G_3 c; \quad a_{20} = G_2 h_2 + \frac{2}{3} G_3 c;$$

$$a_{21} = G_1 h_1 + \frac{2}{3} G_3 c + K_1^- h_1 + \frac{2}{3} K_3^- c; \quad a_{22} = G_2 h_2 + \frac{2}{3} G_3 c + K_2^- h_2 + \frac{2}{3} K_3^- c;$$

ISSN 2541-9269

$$a_{23}=\frac{G_3c}{3}+\frac{K_3^-c}{3};\quad a_{24}=\frac{G_3ch_1}{3}+\frac{K_3^-ch_1}{6};\quad a_{25}=\frac{G_3ch_2}{3}+\frac{K_3^-ch_2}{6};$$

$$a_{26}=\frac{K_1^-h_1^3}{6}+\frac{K_3^-ch_1^2}{3}-\frac{G_1h_1^3}{3}-\frac{2G_3ch_1^2}{3};$$

$$a_{27}=\frac{K_2^-h_2^3}{6}+\frac{K_3^-ch_2^2}{3}+\frac{G_2h_2^3}{3}+\frac{2G_3ch_2^2}{3};\quad a_{28}=\frac{G_3ch_1h_2}{3}+\frac{K_3^-ch_1h_2}{6}.$$

Краевая задача (8) об изгибе пластины замыкается добавлением граничных условий.

Решение краевой задачи в перемещениях. Решение будем искать методом Бубнова-Галеркина. Для этого искомые перемещения представляем в виде разложения в двойные тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям

$$u_{1x}=\sum_{n,m=0}^{\infty}U_{1xmn}\cos\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b},\qquad u_{2x}=\sum_{n,m=0}^{\infty}U_{2xmn}\cos\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b},$$

$$u_{1y}=\sum_{m,n=0}^{\infty}U_{1ymn}\sin\frac{\pi nx}{a}\cos\frac{\pi my}{b},\qquad u_{2y}=\sum_{m,n=0}^{\infty}U_{2ymn}\sin\frac{\pi nx}{a}\cos\frac{\pi my}{b},$$

$$w_1=\sum_{n,m=0}^{\infty}W_{1mn}\sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b},\qquad w_2=\sum_{n,m=0}^{\infty}W_{2mn}\sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b},\tag{9}$$

где U_{1xmn}, U_{2xmn}, U_{1ymn}, U_{2ymn}, W_{1mn}, W_{2mn} – искомые амплитуды перемещений прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем.

Положим продольную нагрузку $p_x\equiv 0$, $p_y\equiv 0$. Поперечную нагрузку q представим в виде разложения в двойной тригонометрический ряд:

$$q=\sum_{n,m=0}^{\infty}q_{mn}\sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b},\quad q_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{10}$$

После подстановки перемещений (9) и нагрузки (10) в систему уравнений равновесия (8) и необходимых преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых амплитуд перемещений U_{1xmn}, U_{2xmn}, U_{1ymn}, U_{2ymn}, W_{1mn}, W_{2mn}:

$$b_1U_{1xmn}+b_2U_{2xmn}+b_{11}U_{1ymn}+b_{12}U_{2ymn}+b_3W_{1mn}+b_4W_{2mn}=0,$$
$$b_2U_{1xmn}+b_5U_{2xmn}+b_{12}U_{1ymn}+b_{13}U_{2ymn}+b_6W_{1mn}+b_7W_{2mn}=0,$$
$$b_{11}U_{1xmn}+b_{12}U_{2xmn}+b_{14}U_{1ymn}+b_{15}U_{2ymn}+b_{16}W_{1mn}+b_{17}W_{2mn}=0,$$
$$b_{12}U_{1xmn}+b_{13}U_{2xmn}+b_{15}U_{1ymn}+b_{18}U_{2ymn}+b_{19}W_{1mn}+b_{20}W_{2mn}=0,$$
$$b_3U_{1xmn}+b_6U_{2xmn}+b_{16}U_{1ymn}+b_{19}U_{2ymn}+b_8W_{1mn}+b_9W_{2mn}=q_{mn},$$
$$b_4U_{1xmn}+b_7U_{2xmn}+b_{17}U_{1ymn}+b_{20}U_{2ymn}+b_9W_{1mn}+b_{10}W_{2mn}=0,$$

где коэффициенты b_i выражаются через величины a_i и зависят от параметров m и n.

2017, №3
ISSN 2541-9269

Таким образом, получено решение краевой задачи об изгибе прямоугольной упругой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем.

Численный параметрический анализ. Принимается, что пакет трехслойной пластины составлен из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, толщины слоев $h_1 = 0,04$ м, $h_2 = 0,02$ м, $h_3 = 0,2$ м. Механические характеристики материалов взяты в монографии [18, с. 64, 75]. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластины интенсивностью $q = -2$ МПа, размеры пластины $a = 1$ м, $b = 1$ м. При суммировании рядов (9) принималось 50 членов ряда.

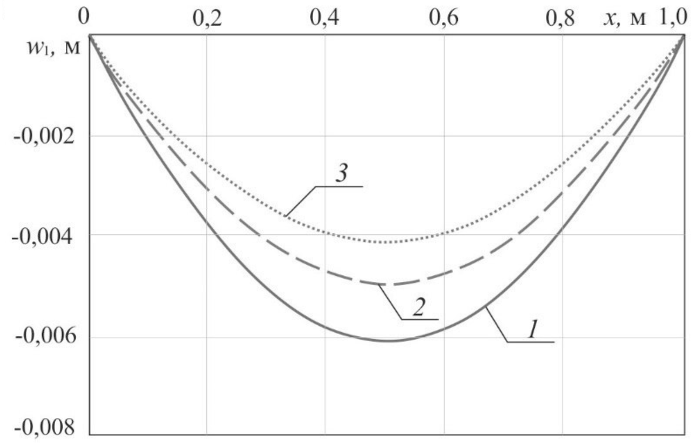

Рис.2.

Рис.2 иллюстрируют изменение прогибов и продольных перемещений в слоях пластины вдоль оси x (a = 1 м, $b = 1$ м, y = 0,5b) с относительными толщинами несущих слоев – $h_1 = 0,04$ м, $h_2 = 0,02$ м при различных толщинах заполнителя. Кривые соответствуют следующим значениям *1* – $h_3 = 0,04$ м, *2* – $h_3 = 0,07$ м, *3* – $h_3 = 0,1$ м.

Очевидно, что увеличение толщины заполнителя приводит к уменьшению прогибов первого несущего слоя, что подтверждает рис.2.

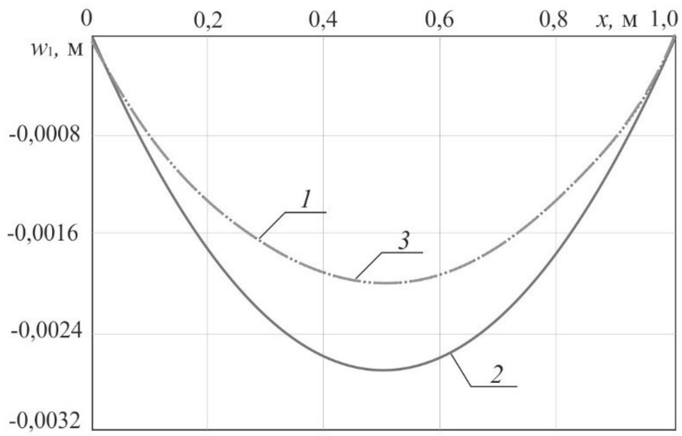

Рис.3.

ISSN 2541-9269

На рис.3 показано изменение прогиба первого слоя w_1 вдоль оси x при различных значениях y. Относительные толщины слоев – $h_1 = 0,01$, $h_2 = 0,04$, $h_3 = 0,2$ м. Размеры пластины $a = 1$ м, $b = 1$ м. Кривые соответствуют следующим сечениям: *1* – $y = \dfrac{b}{4}$, 2 – $y = \dfrac{b}{2}$, 3 – $y = \dfrac{3b}{4}$. Из графика видно, что максимальное значение прогиба достигается в сечении $y = 0,5b$.

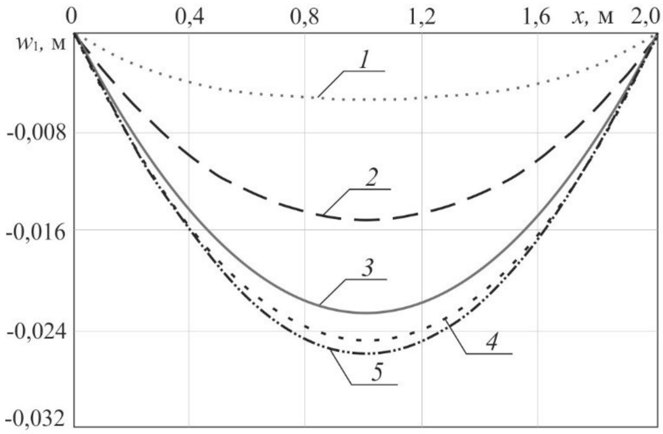

Рис.4.

На рис.4 показано изменение прогибов первого слоя w_1 вдоль оси x (a = 2 м, y = 0,5b) при различных размерах длины пластины b: *1* – $b = 1$ м, *2* – $b = 2$м, *3* – $b = 4$м, *4* – $b = 6$м, *5* – $b = 10$м. Относительные толщины слоев – $h_1 = 0,01$, $h_2 = 0,04$, $h_3 = 0,2$м.

При увеличении длины пластины b с 1 м до 2м максимальный прогиб увеличивается на 61%, при увеличении длины пластины b с 2 м до 4 м – на 29%, при увеличении длины пластины с 4 м до 6 м величина прогиба увеличивается на 11,2%. Отличие максимальных прогибов на кривой *5* ($b = 10$м) от кривой *4* ($b = 6$ м) составляет менее 1%.

Дальнейшее увеличение размера b не приводит к количественному изменению прогибов в центре пластины, изгиб пластины близок к цилиндрическому.

Литература

1. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием. М.: Физмалит, 2011. 560 с.
2. Старовойтов Э.И., Доровская Е.П. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2006. №3. С. 21-28.
3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойной круговой пластины на упругом основании //

Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 1. С. 16-22.

4. Starovoitov É.I., Yarovaya A.V., Leonenko D. V. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads // Strength of materials. 2003. Vol. 35. № 4. P. 346-352.
5. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
6. Новичков Ю.Н. О различных моделях описания деформирования многослойных конструкций. // Тр. МЭИ. 1980. №459. С. 40-47.
7. Starovoitov É.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation // International Applied Mechanics. 2007. Vol. 43. №. 4. P. 451-459.
8. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation // Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46. № 2. P. 291-298.
9. Леоненко Д.В. Колебания трехслойного стержня под действием импульсных нагрузок различных форм // Материалы, технологии, инструменты. 2004. Т. 9. № 2. С. 23-27.
10. Kubenko V.D., Pleskachevskii Yu.M., Starovoitov É.I., Leonenko D.V. Natural vibration of a sandwich beam on an elastic foundation // International applied mechanics. 2006. Vol. 42. № 5. P. 541-547.
11. Леоненко Д.В. Вынужденные колебания трехслойного стержня на упругом безынерционном основании // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2007. № 3. С. 70-74.
12. Леоненко Д.В. Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек // Механика машин, механизмов и материалов. 2010. №3(12). С. 53-56.
13. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 3-11.
14. Могилевич Л.И. Динамика взаимодействия сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости с упругой трехслойной пластиной // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. № 5. С. 114-123.
15. Могилевич Л.И., Попов В.С., Старовойтов Э.И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56-63.
16. Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A., Christoforova A. V., Popova E. V. Mathematical modeling of three-layer beam hydroelastic oscillations // Vibroengineering PROCEDIA, Vol. 12, 2017, p. 12-18.
17. Могилевич Л.И., Попов В.С., Христофорова А.В. Математические вопросы гидроупругости трехслойных элементов конструкций. Саратов: Изд-во КУБиК, 2012. 123 с.
18. Старовойтов Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. Гомель: БелГУТ, 2002. 343 с.