

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/16-54](http://mathmod.esrae.ru/16-54)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Тер-Акопянц Г.Л., Тер-Акопянц Л.Г. Об особенностях распространения волн при изгибных колебаниях армированной цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №4

УДК 539.3

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ПРИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ АРМИРОВАННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Тер-Акопянц Г.Л.<sup>1</sup>, Тер-Акопянц Л. Г.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский Государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»), Россия, Санкт-Петербург, [g.ter.a@mail.ru](mailto:g.ter.a@mail.ru)

<sup>2</sup>Россия, Санкт-Петербург, [g.ter.a@mail.ru](mailto:g.ter.a@mail.ru)

## ABOUT THE FEATURES OF WAVE PROPAGATION OF A REINFORCED CYLINDRICAL FLUID-FILLED SHELL IN THE BEAM-MODE OF VIBRATIONS

Ter-Akopyants G.L.<sup>1</sup>, Ter-Akopyants L. G.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI", Russia, Sankt-Petersburg, [g.ter.a@mail.ru](mailto:g.ter.a@mail.ru)

<sup>2</sup>Russia, Sankt-Petersburg, [g.ter.a@mail.ru](mailto:g.ter.a@mail.ru)

**Аннотация.** В работе рассмотрено распространение упругих волн в армированной в окружном направлении цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью, для изгибного режима колебаний. Сопоставлены дисперсионные кривые и модальные коэффициенты для ортотропной оболочки без жидкости, с несжимаемой жидкостью и со сжимаемой жидкостью. Это позволило выявить влияние ортотропии и жидкости на частоты отсечки и на преобладающий тип перемещений.

**Ключевые слова:** армированная цилиндрическая оболочка, заполненная жидкостью; распространение волн; дисперсионные кривые, модальные коэффициенты.

**Abstract.** The paper considers the propagation of elastic waves in the circumferential-reinforced cylindrical fluid-filled shell for beam-mode of vibrations. The dispersion curves and modal coefficients are compared for orthotropic shell without fluid, for orthotropic shell filled with an incompressible fluid and for orthotropic shell filled with a compressible fluid. This allowed us to identify the influence of orthotropy and of fluid on the cut-on frequency and on the prevailing type of displacements.

**Keywords:** reinforced cylindrical fluid-filled shell; wave propagation; dispersion curves; modal coefficients.

В различных технических и промышленных отраслях широко используются трубопроводы большой протяжённости, по которым с невысокой скоростью перекачиваются жидкости. При этом шум и вибрация, создаваемая внешним устройством в одном конце трубопровода, могут передаваться на значительные расстояния. Устранение этих нежелательных явлений требует исследования процессов распространения упругих волн в трубопроводе, заполненном жидкостью. В настоящее время широкое применение имеют элементы трубопроводов из полимерных, армированных материалов, позволяющих снизить вес и стоимость при сохранении прочностных характеристик. Но динамическое поведение такой анизотропной трубы (цилиндрической оболочки) при распространении упругих волн может отличаться от изотропной, что и является предметом настоящего исследования. Целью работы является выявление особенностей характера распространения упругих волн в заполненной невязкой жидкостью длинной тонкой цилиндрической оболочке, армированной в окружном направлении. В качестве математической модели используется бесконечно длинная ортотропная оболочка, заполненная несжимаемой или сжимаемой идеальной жидкостью. Полученные результаты могут быть применены также к оболочке со спиральным армированием, когда угол намотки относительно оси близок к  $90^\circ$ , если пренебречь эффектами "закручивания" распространяющихся волн.

Впервые исследование волновых процессов в изотропной цилиндрической оболочке с жидкостью на основе анализа дисперсионных кривых было проведено, по-видимому, в [1]. Отметим также ряд более современных работ, касающихся волновых процессов в анизотропных цилиндрических оболочках, заполненных жидкостью [2-5]. Методика нахождения модальных коэффициентов описана в [6]. В работе [7] проанализированы особенности волновых процессов и поведение модальных коэффициентов, найденных методами, сходными с [6], для изгибного режима.

Системы динамических уравнений равновесия цилиндрической оболочки имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{x\theta}}{\partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{R} = -q_n + \rho h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \end{array} \right. , \quad (1)$$

где  $N_x, N_\theta, S_{x\theta}, S_{\theta x}$  – погонные усилия, а  $M_x, M_\theta, H$  – погонные изгибающие и крутящий моменты,  $\rho$  – плотность материала,  $q_n$  – давление жидкости на стенку оболочки.

Для ортотропной оболочки решения системы (1), записанной в перемещениях и учитывающей наличие жидкости внутри оболочки, будем искать в виде:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} = e^{k_* x - i \Omega t} \begin{pmatrix} U_m \cos(m \theta) \\ V_m \sin(m \theta) \\ W_m \cos(m \theta) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $k_*$  – осевое волновое число,  $\Omega$  – частота,  $m$  – фиксированное число окружных волн.

Переход к безразмерным координатам, введение приведённого осевого волнового числа  $k = k_* \cdot R$  и приведенной частоты  $\omega$ , связанной с  $\Omega$  формулой  $\omega^2 = \rho \frac{2(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1 + E_2} R^2 \Omega^2$ , приводит для каждого фиксированного  $m$  к следующей линейной однородной системе для амплитуд перемещений, называемых модальными коэффициентами:

$$L \cdot \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $L_{11} = b_1 k^2 - b_G m^2 + \omega^2$ ,

$L_{12} = (b_1 \nu_{21} + b_G) m k$ ,

$L_{13} = b_1 \nu_{21} k$ ,

$L_{21} = -(b_2 \nu_{12} + b_G) m k$ ,

$L_{22} = b_G k^2 - b_2 m^2 + a(-b_2 m^2 + 4b_G k^2) + \omega^2$ ,

$L_{23} = -b_2 m + a\{(b_2 \nu_{12} + 4b_G) m k^2 - b_2 m^3\}$ ,

$L_{31} = -b_2 \nu_{12} k$ ,

$L_{32} = -b_2 m + a\{(b_1 \nu_{21} + 4b_G) m k^2 - b_2 m^3\}$ ,

$L_{33} = -b_2 + a\{-b_1 k^4 + (b_1 \nu_{21} + b_2 \nu_{12} + 4b_G) m^2 k^2 - b_2 m^4\} + \omega^2 \left(1 + \frac{\rho_{fl}}{\rho} \frac{R}{h} f_m(k, \omega)\right)$ ;

$a = \frac{h^2}{12R^2}$ ,  $b_1 = \frac{2E_1}{E_1 + E_2}$ ,  $b_2 = \frac{2E_2}{E_1 + E_2}$ ,  $b_G = \frac{2G(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1 + E_2}$ ;  $E_1 = E_z$ ,  $E_2 = E_\theta$  –

продольный и окружной модули Юнга;  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{12}$  – коэффициенты Пуассона,

$G = \frac{E_1 E_2}{E_1(1 + \nu_{21}) + E_2(1 + \nu_{12})}$ ;  $h$  – толщина,  $R$  – срединный радиус оболочки;

$$f_m(k, \omega) = \frac{J_m \left( \sqrt{k^2 + \frac{c^2}{c_{fl}^2} \omega^2} \right)}{m J_m \left( \sqrt{k^2 + \frac{c^2}{c_{fl}^2} \omega^2} \right) - \sqrt{k^2 + \frac{c^2}{c_{fl}^2} \omega^2} \cdot J_{m+1} \left( \sqrt{k^2 + \frac{c^2}{c_{fl}^2} \omega^2} \right)}, \quad J_m - \text{ функция}$$

Бесселя;  $\rho$  и  $\rho_{fl}$  - плотности оболочки и жидкости,  $c$  и  $c_{fl}$  - скорости звука в оболочке и в жидкости соответственно.

Изгибному режиму колебаний соответствует значение  $m = 1$ .

Дисперсионное уравнение получается из равенства нулю определителя матрицы  $L$ .

$$\det L = 0. \quad (4)$$

Графические изображения его решений (зависимостей  $k = k(\omega)$ ) представляют собой дисперсионные кривые. При выборе перемещений в виде (2) распространяющимся волнам соответствуют чисто мнимые значения  $k$ .

В качестве примера рассмотрена тонкая цилиндрическая оболочка ( $h/R=0.05$ ) из полимерного материала с 10% стальным армированием в окружном направлении. При этом отношение окружного и продольного модулей Юнга принималось равным 1:25, коэффициент Пуассона основного материала равным 0.4,  $\rho_{fl} : \rho = 0.621$ ,  $c : c_{fl} = 1.333$ . В используемой модели ортотропного материала использовалось классическое [8] для ортотропной теории упругости соотношение  $E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}$ , что, вероятно, не вполне справедливо для композитного материала. Однако было проверено, что зависимость волновых чисел от коэффициентов Пуассона весьма слаба, и, даже если принять  $\nu_{21} = \nu_{12} = 0.4$ , то на качественные выводы это не повлияет.

Для решения поставленной задачи были рассмотрены и сопоставлены дисперсионные кривые и модальные коэффициенты для изотропной и ортотропной оболочек без жидкости, с несжимаемой жидкостью и со сжимаемой жидкостью.

Рисунки 1–2 позволяют проанализировать влияние окружного армирования для пустой оболочки. На них представлены дисперсионные кривые и модальные коэффициенты для изотропной и ортотропной оболочки без жидкости. Сопоставление результатов приведено в таблице 1. (Символами  $\uparrow$  и  $\downarrow$  обозначается возрастание и убывание соответствующей величины с ростом  $\omega$ ).

Влияние окружного армирования проявляется главным образом в том, что:

– снижается частота зарождения второй распространяющейся волны (оранжевая дисперсионная кривая);

- при этом с ростом частоты переход превалирующих преимущественно продольных перемещений в преимущественно окружные в изотропном случае, при наличии армирования не наблюдается;
- повышается частота зарождения третьей распространяющейся волны (зелёная дисперсионная кривая);
- при этом с ростом частоты происходит переход радиально-окружных перемещений в преимущественно окружные, а не в преимущественно продольные, как в изотропном случае.

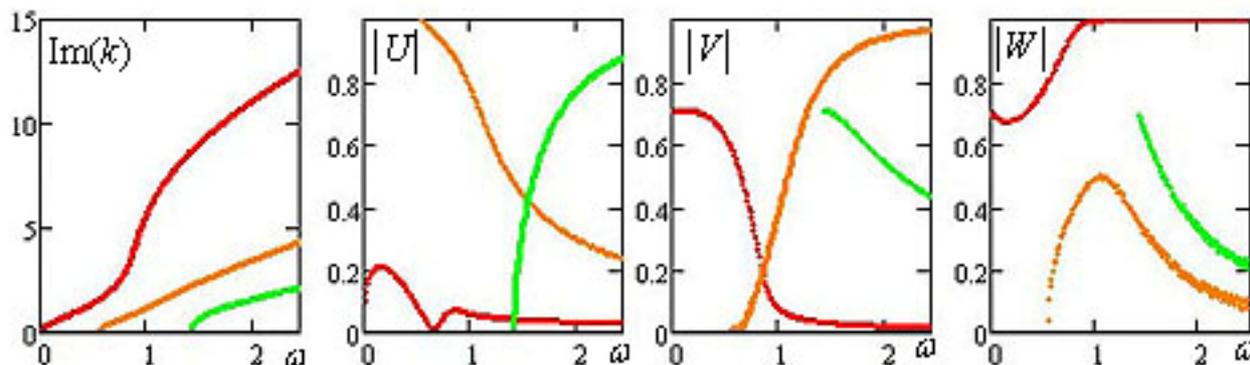


Рис.1. Дисперсионные кривые и модальные коэффициенты для изотропной оболочки без жидкости

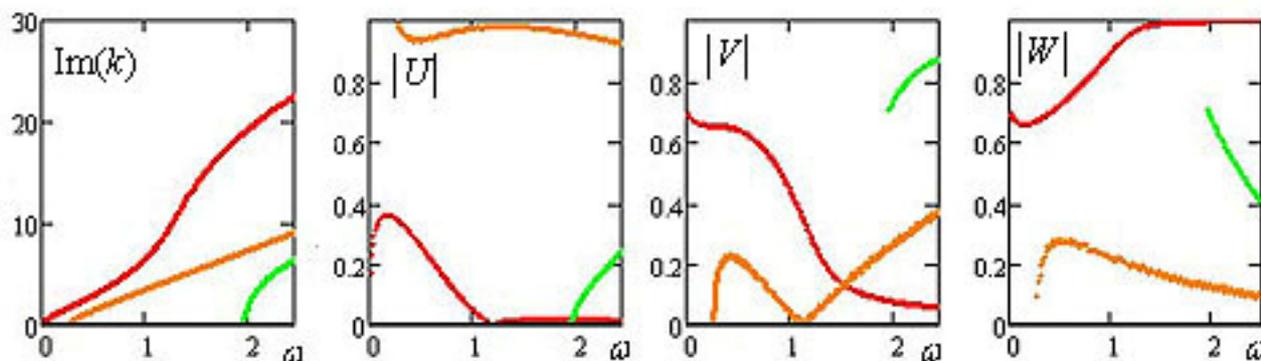


Рис.2. Дисперсионные кривые и модальные коэффициенты для ортотропной оболочки без жидкости

Таблица 1.

Частоты отсечки и превалирующие перемещения для оболочки без жидкости

	1-красная		2-жёлтая		3-зелёная	
	изотр.	орт.	изотр.	орт.	изотр.	орт.
Частота зарождения	0	0	0.55	0.30	1.45	1.95
Превалирующий тип перемещений а) при зарождении б) в конце интервала для $\omega$	V-W	V-W	U	U	V-W	V-W
	W	W	V	U	U	V

Характер изменения модальных коэффициентов с ростом $\omega$ .	$V \downarrow$ $W \uparrow$	$V \downarrow$ $W \uparrow$	$U \downarrow$ $V \uparrow$		$U \uparrow$ $V \downarrow$ $W \downarrow$	$U \uparrow$ $V \downarrow$ $W \downarrow$
--	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--	--	--

Рисунки 3–4 позволяют проанализировать влияние окружного армирования для оболочки, заполненной несжимаемой жидкостью. На них представлены дисперсионные кривые и модальные коэффициенты для изотропной и ортотропной оболочки с несжимаемой жидкостью. Сопоставление результатов приведено в таблице 2. (Символами  $\uparrow\uparrow$  и  $\downarrow\downarrow$  обозначается интенсивное возрастание / убывание соответствующей величины с ростом  $\omega$ .) Отметим, что наличие несжимаемой жидкости внутри изотропной оболочки приводит к снижению частоты отсечки третьей распространяющейся волны (зелёная дисперсионная кривая). В остальном качественное влияние ортотропии полностью аналогично случаю пустой оболочки. Это объясняется тем, что в несжимаемой жидкости упругие волны не распространяются.

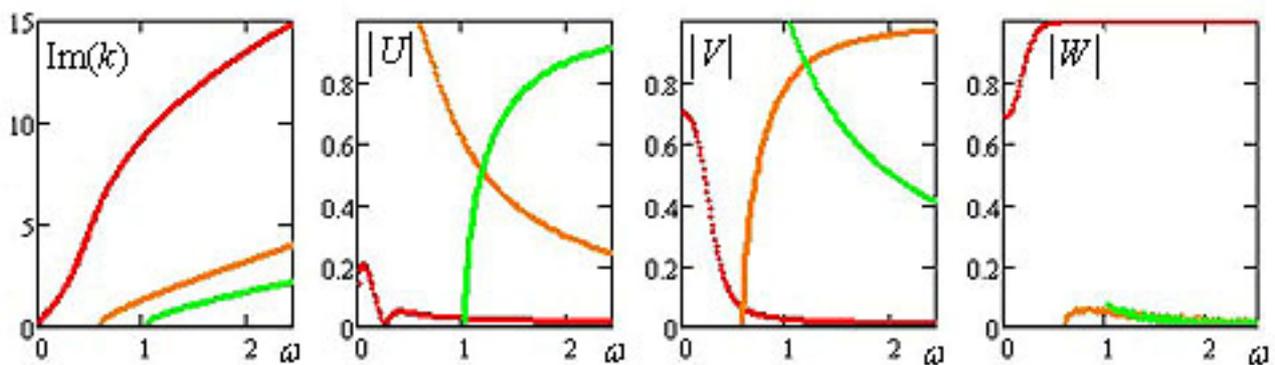


Рис.3. Дисперсионные кривые и модальные коэффициенты для изотропной оболочки с несжимаемой жидкостью

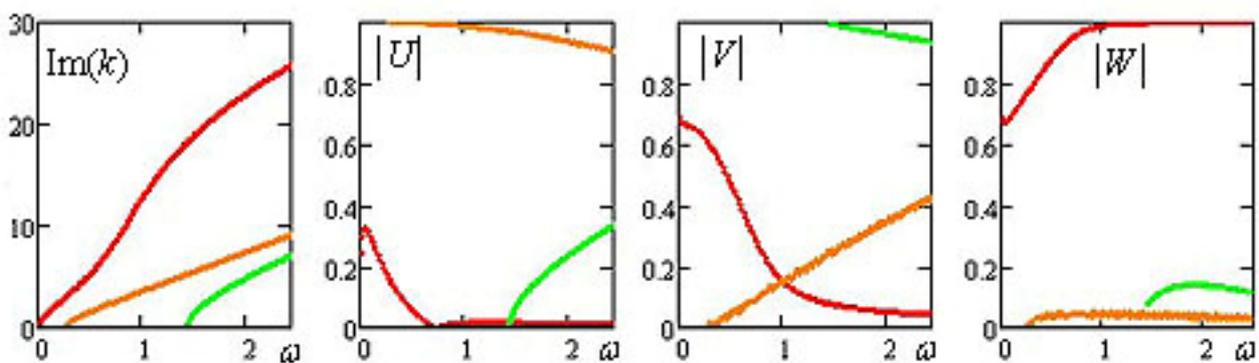


Рис.4. Дисперсионные кривые и модальные коэффициенты для ортотропной оболочки с несжимаемой жидкостью

Таблица 2.

Частоты отсечки и превалирующие перемещения для оболочки с несжимаемой жидкостью

	1-красная		2-жёлтая		3-зелёная	
	изотр.	орт.	изотр.	орт.	изотр.	орт.
Частота зарождения	0	0	0.55	0.30	1.00	1.45
Превалирующий тип перемещений а) при зарождении б) в конце интервала для $\omega$	V-W	V-W	U	U	V	V
	W	W	V	U	U	V
Характер изменения модальных коэффициентов с ростом $\omega$ .	V↓ W↑	V↓ W↑	U↓↓ V↑↑	U↓ V↑	U↑ V↓	U↑ V↓

Рисунки 5–6 позволяют проанализировать влияние окружного армирования для оболочки, заполненной сжимаемой жидкостью. На них также представлены дисперсионные кривые и модальные коэффициенты. Результаты приведены в таблице 3. Прежде всего, отметим, что наличие сжимаемой жидкости, способной распространять упругие волны, приводит к появлению в рассматриваемом частотном диапазоне четвёртой распространяющейся волны жидкостного происхождения (голубая дисперсионная кривая). Такая же дисперсионная кривая (показано на рис. 5–6 чёрной точечной линией) описывает распространение волны в жидкости в абсолютно жёстком акустическом волноводе [9]. Влияние окружного армирования на первую и вторую распространяющиеся волны (красная и оранжевая дисперсионные кривые) такое же, как в отсутствие жидкости или с несжимаемой жидкостью. Третья распространяющаяся волна в изотропном случае появляется как волна структурного происхождения и характеризуется преимущественно окружными перемещениями, доля которых с ростом частоты уменьшается в пользу продольных, но это происходит только до частоты  $\omega = 1.75$ , на которой зелёная и голубая дисперсионные кривые сближаются (veering). На этой частоте происходит интенсивное взаимодействие жидкости с оболочкой по радиальной координате, обмен энергией между оболочечной и жидкостной волнами (см [10]), в результате чего зелёная дисперсионная кривая, начиная с этой частоты, описывает преимущественно жидкостную волну, характеризующуюся нарастающими радиальными перемещениями, а голубая – преимущественно

структурную с преобладанием осевых перемещений. При этом происходят достаточно резкие изменения модальных коэффициентов. А в случае окружного армирования увеличивается частота зарождения третьей структурной волны (зелёная дисперсионная кривая) и эффекты, связанные со сближением дисперсионных кривых не наблюдаются.

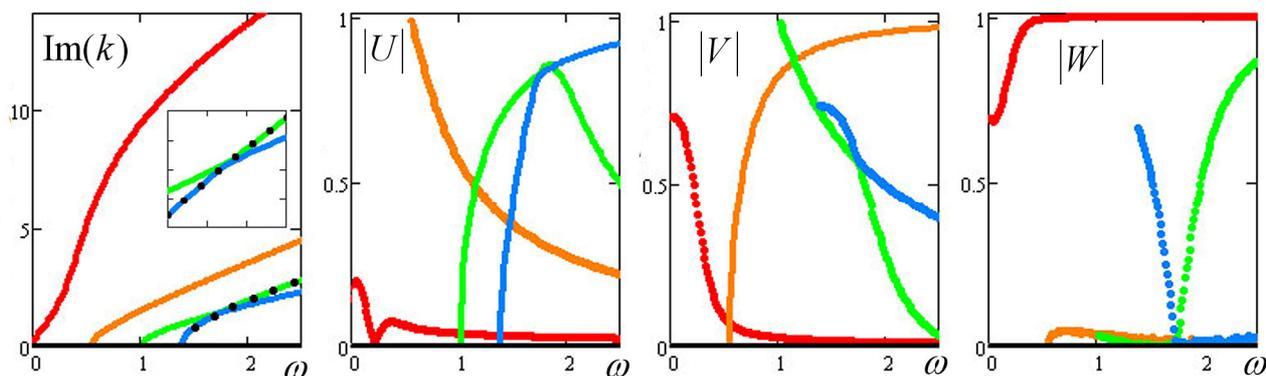


Рис.5. Дисперсионные кривые и модальные коэффициенты для изотропной оболочки со сжимаемой жидкостью (точками показана дисперсионная кривая для абсолютно жёсткого акустического волновода)

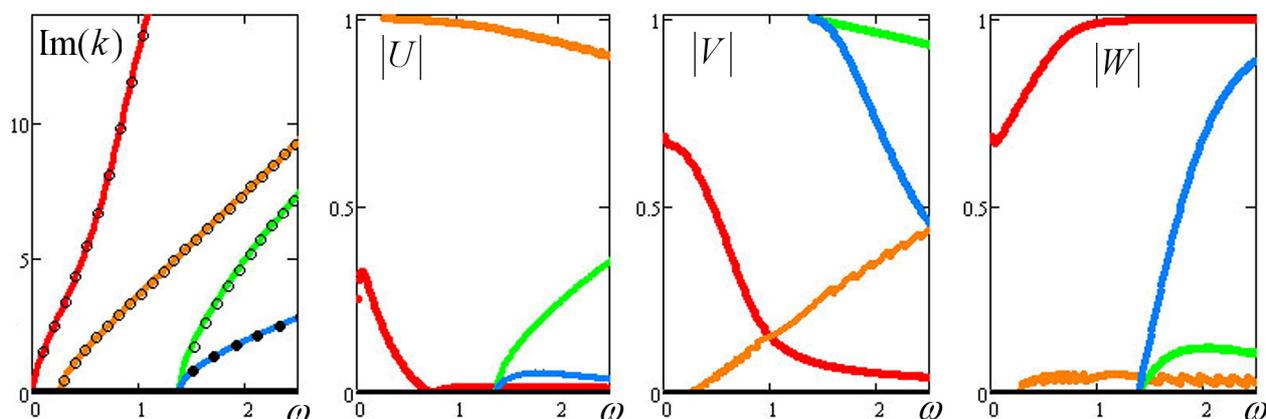


Рис.6. Дисперсионные кривые и модальные коэффициенты для ортотропной оболочки со сжимаемой жидкостью (точками показана дисперсионная кривая для абсолютно жёсткого акустического волновода, кружками – дисперсионные кривые для ортотропной оболочки с несжимаемой жидкостью)

Таблица 3.

Частоты отсечки и преобладающие перемещения для оболочки со сжимаемой жидкостью

	1-красная		2-жёлтая		3-зелёная		4-голубая	
	изотр.	орт.	изотр.	орт.	изотр.	орт.	изотр.	орт.
частота зарождения	0	0	0.55	0.30	1.00	1.45	1.40	1.40

превалирующий тип перемещений а) при зарождении б) в конце интервала для $\omega$	V-W	V-W	U	U	V	V	V-W	V
	W	W	V	U	U	V	U	W
Характер изменения модальных коэффициентов с ростом $\omega$ .	V↓↓ W↑↑	V↓ W↑	U↓↓ V↑↑	U↓ V↑	при $\omega < 1.75$ U↑↑ V↓↓ W↓ при $\omega > 1.75$ U↓↓ V↓↓ W↑↑	U↑ V↓	при $\omega < 1.75$ U↑↑ V↓↓ W↓↓ при $\omega > 1.75$ U↑ V↓ W↑	V↓ W↑

В заключение отметим, что во многих отраслях техники, где применяются трубопроводы большой протяженности, длинноволновые колебания, которые возникают при малых значениях  $Im(k)$ , нежелательны, а окружное армирование позволяет сместить их в другой частотный диапазон. Также неблагоприятно сказываются на работе трубопровода резкие изменения преобладающего типа перемещений, чего можно избежать, если устранить зону сближения дисперсионных кривых за счёт окружного армирования. Таким образом, полученные результаты могут быть полезны в вопросах борьбы с шумом и вибрацией трубопроводов.

### Литература

1. Fuller C.R., Fahy F.J. Characteristics of wave propagation and energy distributions in cylindrical elastic shells filled with fluid // Journal of Sound and Vibration (1982) 81(4), pp. 501-518.
2. Jeong Ho You, K. Inaba. Fluid-structure interaction in water-filled thin pipes of anisotropic composite materials // Journal of Fluids and Structures, 36(0), 2013. 1. pp. 162-173.
3. Kunte M.V., A. Sarkar, and V.R. Sonti. Asymptotic expansions for the coupled wavenumbers in an infinite orthotropic flexible fluid-filled cylindrical shell // Journal of the Acoustical Society of America, 131(6), 2012. pp. 4272-4282.
4. Xi Z.C., Liu G.R., Lam K.J., Shang H.M. Dispersion and characteristic surfaces of waves in laminated composite circular cylindrical shells // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V.108 (5), pp.2179-2186.

5. Prakash Vijay S., Sonti V.R. Asymptotic expansions for the wavenumbers in orthotropic fluid-filled circular cylindrical shells for intermediate fluid loading // Journal of Acoustical Society of America, 135(6), June 2014. pp. 3198-3208.
6. Liu Yu-Cheng, Yun-Fan Hwang, Jin-Huang Huang. Dispersion relations and modal patterns of wave in a cylindrical shell // Wave process in classical and new solids, Prof. Pasquale Giovine (Ed.), 2012, ISBN: 978-953-51-0821-4, in tech, DOI: 10.5772/50477.
7. Тер-Акопянц Г.Л. Дисперсионные кривые и модальные коэффициенты при распространении волн в оболочке с жидкостью // Естественные и технические науки. 2015. № 6(84). С.77-81.
8. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
9. Тер-Акопянц Г.Л., Тер-Акопянц Л.Г. Об идентификации структурных и жидкостных волн в упругой цилиндрической оболочке с жидкостью на основе анализа дисперсионных кривых // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2016. № 10-2. С. 197-200; URL: <http://www.applied-research.ru/ru/article/view?id=10316> (дата обращения: 24.10.2016).
10. Филиппенко Г.В. Энергия волн изгибного типа в бесконечной цилиндрической оболочке, заполненной сжимаемой жидкостью // Современное машиностроение: Наука и образование: материалы 5-й Международной научно-практической конференции. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. с. 276-286.