Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/16-56
Ссылка для цитирования этой статьи:
Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И. Волны в двух нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними, окруженных упругой средой как снаружи так и внутри // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. №4
Выполнено при поддержке гранта №16-01-00175-а.

УДК 532.516:539.3

ВОЛНЫ В ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СООСНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ, СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ МЕЖДУ НИМИ, ОКРУЖЕННЫХ УПРУГОЙ СРЕДОЙ КАК СНАРУЖИ ТАК И ВНУТРИ

Блинков Ю.А.[1], Евдокимова Е.В.[2], Могилевич Л.И.[3]

[1]Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, blinkovua@info.sgu.ru
[2] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, eev2106@mail.ru
[3] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, mogilevich@sgu.ru

WAVES IN NONLINEAR ELASTIC COAXIAL CYLINDRICAL SHELLS, CONTAINING VISCOUS LIQUID BETWEEN THEM, SURROUNDED BY AN ALASTIC MEDIUM AS AUTSIDE AS INSIDE

Blinkov Yu.A.[1], Evdokimova E.V.[2], Mogilevich L.I.[3]

[1]Saratov State University, blinkovua@info.sgu.ru
[2] Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, eev2106@mail.ru
[3]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, mogilevich@sgu.ru

Аннотация. В настоящее время для изучения нелинейных волновых процессов в бесконечно длинных геометрических нелинейных коаксиальных цилиндрических оболочках, между которыми находится вязкая жидкость, разработаны математические модели на базе постановки и решения задач гидроупругости. Данные задачи представляют собой нелинейные системы уравнений динамики оболочек-стенок канала и вязкой несжимаемой жидкости, которые дополнены краевыми условиями на границах контакта «поверхность оболочки - жидкость». В данной работе построена и изучена математическая модель для исследования

волновых процессов в геометрически нелинейных оболочках типа Кирхгофа-Лява, образующих кольцевой канал, заполненный вязкой несжимаемой жидкостью, окруженный упругой средой как снаружи, так и внутри. При этом выбрана модель упругой среды, реакции которой действуют как в нормальном, так и в продольном направлении.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки.

Abstract. Currently, mathematical models are developed on the basis of the formulation and solution of problems of hydroelasticity. for studying of nonlinear wave processes in infinitely long geometrical nonlinear coaxial cylindrical shells between which there is a viscous liquid. These problems consist of systems of dynamics shell and viscous incompressible fluid equations, which are supplemented by boundary conditions at the boundaries of the contact "shell surface - liquid". These problems are described by shell dynamics and viscous incompressible liquid equations with corresponding. In this paper, the mathematical model for the study of wave processes in geometrically nonlinear Kirchhoff-Love shells, forming an annular channel filled with viscous incompressible fluid, surrounded by an elastic medium both outside and inside, is constructed and studied. The elastic medium model in which reactions in both normal and longitudinal direction are taken into account is considered.

Keywords*:* nonlinear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylindrical shells.

Случай ламинарного движения вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонически изменяющегося по времени перепада давления в кольцевом канале, образованном двумя абсолютно жесткими цилиндрами, или в цилиндрической оболочке исследован в [1-3]. В работах [4-8] исследовано движение жидкости в кольцевом канале при вибрации его стенок. С другой стороны, для современной волновой динамики представляют теоретический и практический интерес изучение распространения волн деформаций в упругих оболочках, образующих стенки канала. Например, в [9-11] предложены математические модели волн деформаций в бесконечно длинных геометрически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, на основе постановки и решения задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости.

Разработка математических моделей для исследования волн деформаций в двух бесконечно длинных геометрически нелинейных цилиндрических оболочках, образующих кольцевой канал, на базе метода возмущений выполнена в [12, 13]. Данные модели отличаются от известных учетом наличия вязкой несжимаемой жидкости между оболочками.

Рассмотрим бесконечно длинный кольцевой канал, образованный двумя цилиндрическими оболочками, который представлен на рисунке. Кольцевой канал между оболочками полностью заполнен вязкой несжимаемой жидкостью. Далее будем использовать следующие обозначения: δ - ширина кольцевого канала, $R_1 = R^{(1)} - \frac{h_0^{(1)}}{2}$ - внутренний радиус внешней оболочки; $R^{(1)}$ – радиус

срединной поверхности внешней оболочки, $R_2 = R^{(2)} + \frac{h_0^{(2)}}{2}$ - внешний радиус внутренней оболочки; $R^{(2)}$ – радиус срединной поверхности внутренней оболочки; $R_3 = R^{(2)} - \frac{h_0^{(2)}}{2}$ - внутренний радиус внутренней оболочки, $h_0^{(1)}$ – толщина внешней оболочки, $h_0^{(2)}$ - толщина внутренней оболочки.

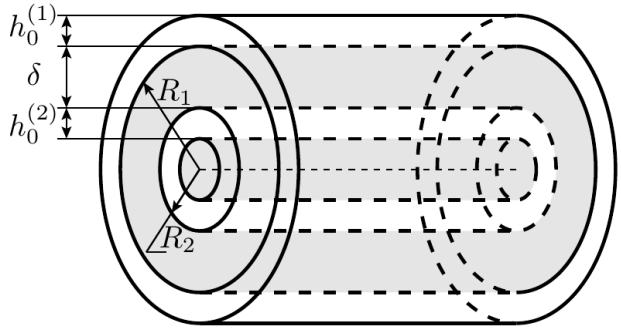

Рис. 1

Далее будем обозначать верхним индексом (2) величины, относящиеся к внутренней оболочке, а верхним индексом (1) величины, относящейся к внешней оболочке.

Рассмотрим осесимметричную постановку задачи и введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат (r,θ,x), связанную с осью симметрии канала в этом случае уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости, записанные совместно с уравнением неразрывности имеют следующий вид [14]

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}\right), \qquad \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

В качестве граничных условий уравнений (1) будем использовать условия прилипания жидкости к стенками канала и условие ограниченности скорости на оси симметрии канала [14]

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}, \quad V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} \quad \text{при } r=R_i\text{-}W^{(i)} \quad , \quad r\frac{\partial V_r}{\partial r} = r\frac{\partial V_x}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r=0, \qquad (2)$$

где $U^{(i)}$ - упругое продольное перемещение i-той оболочки вдоль оси x; $W^{(i)}$ - прогиб i-той оболочки, который считается положительным по направлению к центру кривизны; t – время; p- давление; ρ - плотность, ν - кинематический

коэффициент вязкости жидкости; V_x, V_r – проекции вектора скорости жидкости на оси введенной цилиндрической системы координат.

В рассматриваемой постановке уравнения динамики i-той оболочки согласно [12,13,15] имеют вид

$$\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \left[U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)^2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)^2} + \frac{h_0^{(i)^2}}{24} W_{xx}^{(i)^2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]_x - \rho_0 h_0^{(i)} U_{tt}^{(i)} -$$

$$\left[k_3 R^{(i)^2} \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^4} U^{(i)} - k_4 \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^2 R^{(i)^2}} U^{(i)^3} \right] = -q_x^{(i)}$$

$$\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \left\langle \frac{h_0^{(i)^2}}{12} \left(W_{xx}^{(i)} + U_x^{(i)} W_{xx}^{(i)} \right)_{xx} - \left\{ W_x^{(i)} \left(U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)^2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)^2} + \frac{h_0^{(i)^2}}{24} W_{xx}^{(i)^2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right\}_x - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{R} \left(\mu_0 U_x^{(i)} + \frac{1}{2} \mu_0 U_x^{(i)^2} + \frac{1}{2} \mu_0 U_x^{(i)^2} + \frac{h_0^{(i)^2}}{24} \mu_0 W_{xx}^{(i)^2} - \frac{W^{(i)}}{R} \right) \right\rangle + \tag{3}$$

$$+ k_1 \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^2} W^{(i)} + \rho_0 h_0^{(i)} W_{tt}^{(i)} = (-1)^{i-1} q_n$$

где $h_0^{(i)}$ - толщина i-той оболочки; $c_0 = \sqrt{E/\rho_0 (1-\mu_0^2)}$ - скорость звука в i-той оболочке; E – модуль Юнга материала оболочки; μ_0- коэффициент Пуассона материала оболочки, ρ_0- плотность материала оболочки, q_x^i, q_n- касательное нормальное напряжения со стороны жидкости в кольцевом канале, образованном оболочками. В приведенных уравнения нижние индексы при упругих перемещений обозначают соответствующие частные производные.

В уравнениях (3) члены $k_1 \frac{\rho_0 h_0^{(1)} c_0^2}{l^2} W^{(i)}$, $k_3 \frac{R^{(i)^2} p_0 h_0^{(1)} c_0^2}{l^4} U^{(i)} - k_4 \frac{\rho_0 h_0^{(1)} c_0^2}{l^2 R^{(1)^2}} U^{(i)^3}$ представляют собой реакции окружающей среды в нормальном и продольном направлениях, действующие на наружной поверхности внешней оболочки при i=1 или внутренней оболочке при i=2 [16]

$$q_n = P_{rr}\big|_{r=R_i-W^{(i)}}, \quad q_x = P_{rx}\big|_{r=R_i-W^{(i)}}, \quad P_{rr} = -\rho + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad P_{rx} = \rho\nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \tag{4}$$

Далее за характерный размер будем принимать длину волны l, амплитуду продольного перемещения оболочки будем обозначать как u_m, а амплитуду ее прогиба как w_m и перейдем к следующим безразмерным переменным:

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \; U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \; t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l} \tag{5}$$

Считаем, что

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \quad \frac{R^{(i)}}{l} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right), \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \quad \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon). \tag{6}$$

Введем в рассмотрение полухарактеристические (бегущие) координаты и растянутое время:

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \tag{7}$$

здесь c – неизвестная безразмерная скорость волны.

Выполним разложения упругих перемещений оболочки по степеням $\varepsilon = \dfrac{u_m}{l}$:

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \ldots, \; u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \ldots \tag{8}$$

Выполняя подстановку (5-8) в (3), а затем разделив обе части уравнений на $\varepsilon = u_m / l$ и ограничиваясь членными при ε^0 и ε^1, будем иметь:

$$\begin{gathered}
\left(u_{10\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)}\right)_\xi + \varepsilon\left\{u_{11\xi\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} + \frac{1}{2}\frac{u_m}{l\varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2}\right\}_\xi - \\
- \varepsilon\left[k_3 \frac{R^{(i)2}}{l^2 \varepsilon} u_{10} - k_4 \frac{u_m^2}{R^{(i)2}\varepsilon} u_{10}^3\right] - c^2 u_{10\xi\xi}^{(i)} - \varepsilon c^2 u_{11\xi\xi}^{(i)} + 2\varepsilon c u_{10\xi\tau}^{(i)} = -\frac{l^2 q_x^{(i)}}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \\
- \mu_0 u_{10\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} + \varepsilon\left\langle - \mu_0 u_{11\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} - \frac{1}{2}\mu_0 \frac{u_m}{l\varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2}\right\rangle + \\
+ \varepsilon k_1 \frac{R^{(i)} w_m}{l u_m \varepsilon} u_{30}^{(i)} + \varepsilon \frac{w_m R^{(i)}}{u_m l} c^2 u_{30\xi\xi}^{(i)} = R^{(i)} l \frac{(-1)^{i-1} q_n}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}
\end{gathered} \tag{9}$$

Полагая равными нулю члены при ε^0, будем иметь следующую систему уравнений

$$u_{10\xi\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30\xi}^{(i)} - c^2 u_{10\xi\xi}^{(i)} = 0,$$

$$- \mu_0 u_{10\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30\xi}^{(i)} = 0$$

из которой получаем

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30\xi}^{(i)} = \mu_0 u_{10\xi}^{(i)}, \quad (1 - \mu_0^2 - c^2) u_{10\xi\xi}^{(i)} = 0 \tag{10}$$

Следовательно, u_{10} - произвольная функция, а безразмерная скорость волны $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$, так как $c^2 = 1 - \mu_0^2$. Приравниваем коэффициенты при ε в правых и левых частях уравнений и учитываем предыдущие результаты, тогда получаем:

$$\left[\mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)}\right]_\xi + \frac{1}{2}\frac{u_m}{l\varepsilon}\left[u_{10\xi}^{(i)^2}\right]_\xi + 2\sqrt{1-\mu_0^2}\, u_{10\tau\xi}^{(i)} - \left[k_3 \frac{R^{(i)^2}}{l^2\varepsilon} u_{10} - k_4 \frac{u_m^2}{R^{(i)^2}\varepsilon} u_{10}^3\right] =$$

$$= -\frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} q_x^{(i)},$$

$$-\mu_0 u_{11\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} - \frac{1}{2}\mu_0 \frac{u_m}{l\varepsilon} u_{10\xi}^{(i)^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{R^{(i)^2}}{l^2}\mu_0(1-\mu_0^2) u_{10\xi\xi\xi}^{(i)} + k_1 \mu_0 \frac{R^{(i)^2}}{l^2\varepsilon} u_{10\xi} =$$

$$= R^{(i)} l \frac{(-1)^{i-1} q_n}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}. \qquad (11)$$

Делая ряд преобразований, будем иметь следующую систему уравнений

$$u_{10\xi\tau}^{(i)} + \frac{u_m}{l\varepsilon}\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(i)} u_{10\xi\xi}^{(i)} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{R^{(i)}}{l}\right)^2 \frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(i)} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\left[\mu_0^2 k_1 \frac{R^{(i)^2}}{l^2\varepsilon} u_{10\xi\xi} - k_3 \frac{R^{(i)^2}}{l^2\varepsilon} u_{10} + k_4 \frac{u_m^2}{R^{(i)^2}\varepsilon} u_{10}^3\right] = \qquad (12)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}\left[q_x^{(i)} - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l}(-1)^{i-1}\frac{\partial q_n}{\partial \xi}\right]$$

Для случая, когда жидкость отсутствует, правая часть полученных уравнений становится равна нулю и данная система распадается на независимые уравнения, которые можно рассматривать как обобщение уравнения Кортевега-де-Вриза. Надо определить правую часть, для чего необходимо решить уравнение гидродинамики для случая кольцевого сечения трубы.

Рассмотрим кольцевое сечение и найдем напряжения, действующие со стороны жидкости.

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r,\ V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x,\ r = R_2 + \delta r^*,\ t^* = \frac{c_0}{l} t,\ x^* = \frac{x}{l}$$

$$p = \frac{\rho \nu c_0 l w_m}{\delta^3} P + p_0,\ \psi = \frac{\delta}{R_2} = o(1),\ \lambda = \frac{w_m}{\delta} = \frac{w_m}{R_2}\frac{R_2}{\delta} = o\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\right),$$

$$\frac{w_m}{R_2} = \frac{w_m}{\delta}\frac{\delta}{R_2} = \lambda\psi,\ \frac{w_m}{l} = \frac{w_m}{\delta}\frac{\delta}{R_i}\frac{R_i}{l} = \lambda\psi\varepsilon^{1/2},\ \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_i}\frac{R_i}{l} = \psi\varepsilon^{1/2}$$

В веденных безразмерных переменных с учетом наличия малых параметров в работе [13] найдено напряжение со стороны жидкости на упругие оболочки.

ISSN 2541-9269

$$\frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}\frac{\partial q_n}{\partial \xi} = \frac{\rho \nu}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12\sqrt{1-\mu_0^2}\left[u_m R^{(2)} u_{10\xi}^{(2)} - u_m R^{(1)} u_{10\xi}^{(1)}\right], \quad q_x^{(i)} = \frac{\delta}{2l}\frac{\partial q_n}{\partial \xi}(-1)^i. \tag{13}$$

Система уравнений динамики оболочек становится такой с учетом найденной правой частью (13)

$$\begin{gathered}
u_{10\xi\tau}^{(1)} + \frac{u_m}{l\varepsilon}\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(1)} u_{10\xi\xi}^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{R}{l}\right)^2 \frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(1)} + \\
+ \frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\left[k_1\mu_0^2 \frac{R^{(1)^2}}{l^2\varepsilon} u_{10\xi\xi}^{(1)} - k_3 \frac{R^{(1)^2}}{l^2\varepsilon} u_{10}^{(1)} + k_4 \frac{u_m^2}{R^{(1)^2}\varepsilon} u_{10}^{(1)3}\right] + \\
+ 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0}\frac{\nu}{R c_0 \varepsilon}\left(\frac{R}{\delta}\right)^3\left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R}\right]\left[u_{10\xi}^{(1)} - u_{10\xi}^{(2)}\right] = 0 \\
u_{10\xi\tau}^{(2)} + \frac{u_m}{l\varepsilon}\frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(2)} u_{10\xi\xi}^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{R}{l}\right)^2 \frac{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(2)} + \\
+ \frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\left[k_1\mu_0^2 \frac{R^{(2)^2}}{l^2\varepsilon} u_{10\xi\xi}^{(2)} - k_3 \frac{R^{(2)^2}}{l^2\varepsilon} u_{10}^{(2)} + k_4 \frac{u_m^2}{R^{(2)^2}\varepsilon} u_{10}^{(2)3}\right] + \\
+ 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0}\frac{\nu}{R c_0 \varepsilon}\left(\frac{R}{\delta}\right)^3\left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R}\right]\left[u_{10\xi}^{(2)} - u_{10\xi}^{(1)}\right] = 0
\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь с принятой точностью $h_0/R \approx O(\varepsilon)$, $\delta/R_2 = \psi << 1$ обозначено $R^{(1)} \approx R^{(2)} = R$ при этом положено $h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} \approx h_0$.

Можно также ввести обозначения $u_{10\xi}^{(1)} = c_3\phi^{(1)}$, $u_{10\xi}^{(2)} = c_3\phi^{(2)}$, $\eta = c_1\xi$, $t = c_2\tau$, где

$$c_1 = \left[c_2\varepsilon\left(\frac{l}{R}\right)^2 \frac{2}{\mu_0^2\sqrt{1-\mu_0^2}}\right]^{1/3}, c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon}\left(\frac{R}{\delta}\right)^2\left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R}\right]\frac{\nu}{\delta c_0}, \qquad c_3 = \frac{c_2}{c_1}\frac{l\varepsilon}{u_m}^2 \frac{12}{\sqrt{1-\mu_0^2}}$$

$$\sigma_1 = \frac{c_1}{c_2}\frac{k_1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\mu_0^2\frac{R^2}{l^2\varepsilon},$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{c_1 c_2}\frac{k_2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{R^2}{l^2\varepsilon}, \ \sigma_4 = \frac{c_3^2}{c_2 c_1^3}\frac{k_4}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}\frac{u_m}{R^2\varepsilon}.$$

При этом из (14) получим

$$\phi_t^{(1)} + 6\phi^{(1)}\phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \sigma_1\phi_\eta^{(1)} - \sigma_3\int\phi^{(1)}d\eta + \sigma_4\left(\int\phi^{(1)}d\eta\right)^3 + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} = 0 \qquad (15)$$

$$\phi_t^{(2)} + 6\phi^{(2)}\phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \sigma_1\phi_\eta^{(2)} - \sigma_3\int\phi^{(2)}d\eta + \sigma_4\left(\int\phi^{(2)}d\eta\right)^3 + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} = 0$$

Система уравнений (15) имеет точное решение

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = \frac{\sigma_3}{2\sigma_4}Ch^{-2}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}}\left[\eta - \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_4} + 2\sigma_4 + \sigma_1\right)t\right]\right\}$$

Получился результат аналогичный [11] при отсутствии окружающей среды.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант №16-01-00175-а.

Литература

1. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах // Громека И.С. Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР. 1952. С. 149-171.
2. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64-72.
3. Попов В.С. Исследование динамики взаимодействия пульсирующего ламинарного потока жидкости с упругой цилиндрической оболочкой // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2007. № 1 (33). С. 72-80.
4. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Колебания гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением под действием ударных нагрузок со стороны поршневой группы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 100-106.
5. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия цилиндропоршневой группы двигателя внутреннего сгорания и слоя охлаждающей жидкости // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003. № 1. С. 79-88.
6. Mogilevich L. I., Popov V. S. Mathematical modeling of incompressible viscous liquid layer interaction dynamics in an annular slit with its wall, surrounded by elastic medium // IEEE Conference Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Omsk, 2016) DOI: 10.1109/Dynamics.2016.7819050
7. Mogilevich L.I., Popov V.S., Kondratov D.V., Rabinskiy L.N. Bending oscillations of a cylinder, surrounded by an elastic medium and containing a viscous liquid and an oscillator // Journal of Vibroengineering. Vol. 19. № 8.

2017. p. 5758-5766.
8. Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическое моделирование динамики взаимодействия слоя вязкой жидкости в кольцевой щели со стенкой, окруженной упругой средой // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. Т. 3. № 1. С. 346-350.
9. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Моделирование колебаний и волн в цилиндрической оболочке с вязкой несжимаемой жидкостью внутри нее // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 13-19.
10. Блинкова А.Ю., Ковалева И.А., Могилевич Л.И., Попов В.С. Распространение волн деформации в двух упругих цилиндрических оболочках, между которыми находится вязкая жидкость // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 7-12.
11. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Ковалев А.Д., Могилевич Л.И. Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2012. Т. 12. № 2. С. 12-18.
12. Блинкова А.Ю., Ковалева И.А., Могилевич Л.И. Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. 2013. № 3. С. 42-51.
13. Евдокимова Е.В. Могилевич Л.И. Волны в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними и окруженные упругой средой // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. № 2. С. 31-42.
14. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа. 2003. 840 с.
15. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.
16. Михасёв Г.И., Шайко А.И. О влиянии параметра упругой нелокальности на собственные частоты колебаний углеводородной нанотрубки в упругой среде // ТРУДЫ БГТУ. 2012. №6. Физико-Математические науки и информатика. С.41-44.