Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: **mathmod.esrae.ru/17-59**
Ссылка для цитирования этой статьи:
Ткаченко О.П. Сравнение результатов вычислительного эксперимента по двум математическим моделям трубопровода // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. №1

УДК 539.384.6: 519.633

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ДВУМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ ТРУБОПРОВОДА

Ткаченко О.П.[1]
[1]Вычислительный центр ДВО РАН (ВЦ ДВО РАН), Россия, Хабаровск, olegt1964@gmail.com

COMPARISON OF THE COMPUTATIONAL EXPERIMENT'S RESULTS ON THE TWO MATHEMATICAL MODELS OF PIPELINE

Tkachenko O.P.[1]
[1]Computing Center, Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Russia, Khabarovsk, olegt1964@gmail.com

Аннотация. Выполнено сравнение результатов численных экспериментов по задаче расчета напряженно-деформированном состоянии трубопровода специального профиля по стержневой и оболочечной математическим моделям. Профиль трубопровода выбран в виде цепной линии, прототипом этой формы стал профиль морского райзера. Рассмотрены две задачи: о динамике трубопровода средней протяженности; о протяженном трубопроводе в сильно вязкой среде. Установлены критерии применимости механических моделей трубы как оболочки и как стержня.

Ключевые слова: изогнутый трубопровод, гидроупругость, сложный изгиб, математическая модель, техническая оболочка

Abstract. The results of numerical experiments on the problem of calculating the stress-strain state of a pipeline of a special profile on rod and shell mathematical models were compared. The pipeline profile was chosen as a chain line, the prototype of this form was the profile of the marine riser. Two problems were considered: about dynamics of pipeline of medium length; about extended pipeline in a highly viscous medium. Criteria of applicability of mechanical models of a pipe as a shell and as a rod were established.

Keywords: bent pipeline, hydroelasticity, complex bending, mathematical model, technical shell

Введение. Проблема неустойчивости трубопроводов, математически сформулированная в [1], получила развитие в работах как математиков [2], так и механиков [3]. Трубопроводы, помимо неустойчивости, отклоняются от своего проектного положения в результате влияния других внешних факторов (подвижек грунта, вибраций от техногенных процессов, сейсмической активности [4]). Изучение процессов изменения трассы трубопроводов и разработка методов диагностики состояния профиля является одной из актуальных проблем механики сплошной среды.

Известны два подхода к приближенному математическому описанию напряженно-деформированного состояния и динамики трубопровода: (1) использование модели полого стержня, когда главную роль играют изгибающие моменты [5] или растягивающие силы [6]; (2) моделирование трубы как технической оболочки [7, 8], когда толщина стенки мала по сравнению с радиусом трубы.

Первый подход стал стандартом для расчетов промышленных трубопроводов, при этом ошибки математического моделирования учитываются в коэффициентах запаса прочности и устойчивости [9]. Второй подход необходим при расчете тонкостенных трубопроводов. Его трудность в том, что возникающие уравнения математической модели оболочки сложны и не поддаются исчерпывающему анализу. Сложность, как правило, вызвана малыми слагаемыми, теоретически присутствующими в уравнениях, но не вносящими заметного вклада в решение [10].

Нами разработаны математические модели как в рамках первого подхода [11], так и второго [12]. Был выполнен асимптотический анализ уравнений динамики оболочки, на основе которого создан алгоритм редукции этих уравнений к одномерным. Тогда вычислительные трудности при нахождении численных решений уравнений оболочечной модели ненамного превышают трудности решения уравнений стержневой модели. Эта модель была численно проанализирована и верифицирована в [13, 14].

Целью данной работы является сравнение результатов численного анализа задачи о движении трубопровода специального профиля по математическим моделям [11, 12]. Профиль трубопровода выбран в виде цепной линии. Прототипом этого профиля стала изогнутая линия морского райзера в ненапряженном состоянии. Рассмотрены две задачи: (1) о динамике трубопровода с геометрическими параметрами морского райзера [6], (2) о динамике протяженного трубопровода в сильно вязкой среде.

1. Геометрия изогнутого трубопровода. Предполагается, что ненагруженный трубопровод имеет форму изогнутого по своей образующей цилиндра с круглым основанием, его осевая линия Γ является плоской кривой.

Глобальная неподвижная декартова система отсчета $(Oxyz)$ выбрана так, что Γ лежит в плоскости (xOy). С трубой связаны естественные криволинейные лагранжевы координаты $(Os\theta R)$, введенные и изученные в [12], в которых s – длина дуги вдоль Γ, (θ, R) – полярные координаты в сечении, соответствующем s. Геометрия системы изображена на рис. 1.

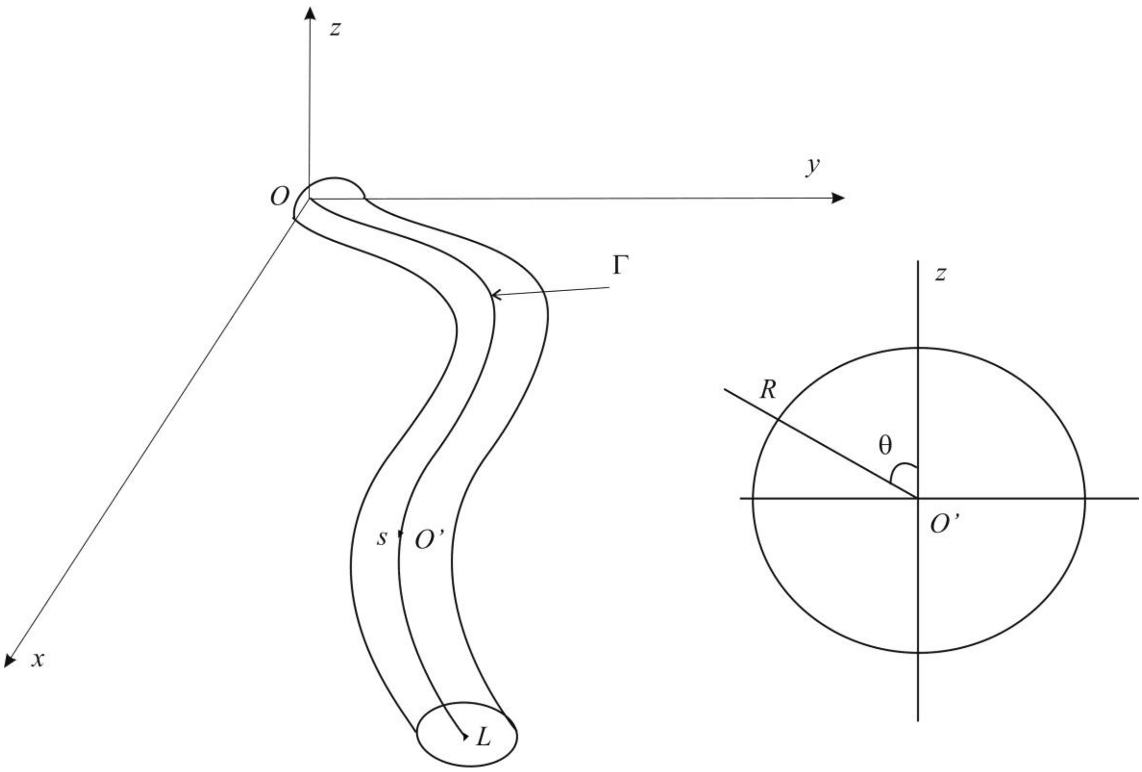

Рис. 1. Геометрия изогнутого в плоскости трубопровода

Ставится задача о вычислении положения осевой линии $\Gamma = \{x(s,t), y(s,t)\}$ трубопровода после приложения нагрузок от внутреннего потока жидкости и сопротивления внешней среды.

В данной задаче необходимо учитывать два условия. Первое – условие В.З. Власова [7] о применимости теории полубезмоментных оболочек:

$$\frac{h}{R_0} \le 0.1, \qquad \frac{\min(L, \rho_0)}{R_0} \ge 4, \tag{1}$$

где h – толщина стенки, L – длина трубы, R_0 – радиус поперечного сечения трубы, ρ_0 – радиус кривизны осевой линии. Вторым условием является малость параметра:

$$\lambda = \frac{R_0}{\min|\rho_0(s)|} << 1. \tag{2}$$

Условие (2) необходимо для применения вышеупомянутого алгоритма редукции задачи динамики оболочки к одномерной постановке.

2. Математические модели динамики трубопровода. Уравнения стержневой модели изогнутого трубопровода имеют вид [11]:

$$EI\frac{\partial^4 w_n}{\partial s^4} + (2EI\kappa_0^2 + \rho_f S_f v_{s0}^2 - T)\frac{\partial^2 w_n}{\partial s^2} + (EI\kappa_0^2 + \rho_f S_f v_{s0}^2)\kappa_0^2 w_n +$$

$$+\kappa_0\rho_f S_f v_{s0}^2+\frac{4\pi\mu u^*}{0.5+\ln\left|\dfrac{4\mu}{\gamma\rho_{gr}R_0u^*}\right|}=0;\quad u^*=\frac{\partial w_n}{\partial t};\tag{3}$$

$$T=\frac{ES_t}{2L}\left[\int_0^l\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx-\int_0^l\left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2dx\right].$$

Здесь обозначено: $w_n(s,t)$ – перемещение осевой линии Γ вдоль нормали, u^* – скорость этого перемещения; $\kappa_0(s)$ – начальная кривизна Γ; T – сила продольного растяжения стержня, вызванная его поперечным перемещением; v_{s0} – скорость внутреннего потока жидкости. Обозначения прочих величин стандартны и объяснены в [11].

В [12] из трехмерных уравнений движения твердого деформируемого тела выведены уравнения для оболочки, а затем, используя малость параметра (2), в первом приближении по λ получена одномерная система уравнений движения:

$$\alpha^2\frac{\partial^2u_1}{\partial\zeta^2}-\frac{1-\nu}{2}u_1-\frac{1+\nu}{2}\alpha\frac{\partial v_1}{\partial\zeta}+\nu\alpha\frac{\partial w_1}{\partial\zeta}+f\left[\frac{1-\nu}{2}u_0-2\alpha^2\frac{\partial^2u_0}{\partial\zeta^2}+\alpha(1-\nu)\frac{\partial w_0}{\partial\zeta}\right]-$$

$$-\alpha^3\left(\frac{\partial w_1}{\partial\zeta}\frac{\partial^2w_0}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial w_0}{\partial\zeta}\frac{\partial^2w_1}{\partial\zeta^2}\right)+3\alpha^3f\cdot\frac{\partial w_0}{\partial\zeta}\frac{\partial^2w_0}{\partial\zeta^2}=\frac{\rho_tR_0^2\omega^2}{E^*}\frac{\partial^2u_1}{\partial\tau^2};$$

$$\frac{1-\nu}{2}\alpha^2\frac{\partial^2v_1}{\partial\zeta^2}-v_1-\frac{1}{E^*h^*}\frac{2u_1^*\mu}{R_0\left(0.5-\ln\left|\frac{\gamma\rho_e\lambda u_1^*}{4\mu}R_0\right|\right)}+\frac{1+\nu}{2}\alpha\frac{\partial u_1}{\partial\zeta}+$$

$$+w_1+f\left(w_0-\frac{3-\nu}{2}\alpha\frac{\partial u_0}{\partial\zeta}\right)-\alpha^2\frac{\partial w_0}{\partial\zeta}\frac{\partial w_1}{\partial\zeta}=\frac{\rho_tR_0^2\omega^2}{E^*}\frac{\partial^2v_1}{\partial\tau^2};$$

$$w_1+\frac{h^{*2}}{12}\left(\alpha^4\frac{\partial^4w_1}{\partial\zeta^4}-\alpha^2\frac{\partial^2w_1}{\partial\zeta^2}\right)+\nu\alpha\frac{\partial u_1}{\partial\zeta}-v_1+f\left[2\nu w_0+(1-\nu)\alpha\frac{\partial u_0}{\partial\zeta}\right]-\alpha^2\frac{\partial w_0}{\partial\zeta}\frac{\partial w_1}{\partial\zeta}+$$

$$+\frac{\alpha^2}{2}f\left(\frac{\partial w_0}{\partial\zeta}\right)^2=\frac{1}{E^*h^*}\left[\rho_fv_{s0}^2f-\frac{2u_1^*\mu}{R_0\left(0.5-\ln\left|\frac{\gamma\rho_e\lambda u_1^*}{4\mu}R_0\right|\right)}\right]-\frac{\rho_tR_0^2\omega^2}{E^*}\frac{\partial^2w_1}{\partial\tau^2}.\tag{4}$$

Безразмерные перемещения срединной поверхности стенки трубы $u'=u/R_0$, $v'=v/R_0$, $w'=w/R_0$ в координатах $\zeta=s/l$, $\tau=\omega t$ представлены в виде:

$$u'=u_0+\lambda u_1(\zeta,\tau)\sin\theta;\quad v'=v_0+\lambda v_1(\zeta,\tau)\cos\theta;$$

$$w'=w_0+\lambda w_1(\zeta,\tau)\sin\theta;\quad u^*=\lambda u_1^*\frac{R_0\omega}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial\tau}+\frac{\partial w_1}{\partial\tau}\right).$$

Решения нулевого приближения $u_0(\zeta)$, $w_0(\zeta)$ предполагаются известными [13].

3. Результаты численного анализа. Уравнения (3), (4) решены численно для двух трубопроводов с профилем в виде цепной линии и следующими параметрами (расчеты проведены до достижения стационарного состояния).

Задача 1. Изгибание трубопровода, геометрические параметры которого соответствуют численным экспериментам [6]. Модельные параметры: скорость внутреннего потока $v_{s0} = 3.8$ м/с, вязкость внешней среды $\mu = 1000$ Па·с, толщина стенки $h = 0.03$ м, радиус трубы $R_0 = 0.13$ м, длина трубы $L = 310$ м. Интервал времени 10 часов.

Задача 2. Изгибание протяженного трубопровода, находящегося в сильно вязкой среде, под действием быстрого внутреннего потока. Модельные параметры: скорость внутреннего потока $v_{s0} = 10$ м/с (для модели (4)) и $v_{s0} = 1.5$ м/с (для модели (3)), вязкость внешней среды $\mu = 5000$ Па·с, толщина стенки $h = 0.005$ м, радиус трубы $R_0 = 0.23$ м, длина трубы $L = 3009$ м. Интервал времени двое суток.

Динамика осевой линии показана на рис. 2, 3. На рисунках (а) показаны начальное и конечное положение для стержневой модели (3); на рисунках (б) – для оболочечной модели (4).

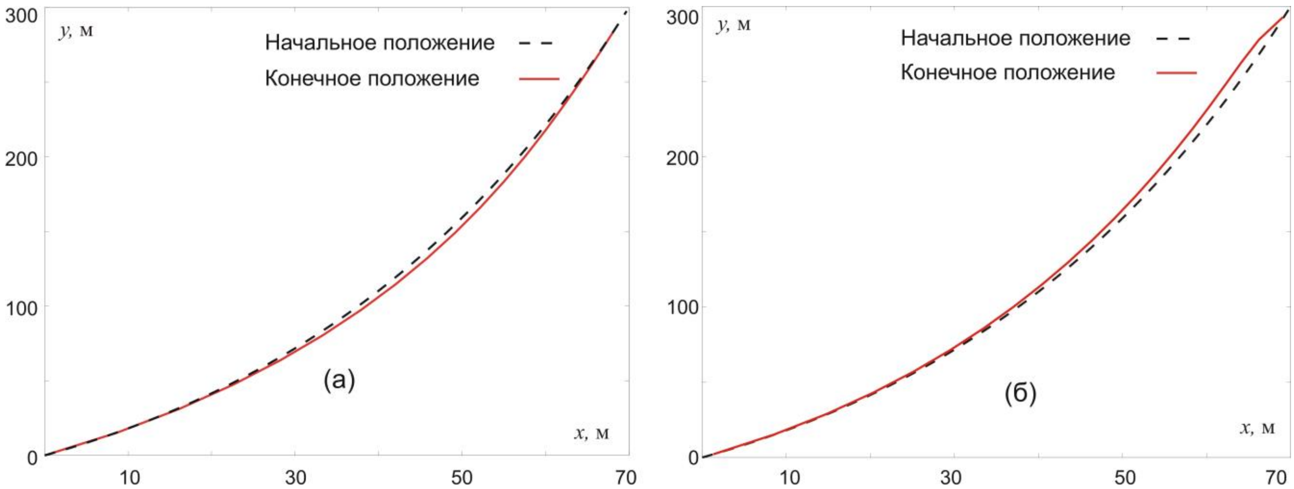

Рис. 2. Перемещение осевой линии. Пунктир – начальное положение, сплошная линия – конечное.

При поверхностном подходе можно увидеть, что в задаче 1 не выполнено условие (1), и предположить, что поведение трубы должно адекватно описываться стержневой моделью (3). Но с другой стороны, в [15] указано, что теория технических оболочек может применяться до значений

$$h/R_0 \le 1/5$$

при этом, очевидно, допускается ошибка ≈20%. Эта ошибка приведет к количественному различию на рис. 2 (а, б), а не качественному.

На рис. 2б отражено явление «обратного хода трубопровода», которое описано в [6], и наблюдается при определенном соотношении между параметрами задачи. Определяющей величиной является параметр Ирвина [16]:

$$E_{irv} = \frac{F}{N_a}\sqrt{\frac{ES_t}{N_a}}, \tag{5}$$

где F – распределенная вдоль трубы растягивающая сила, N_a – сила натяжения, на которую выполняется нормировка. Единственной растягивающей силой является сила взаимодействия стенки и внутреннего потока жидкости:

$$F = S_{tb}\cdot\Phi_t(v_{s0}),\quad S_{tb} = 2\pi(R_0 - h/2)L,$$

где S_{tb} – площадь внутренней поверхности, $\Phi_t = R_0\beta v_{s0}^2/2$ – плотность сил трения потока о стенку [12]. Поэтому здесь положено:

$$N_a = F.$$

Отсюда и из (5) следует

$$E_{irv} = \sqrt{\frac{2hE}{\beta\left(R_0 - {}^{h}\!/\!{}_{2}\right)Lv_{s0}^2}}\,. \tag{6}$$

При параметрах задачи (1) имеем:

$$E_{irv} \approx 774,$$

что сразу проясняет вопрос о применимости стержневой модели. Как показано в [6], при значении $E_{irv} \ge 286$ изгибающий момент становится преобладающим силовым фактором, и отсюда следует, что необходимо применять теорию стержней.

Иначе складывается ситуация в задаче 2, результаты расчета которой изображены на рис. 3.

В задаче 2 становится существенным влияние растяжимости трубопровода и выполнено условие (1), что позволяет пользоваться оболочечной моделью (4). В результате численного анализа (рис. 3б) найдено, что (4) описывает явление обратного хода трубы, изучавшееся в [6]. Стержневая модель (3) позволяет лишь частично описать поведение трубопровода при скорости потока $v_{s0} \le 1.7$ м/с. В численных экспериментах найдено, что при больших скоростях решение задачи о динамике стержня теряет устойчивость, аналогично [1].

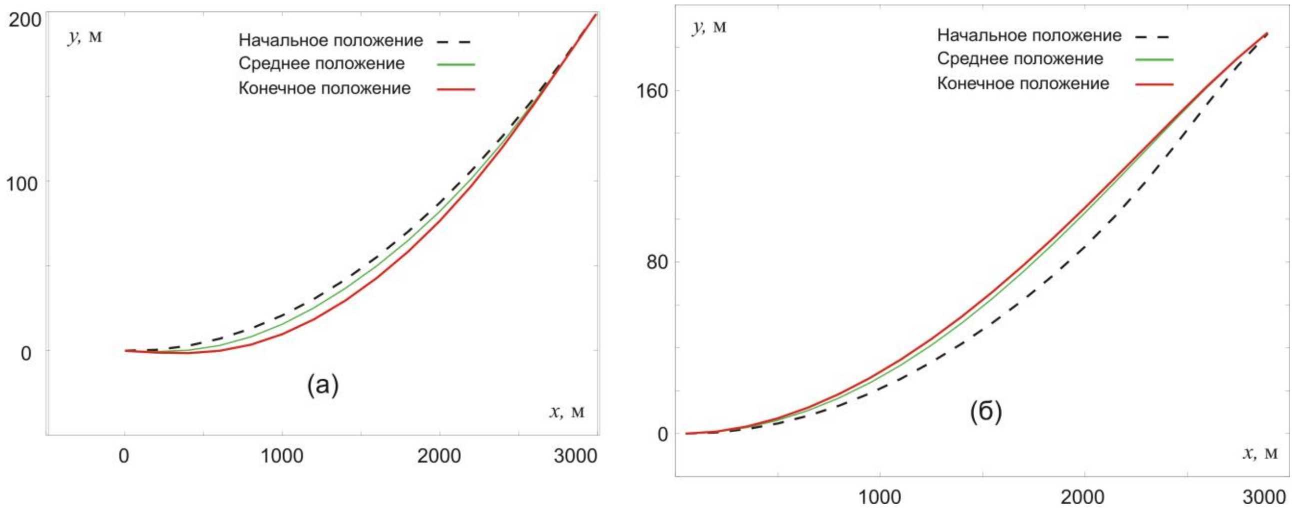

Рис. 3. Перемещение осевой линии протяженного трубопровода. Пунктир – начальное положение, сплошная линия – конечное.

Вычисляя параметр Ирвина (6), найдем:

$E_{irv} \approx 43,$

что на самом деле далеко от значения $E_{irv} \approx 1.812$, указанного в [6] как предельное для учета изгибающих моментов, и, если оно меньше, то учет изгибающих моментов может привести к существенной ошибке.

Однако, постановка задач 1, 2 отличается от формулировок [6], и буквальное следование первоисточнику может привести к недоразумению. Поэтому можно сделать вывод о качественном соответствии рассмотренных примеров результатам, встречающимся в литературе.

Заключение.

Сравнивая условия применимости математических моделей (3), (4) и результаты расчета по ним, можно сделать вывод о взаимной дополняемости этих моделей. Применимость (4) определяется условиями (1), (2). Если выполнены условия $h / R_0 > 0.1$, (2), то необходимо пользоваться моделью (3). Если же не выполнено условие (2), то все рассмотренные математические модели теряют силу, и необходимо искать более точные уравнения.

Дополнительно желательно вычислить параметр Ирвина (5), правильно определив величину силовой нормировки N_a. Эта нормировка должна иметь смысл растягивающей силы, однозначно определяемой из исходных данных. Параметр Ирвина позволит дополнительно оценить целесообразность математического описания трубы как стержня или как оболочки.

Литература

1. Феодосьев В.И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инженерный сборник. 1951. Т. 10. С.169-170.

2. Пивоварчик В.Н. Необходимые условия гироскопической стабилизации в одной задаче механики // Математические заметки. 1993. Т. 53. Вып. 6. С.89-96.
3. Paidoussis M.P. Fluid-structure interactions. Slender structures and axial flow. Vol. 1. San Diego: Academic Press, 1998. 574 p.
4. Towhata I. Geotechnical Earthquake Engineering. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2008. 684 p.
5. Svetlitsky V.A. Dynamics of Rods // Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 448 p.
6. Athisakul Ch., Monprapussorn T., Pulngern T., Chucheepsakul S. The Effect of Axial Extensibility on Three-Dimensional Behavior of Tensioned Pipes/Risers Transporting Fluid // Proceedings of the Eighth (2008) ISOPE Pacific/Asia Offshore Mechanics Symposium. Bangkok, Thailand: The International Society of Offshore and Polar Engineers, 2008. P. 97-104.
7. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. / Власов В.З. Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 15-439.
8. Клейн Г.К. Расчет подземных трубопроводов. М.: Стройиздат, 1969. 240 с.
9. СП 36.13330.2012 «Магистральные трубопроводы», актуализированная редакция СНиП 2.05.06-85. Утвержден Приказом Федерального агентства по строительству и жилищно-коммунальному хозяйству (Госстрой) от 25.12.2012 № 108/ГС.
10. Gol'Denveizer, A. L., Von Karman Th. and Dryden, H. L. Theory of Elastic Thin Shells: Solid and Structural Mechanics. New York: Elsevier, 2014. 680 p. https://books.google.pt/books?id=CIqjBQAAQBAJ (доступ 10.04.2018)
11. Рукавишников В.А., Ткаченко О.П. Нелинейные уравнения движения растяжимого подземного трубопровода: вывод и численное исследование // Прикладная механика и техническая физика. 2003. Т. 44. № 4. С. 144-150.
12. Ткаченко О.П. Кинематика и динамика подземного трубопровода при конечных перемещениях // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. № 4. С. 97-107.
13. Рукавишников В.А., Ткаченко О.П. Приближенное решение нелинейной задачи о деформировании подземного трубопровода // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. 13. № 4 (44). С. 97-108.
14. Ткаченко О.П., Рябоконь А.С. Численные оценки адекватности математической модели гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе // Вычислительная механика сплошной среды. 2017. Т. 10. № 1. С. 90-102. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.1.8
15. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1982. 264 с.
16. Hover F.S., Triantafyllou M.S. Linear dynamics of curved tensioned elastic beams // Journal of Sound and Vibration. 1999. Vol. 228 (4). P. 923-930.