

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/17-60

Ссылка для цитирования этой статьи:

Козел А.Г. Деформированное состояние трёхслойной круговой пластины, связанной с основанием пастернака // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. №1

Выполнено при поддержке гранта БР ФФИ

УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРЁХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ, СВЯЗАННОЙ С ОСНОВАНИЕМ ПАСТЕРНАКА

Козел А.Г.

Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь, Гомель,
kostjaschka2009@mail.ru

STRAIN STATE OF THREE-LAYER CIRCULAR PLATE CONNECTED TO THE PASTERNAK'S BASE

Kozel A.G.

Belarusian state University of transport, Belarus, Gomel,
kostjaschka2009@mail.ru

Аннотация. Предложена математическая модель описания осесимметричного деформирования несимметричной по толщине упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака. Соответствующая краевая задача включает систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях и граничные условия. Общее решение задачи получено в функциях Бесселя. Рассмотрен случай изгиба пластины под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки при жёстком закреплении ее контура. Получены численные результаты и произведён их параметрический анализ.

Ключевые слова: трёхслойная круговая пластина, перемещения, деформации, осесимметричный изгиб, основание Пастернака.

Abstract. A mathematical model of the axisymmetric deformation of steel by the thickness of elastic circular sandwich plates based on Pasternak is suggested. The corresponding boundary value problem system of differential equilibrium equations in displacements and boundary conditions are includes. The general solution is obtained in the Bessel functions. The case of bending the plate under the action of uniformly distributed surface load with rigid fastening of its contour is considered. Numerical results are obtained and their parametric analysis is made.

Keywords: three-layer circular plate, displacement, deformation, axisymmetric bending, Pasternak's base.

Введение. Трёхслойные конструкции, набранные из двух несущих слоев и заполнителя, обеспечивающего их совместную работу, обладают широким спектром конструктивных достоинств. Они способны противостоять тепловым, химическим, радиационным и другим негативным воздействиям. Кроме этого

трёхслойные конструкции, при относительно небольшой массе, имеют высокую несущую способность и изгибную жесткость.

Наметившиеся в последние годы тенденции к использованию композитных слоистых конструкций в машиностроении, авиационной и космической технике, судостроении и строительстве приводят к необходимости разработки теории и эффективных методик их расчёта. Результаты, связанные с колебаниями трёхслойных элементов конструкций, в том числе опирающихся на упругое основание, геометрия и движение которых описывается с помощью тех или иных гипотез, изучены в работах [1–9].

Квазистатическое изотермическое и термопластическое деформирование трёхслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием Винклера (однопараметрическим) рассмотрено в статьях [10–17]. Математическая модель этого основания учитывает его сжимаемость, но связностью (распределительной способностью) пренебрегает. Поэтому актуально исследование деформирования трёхслойных элементов конструкций, связанных с упругим двухконстантным основанием. Подобная модель основания была введена П.Л. Пастернаком [18].

В работах [19, 20] выведены уравнения равновесия упругой трёхслойной круговой пластины, связанной с основанием Пастернака. Здесь приведена постановка краевой задачи об изгибе указанной пластины, получено ее общее аналитическое решение, численно исследован случай воздействия равномерно распределенной нагрузки при жёсткой заделке контура пластины.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача об осесимметричном изгибе несимметричной по толщине упругой трёхслойной пластины с легким заполнителем на основании Пастернака. В тонких несущих слоях принимаются гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, которая препятствует относительному сдвигу слоев. Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1).

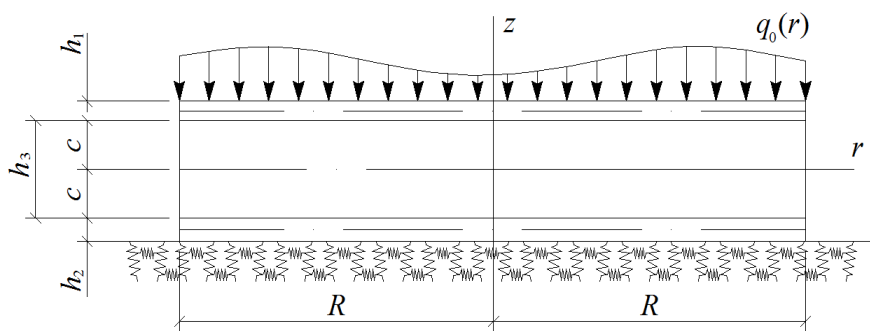


Рис.1

Перпендикулярно верхнему слою пластины действует распределенная нагрузка $q_0(r)$. Реакция основания описывается моделью Пастернака:

$$q_r(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \quad (1)$$

где κ_0, t_f – коэффициенты сжатия и сдвига, Δ – оператор Лапласа.

Уравнения равновесия в усилиях получены из вариационного принципа Лагранжа:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) &= -(q_0 + q_R), \end{aligned} \quad (2)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; q_0 – интенсивность внешней распределенной нагрузки; $w(r)$ – прогиб; $u(r)$ – радиальное перемещение координатной плоскости; a_n – коэффициенты, определяемые через модули упругости материалов и геометрические параметры слоев,

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), a_3 = h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ - h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+, \\ a_4 &= c^2(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}cK_3^+), a_5 = c[h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ + h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2K_3^+], \\ a_6 &= h_1(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2)K_1^+ + h_2(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3K_3^+, \end{aligned}$$

где h_k – толщина k -го слоя ($k=1,2,3$), $K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3}G_k$, $K_k^- \equiv K_k - \frac{2}{3}G_k$, G_k, K_k – модули сдвига и объёмного деформирования; L_k – линейные дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Краевая задача по определению прогиба рассматриваемой пластины замыкается присоединением к системе дифференциальных уравнений (2) граничных условий на контуре $r=R$:

- при жёсткой заделке контура пластины
 $u = \psi = w = w_{,r};$
 - при шарнирном опирании контура пластины
 $u = \psi = w = 0, M_r = 0;$
 - в случае свободного контура пластины
 $\psi = 0, T_r = M_r = M_{r,r} = 0.$
- (3)

Здесь внутренние усилия T_r, M_r выражаются через искомые перемещения следующими формулами:

$$T_r = \sum_{k=1}^3 h_k (K_k^+ u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^-) + c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \psi_{,r} + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{\psi}{r} -$$

$$- \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] w_{,rr} - \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{w_{,r}}{r}.$$

$$M_r = \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} +$$

$$+ \left[cK_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \left[cK_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} -$$

$$- \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}.$$

Граничные условия (3) служат для определения констант интегрирования после решения системы (2).

2. Решение краевой задачи

Рассмотрим процедуру решения системы (2) уравнений. С помощью первых двух уравнений системы (2) в третьем уравнении обнуляем коэффициенты перед функциями u и ψ . В результате приходим к следующим выражениям для радиального перемещения и сдвига через прогиб $w(r)$, который удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка:

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r},$$

$$\psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r},$$

$$w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} - t_f D(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r}) + \kappa_0 D w = q_0 D, \quad (4)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – константы интегрирования; коэффициенты

$$b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

В связи с ограниченностью предполагаемого решения в начале координат для сплошных пластин необходимо положить $C_2 = C_4 = 0$.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее третьему уравнению в системе (4), и введем в нем замену переменной $x = kr$:

$$w_{,xxx} + \frac{2}{x} w_{,xx} - \frac{1}{x^2} w_{,x} + \frac{1}{x^3} w - 2t_0^2 (w_{,xx} + \frac{1}{r} w_{,x}) + w = 0$$

или

$$\Delta^2 w - 2t_0^2 \Delta w + w = 0,$$

где $\kappa^4 = \kappa_0 D$, $q = q_0 D$, $2t_0^2 = t_{f1} / \kappa^2$, $t_{f1} = t_f D$.

Общий интеграл третьего дифференциального уравнения в (4) может быть теперь представлен в виде

$$w = w_1 + w_2 + w_p, \quad (5)$$

где w_p – частное решение рассматриваемого уравнения, w_1 и w_2 – фундаментальная система частных интегралов, удовлетворяющая однородным уравнениям

$$w_{1,xx} + \frac{1}{x} w_{1,x} + a w_1 = 0,$$

$$w_{2,xx} + \frac{1}{x} w_{2,x} + \bar{a} w_2 = 0.$$

После ряда преобразований решение уравнения (5) получаем в виде:

$$w = C_5 J_0(\sqrt{ax}) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}x}) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x}) + w_p,$$

где $J_0(\sqrt{ax})$ и $J_0(\sqrt{\bar{a}x})$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, комплексных аргументов \sqrt{ax} и $\sqrt{\bar{a}x}$; $H_0^{(1)}(\sqrt{ax})$ и $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})$ – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов.

3. Изгиб под действием равномерно распределенной нагрузки

Пусть на рассматриваемую пластину действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q_0 = const$.

Дифференциальное уравнение изгиба такой пластины принимает вид:

$$\Delta^2 w - 2t_0^2 \Delta w + w = \frac{q_0 D}{\kappa^4} = \frac{q_0}{\kappa_0}, \quad (6)$$

Общее решение дифференциального уравнения (6) может быть представлено в виде:

$$w = C_5 J_0(\sqrt{ax}) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}x}) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x}) + \frac{q_0}{\kappa_0}, \quad (7)$$

Таким образом, прогиб в задаче об изгибе равномерно распределенной нагрузкой трехслойной пластины, лежащей на упругом основании Пастернака, определен с точностью до четырёх постоянных интегрирования.

Т.к. прогиб в центре пластины должен быть конечным, а функции Ханкеля $H_0^{(1)}(\sqrt{ax})$ и $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})$ в начале координат уходят в бесконечность, то в решении (7) для сплошных пластин необходимо положить $C_6 = C_8 = 0$.

В итоге получаем прогиб пластины w в виде

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a}x) + C_7 J_0(\sqrt{a}x) + \frac{q_0}{\kappa_0},$$

Полное решение поставленной задачи выпишем в общем виде:

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r,$$

$$\psi = b_2 w_{,r} + C_3 r,$$

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a}x) + C_7 J_0(\sqrt{a}x) + \frac{q_0}{\kappa_0}. \quad (8)$$

Общее решение (8) можно использовать для исследования любого симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины, при опирании её на упругом основании. При этом конкретная задача сводится к определению постоянных интегрирования C_1, C_3, C_5, C_7 из соответствующих граничных условий и условий равновесия пластины.

Рассмотрим случай жесткой заделки контура пластины. Тогда должны выполняться первые из граничных условий в (3). В результате получаем линейную систему уравнений

$$b_1 w_{,r}(R) + C_1 R = 0,$$

$$b_2 w_{,r}(R) + C_3 R = 0,$$

$$C_5 J_0(\sqrt{a} \kappa R) + C_7 J_0(\sqrt{a} \kappa R) + \frac{q_0}{\kappa_0} = 0,$$

$$\sqrt{a} C_5 J_1(\sqrt{a} \kappa R) + \sqrt{a} C_7 J_1(\sqrt{a} \kappa R) = 0. \quad (9)$$

Решив систему уравнений (9) получим следующие константы интегрирования:

$$C_1 = C_3 = 0, \quad C_5 = \frac{q_0 \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R)}{\kappa_0 (\sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) - \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R))},$$

$$C_7 = \frac{q_0 \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R)}{\kappa_0 (\sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa R) J_0(\sqrt{a} \kappa R) - \sqrt{a} J_0(\sqrt{a} \kappa R) J_1(\sqrt{a} \kappa R))}. \quad (10)$$

Таким образом, решение (8) с константами интегрирования (10) описывает перемещения в трёхслойной пластине на упругом основании Пастернака в случае заделки её контура при равномерно распределенной нагрузке.

4. Численные результаты.

Численный параметрический анализ проведен для защемлённой по контуру пластины единичного радиуса $R=1$ м, слою которой набраны из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т [22]. Принимались: величина интенсивности поверхностной нагрузки $q_0 = -1$ МПа; толщины слоёв $h_1 = h_2 = 0,04$ м, $h_3 = 0,4$ м. Отношение коэффициентов, описывающих жесткость основания, принималось $t_f / \kappa_0 < 1$, согласно рекомендациям Пастернака [9]. Градация оснований по жесткости в дальнейшем принята следующая [10]: при

$\kappa_0 \leq 30$ МПа/м – основания малой жесткости (легкие); $30 \leq \kappa_0 \leq 650$ МПа/м – основания средней жесткости; $\kappa_0 \geq 650$ МПа/м – основания высокой жесткости.

В случае легкого основания ($\kappa_0 = 5$ МПа/м) на рисунке 2 а, б показано изменение прогиба w и сдвига в заполнителе ψ вдоль радиуса рассматриваемой трехслойной пластины при различных коэффициентах сдвига основания t_f , МПа·м: 1 – $t_f = 0$, 2 – $t_f = 0,1$, 3 – $t_f = 1$. При значениях коэффициента сдвига $t_f \leq 0,1$ МПа·м его влияние на перемещения в пластине не превышает 2,5 % и в инженерных расчетах это можно не учитывать. Уменьшение максимумов перемещений достигает 20 % при $t_f = 1$ МПа·м.

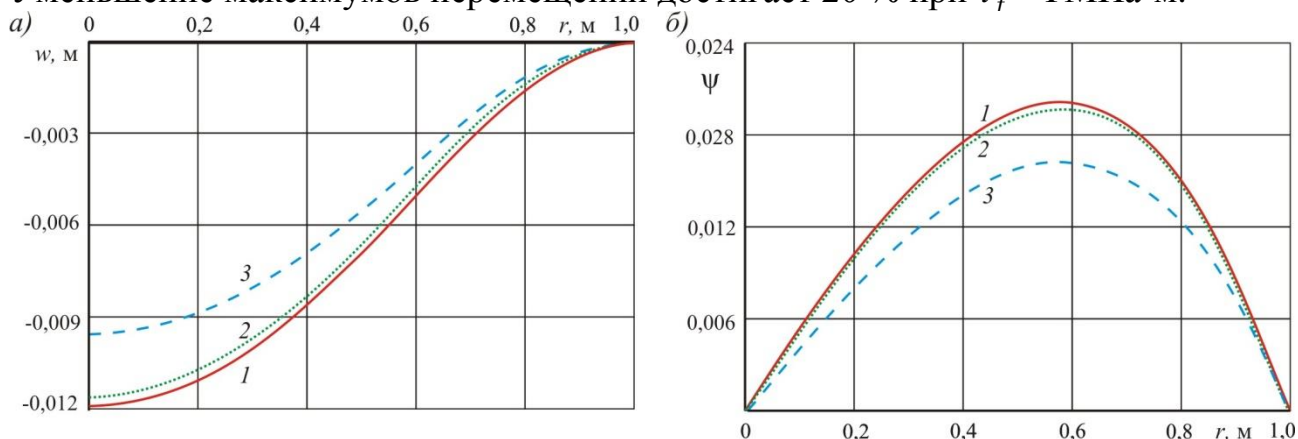


Рис.2

На рисунке 3 а, б показано изменение прогиба w и сдвига в заполнителе ψ вдоль радиуса рассматриваемой пластины при основании средней жесткости ($\kappa_0 = 100$ МПа/м) и различных коэффициентах сдвига основания t_f , МПа·м: 1 – $t_f = 0$, 2 – $t_f = 1$, 3 – $t_f = 10$. С ростом коэффициента t_f уменьшается прогиб пластины и сдвиг в заполнителе. Здесь также при малых значениях $t_f < 0,1$ МПа·м изменения не существенные и сдвиговой деформацией основания можно пренебречь. При увеличении коэффициента сдвига до 1 МПа·м прогиб уменьшается на 5 %, в случае $t_f = 10$ МПа·м прогиб уменьшается на 37%. Аналогично ведёт себя сдвиг в заполнителе.

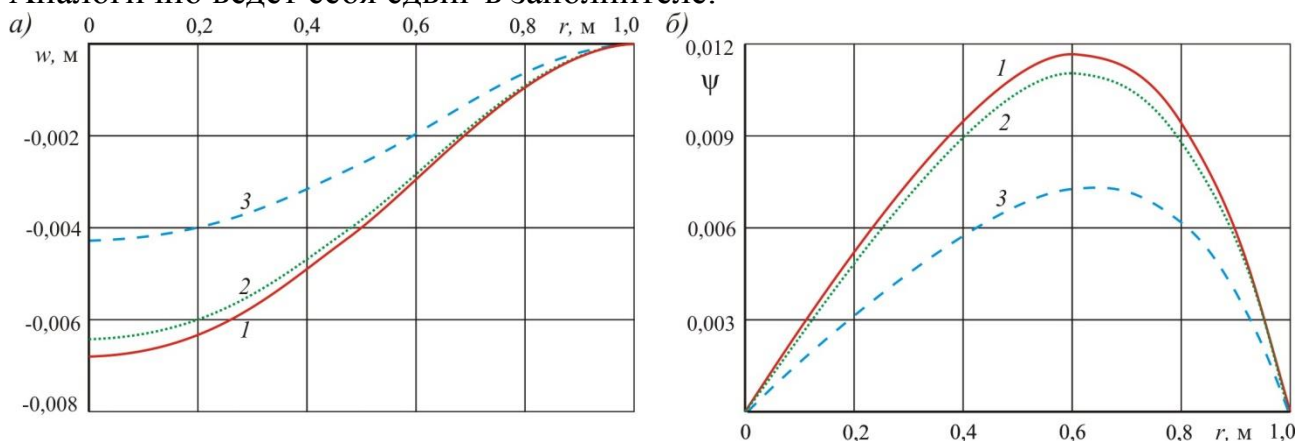


Рис. 3

Следует отметить, что при применении модели основания Винклера решение аналогичной краевой задачи получено в функциях Кельвина [10]. При использовании модели Пастернака этот случай соответствует решению в функциях Бесселя с коэффициентом сдвига основания $t_f=0$. Были проведены соответствующие сравнительные расчеты по этим обоим решениям: в функциях Кельвина и в функциях Бесселя при $t_f=0$. Полученные численные результаты в обоих случаях совпали с точностью до 12-го знака при различных значениях коэффициента сжатия κ_0 . Следовательно, несмотря на то, что аналитические решения для перемещений в пластине на основаниях Винклера и Пастернака имеют различный вид и получены в функциях Кельвина и Бесселя соответственно, совпадение численных результатов при $t_f=0$ подтверждают преемственность моделей.

Выводы. Предложенная математическая модель и полученное аналитическое решение краевой задачи позволяют исследовать НДС несимметричной по толщине упругой трёхслойной круговой пластины при изгибе на основании Пастернака при любых осесимметричных нагрузках и граничных условиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ.

Литература

1. Могилевич Л.И., Попов В.С., Старовойтов Э.И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым наполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56–63.
2. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Circular sandwich plates under local impulsive loads // International Applied Mechanics. 2003. Т. 39. № 8. P. 945–952.
3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 1. С. 45–52.
4. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Vibration of sandwich rod under local and impulsive forces // International Applied Mechanics. 2005. Vol. 41. N. P. 809–816.
5. Starovoitov E.I., Kubenko V.D., Tarlakovskii D.V. Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation // Russian Aeronautics. 2009. Vol. 52. N 2. P. 151-157.
6. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation // International Applied Mechanics. 2011. Vol. 47, N. 5. P. 580–589.
7. Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation // Mechanics of Solids. 2012. Vol. 47, N. 1. P. 111–118.

8. Kuznetsova E.L., Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium // *Mechanics of Solids*. 2015. Vol. 50, N. 3. P. 359–366.

9. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем // *Изв РАН. МТТ*. 2000, № 6, С. 91–98.

10. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 380 с.

11. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2005. № 1. С. 16–22.

12. Starovoitov É.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation // *International Applied Mechanics*. 2007. Vol. 43, N 4. P. 451-459.

13. Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base // *Mechanics of Solids*. 2009. Vol. 44, N. 5. P. 744–755.

14. Старовойтов Э.И., Доровская Е.П. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. 2006. № 3. С. 45–50.

15. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Сулейман М. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2006. № 4. С. 55–62.

16. Старовойтов Э.И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. 2012. № 3. С. 91–99.

17. Старовойтов, Э. И. О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек // *Вестник МГУ. Сер. 1. Мат. Мех.* 1980. № 2. С. 92–96.

18. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Гос. Изд-во литературы по строительству и архитектуре. – 1954. – 55 с.

19. Козел, А.Г. Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // *Проблемы физики, математики и техники*. – Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины. – 2017. – № 1(30). – С. 42–46.

20. Козел, А.Г. Перемещения в круговой трехслойной пластине на двухпараметрическом основании / А.Г. Козел // *Механика. Исследования и инновации*. – 2017. – Вып. 10. – С. 90–95.

21. Власов, В.З. Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – С. 226–235.

22. Старовойтов, Э. И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов / Э. И. Старовойтов // Пробл. прочности. 1988. № 4. С. 11–15.