

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/17-63

Ссылка для цитирования этой статьи:

Гуцевич Д.Е. Моделирование поведения летательного аппарата самолетного типа с автоматическим управлением в различных режимах полёта // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. №1

УДК 001.891.572

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА САМОЛЕТНОГО ТИПА С АВТОМАТИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ В РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ПОЛЁТА

Гуцевич Д.Е.¹

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, den2538i@yandex.ru

MATHEMATICAL MODELING BEHAVIOR OF AIRCRAFT TYPE WITH AUTOMATIC CONTROL IN VARIOUS FLIGHT MODES

Gutsevich D.E.¹

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia,
Saratov, den2538i@yandex.ru

Аннотация. В данной работе была сформирована математическая модель движения летательного аппарата самолётного типа. В ходе синтеза были освещены все допущения в процессе построения и линеаризации модели.

Ключевые слова: летательный аппарат, математическая модель, линеаризация

Abstract. In this paper, a mathematical model for the motion of an airplane of an aircraft type was formed. During the synthesis, all assumptions in the process of constructing and linearizing the model were covered.

Keywords: aircraft, mathematical model, linearization

Уравнения динамики ЛА самолётного типа

Летательный аппарат самолётного типа – представляет собой сложную систему, предназначенную для управляемого движения в атмосфере или космическом пространстве [1,2].

ЛА можно представить в виде звена в цепи замкнутого контура. На вход звена подаётся воздействие, которое определяет характер движения ЛА, т.н. входное воздействие. Управляющее воздействие или входное воздействие формируется органами управления – звеном, предыдущим по отношению к ЛА в замкнутом контуре.

Органы управления (ОУ) определяют параметры устойчивости и управляемости ЛА как объекта управления. Изменение углового положения ЛА и положения его центра масс, является результатом работы органов управления.

Несмотря на различие компоновок и расположение ОУ на ЛА, работа последними по своей природе одинакова. При работе ОУ происходит управление положением центра масс ЛА через управление угловым положением корпуса ЛА.

Для того что бы описать движение твёрдого тела в связанной системе координат, воспользуемся уравнениями Эйлера [4]. Составление модели движения ЛА включает в себя процесс линеаризации. Движение ЛА разбивают на два независимых слагаемых: боковое и продольное движения. Продольное движение включает в себя: поступательные движения ЛА вдоль осей OX и OY и вращательное движение вокруг оси OZ . Боковое движение - поступательное вдоль оси OZ и вращательные движения вокруг осей OX и OY .

Аэродинамическая связь этих движений обусловлена следующими взаимодействиями: аэродинамическим, кинематическим, инерционным и гироскопическим моментом двигателя самолета.

Так как присутствуют зависимости аэродинамических производных устойчивости бокового движения от параметров продольного движения (в особенности от угла атаки) возникают аэродинамические взаимодействия движений.

Кинематическое взаимодействие может возникать при энергичном вводе самолета в крен с большой инерционностью по вертикальной и поперечной осям. При этом изменяется угол атаки и скольжения.

Физический смысл инерционного взаимодействия заключается во вращении масс, производящих центробежные инерционных моменты, которые не совпадают с главной осью инерции. При этом, при маневрах самолета наибольшей по величине угловой скоростью обычно является угловая скорость крена, то наиболее существенно влияние инерционных моментов, действующих относительно вертикальной и поперечной осей.

Вращающийся ротор турбореактивного двигателя самолёта с кинетическим моментом является гироскопом, который стремится

прецессировать или создавать момент, при его повороте внешними силами. Это проявляется это в несимметричности маневров самолета по крену.

Модель продольного движения

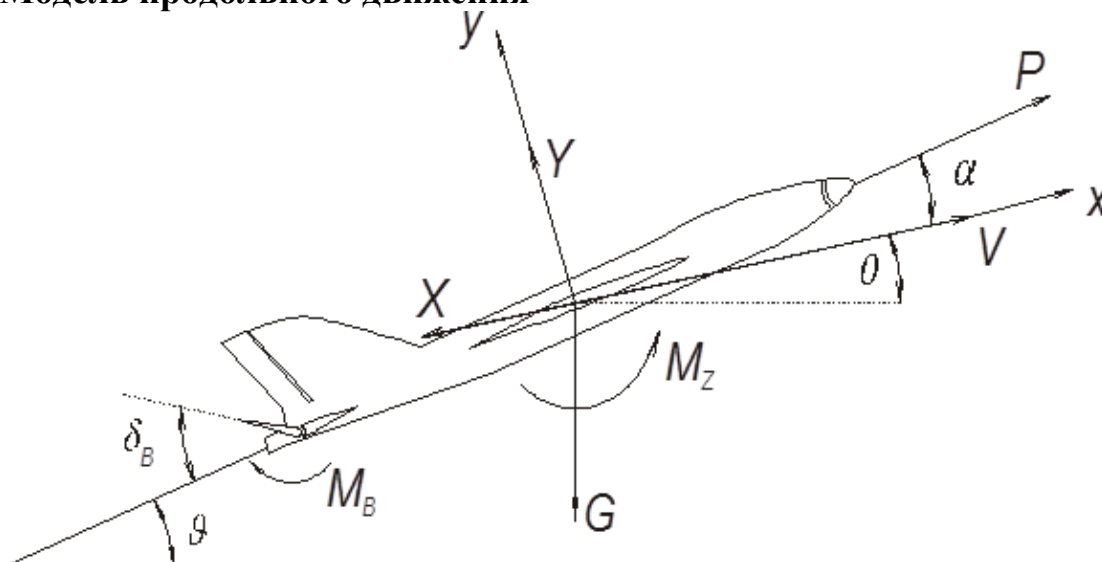


Рис. 1. График приложения сил в продольной плоскости движения ЛА

Во время продольного движения ЛА вектор V линейной скорости его центра масс находится в вертикальной плоскости. Внешние силы, действующие на ЛА: P – сила тяги двигателей, вектор которой направлен вдоль оси Ox ; X_a – сила лобового сопротивления, вектор которой направлен против вектора V , т.е. в отрицательную сторону оси Ox ; Y_a – подъемная сила, вектор которой перпендикулярен вектору V ; mg – вес ЛА (m – масса ЛА, g – ускорение свободного падения). Вращение ЛА в плоскости $XaYa$ возможно под действием момента M_z , действующего вокруг оси Oz , который называется аэродинамическим моментом тангажа.

Исходя из сказанного выше, становится возможным создание системы нелинейных дифференциальных уравнений, являющейся математической моделью продольного движения ЛА:

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dt} = P \cos \alpha - X_a - mg \sin \theta, \\ mV \frac{d\theta}{dt} = P \sin \alpha + Y_a - mg \cos \theta, \\ \vartheta = \theta + \alpha, \\ I_z \frac{d\vartheta}{dt} = M_z. \end{cases} \quad (1)$$

В этой системе: ϑ – тангаж, θ – наклон траектории движения центра масс ЛА, α – угол атаки, P – тяга двигателя, X_a – Лобовое сопротивление, Y_a – подъемная сила, I_z – момент инерции ЛА относительно оси OZ_a , M_z – момент аэродинамических сил, который можно представить в виде:

$$M_z = m_z b_a S \frac{\rho V^2}{2}, \quad (2)$$

где m_z – коэффициент момента, b_a – хорда крыла, ρ – плотность воздуха, S – общая площадь крыла. Коэффициент m_z зависит как от статических, так и динамических параметров, в том числе и от угла отклонения руля высоты.

Система линейных уравнений продольного движения ЛА

Применение метода малых возмущений к выше представленной модели, становится возможным получение линейных уравнений продольного движения ЛА. Допустим, что на рассматриваемом участке полёта равнодействующая сил X_0, Y_0, P_0 , равна нулю, а параметры движения $V_0, \alpha_0, \vartheta_0, \theta_0, H_0, \omega_z$ постоянны. Рассматриваемый участок полёта следует разбить на более мелкие участки, с целью исключить изменение параметров на протяжении этих участков и считать параметры постоянными.

Невозмущенное движение ЛА с постоянными параметрами:

$$\begin{cases} P_0 \cos \alpha_0 - X_0 - mg \sin \theta_0 = 0, \\ Y_0 + P_0 \sin \alpha_0 - mg \cos \theta_0 = 0, \\ M_{z_0} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Исключим первое уравнение системы в виду малости изменчивости параметра. Во втором уравнении следует пренебречь влиянием силы тяжести на угловое движения ЛА.

В результате процедур линеаризации могут быть получены простейшие уравнения продольного движения ЛА:

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = -a_5 \alpha + \frac{d\vartheta}{dt} - a_6 F_y^6, \\ \frac{d\omega_z}{dt} = -a_1 \frac{d\vartheta}{dt} - a_2 \alpha - a_3 \delta_{p.в.} - a_4 M_z^p, \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_z. \end{cases} \quad (4)$$

Где:

$$a_1 = \frac{M_z^{\omega_z}}{I_z} = \frac{m_z^{\omega_z} q S b}{I_z}; \quad a_2 = \frac{M_z^{\alpha}}{I_z} = \frac{m_z^{\alpha} q S l}{I_z}; \quad a_3 = \frac{M_z^{\delta_{p.в.}}}{I_z} = \frac{m_z^{\delta_{p.в.}} q S b}{I_z};$$

$$a_4 = \frac{1}{I_z}; \quad a_5 = \frac{Y^{\alpha}}{m V_0} = \frac{C_y^{\alpha} q S}{m V_0}; \quad a_6 = \frac{\rho V^2}{2}.$$

Далее составим модель в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gf, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (5)$$

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \omega_z \\ \mathcal{G} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_{p.в.} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} M_z^p \\ F_y^p \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_5 & 1 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & -a_6 \\ -a_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Зададим параметры $a_i, i=1..6$, исходя из значений близких к реальным для исследуемого объекта:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1.503612, \\ a_2 &= 10.2942, \\ a_3 &= -2.05884, \\ a_4 &= 1, \\ a_5 &= 1.14892, \\ a_6 &= 0.33333. \end{aligned} \tag{6}$$

Соответственно передаточная функция от управляемого входа $\delta_{p.в.}$ к управляемому выходу \mathcal{G} будет иметь вид:

$$W_{\delta_{p.в.}}(s) = \frac{-2.059s - 2.365}{s^3 + 2.653s^2 + 12.02s}. \tag{7}$$

От возмущающего входа M_z^p к управляемому выходу:

$$W_{M_z^p \mathcal{G}} = \frac{3.431}{s^3 + 2.653s^2 + 12.02} \tag{8}$$

Годограф $W_{\delta_{p.в.}\mathcal{G}}(s)$:

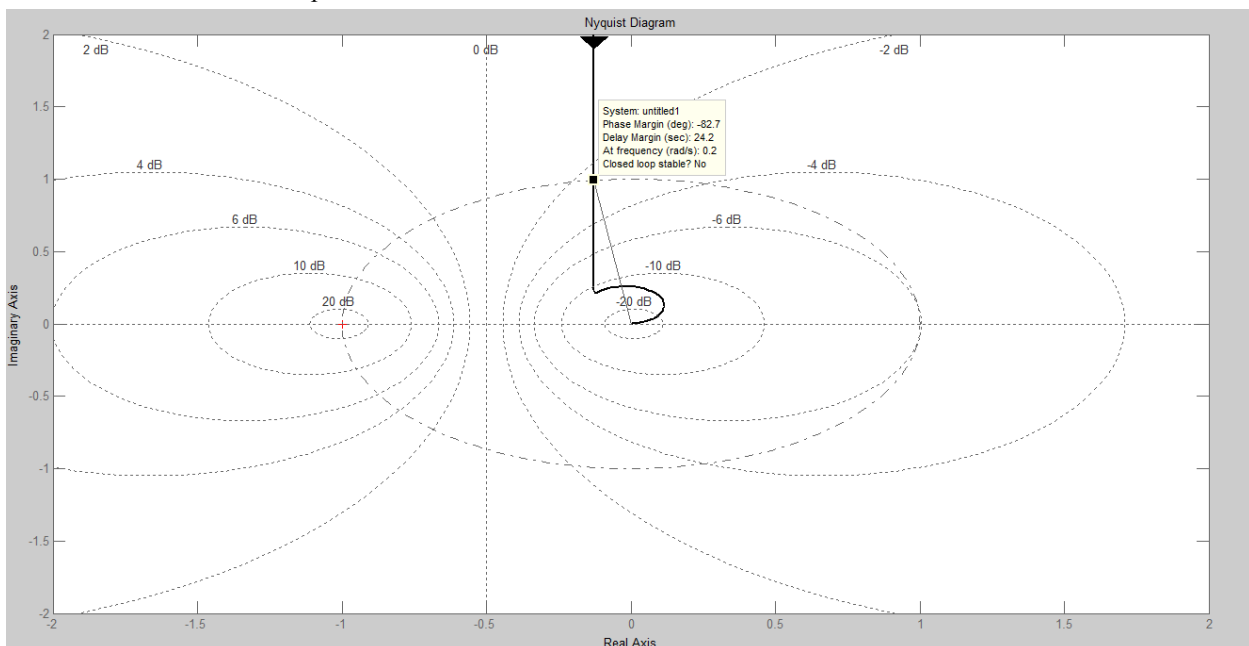


Рис. 2. Годограф передаточной функции руль высоты – тангаж

Исходя из размещения полюсов системы на комплексной плоскости, можно сделать вывод об устойчивости объекта и характере его переходного процесса. Найдём собственные числа матрицы состояний A (корни характеристического уравнения системы) которые находятся из решения характеристического уравнения объекта вида [3]:

$$y(\lambda) = \lambda^2 + a_2\lambda + a_1\lambda + a_0. \quad (9)$$

Приведя матрицу коэффициентов объекта A к канонической форме достижимости, становится возможным нахождение коэффициентов характеристического уравнения. В результате приведения матрица будет иметь следующую структуру:

$$A_{кд} = W_c^{-1} A W_c, \quad (10)$$

где W_c – матрица управляемости:

$$W_c = \begin{bmatrix} 0 & -2.0588 & 5.4611 \\ -2.0588 & 3.0957 & 16.5394 \\ 0 & 2.0588 & 3.0957 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Следовательно:

$$A_{кд} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -12.0217 \\ 0 & 1 & -2.6525 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Получим характеристическое уравнение:

$$y(\lambda) = \lambda^3 - 2.6525\lambda^2 - 12.0217\lambda. \quad (13)$$

Решив уравнение, получим:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda = 5.0385, \quad \lambda = -2.386. \quad (14)$$

Наличие нулевого полюса говорит о том, что объект находится на границе устойчивости.

Боковое движение. Аэродинамические силы и моменты, действующие на ЛА

Боковое движение ЛА включает в себе вращение вокруг продольной оси OX , нормальной оси OY и линейное перемещение вдоль оси OZ . Выделим основные аэродинамические силы и моменты, действующие на ЛА:

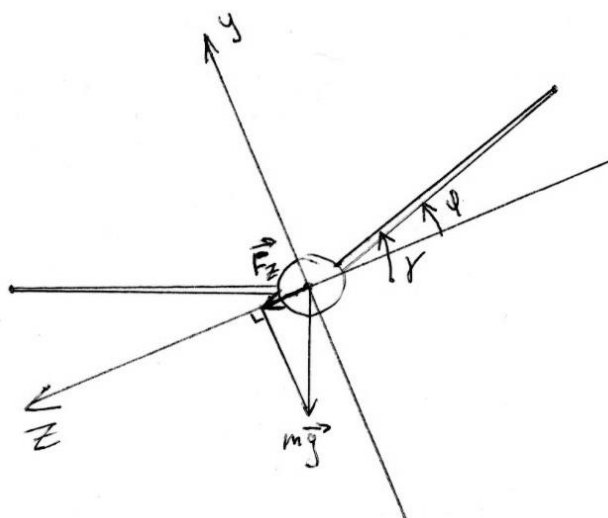


Рис. 7. Схема приложения сил к ЛА в поперечной плоскости

Возникающее скольжение при скорости движения $V_z = V_x \operatorname{tg} \beta$, где β – угол скольжения. Статическая устойчивость полёта ЛА самолётного типа обозначается как $M_{x_0}^{\beta} \Delta \beta$, где $M_{x_0}^{\beta} = \left(\frac{\delta M_x}{\delta \beta} \right)_0$. Связь изменения угла атаки и угла скольжения, может быть представлена в виде [8]:

$$\Delta \alpha = \frac{V_z}{V_x} = \frac{V_z \operatorname{tg} \varphi}{V_x} = \frac{V_x \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \varphi}{V_x} \approx \beta \varphi, \quad (30)$$

В процессе полёта ЛА самолётного типа в результате изменения углов атаки возникает флюгерный или момент статической устойчивости, который обозначают в виде [8]: $M_{y_0}^{\beta} \Delta \beta$, где $M_{y_0}^{\beta} = \left(\frac{\delta M_y}{\delta \beta} \right)_0$.

При вращении ЛА вдоль оси OZ возникает демпфирующий момент крена $M_{x_0}^{\omega_x} \omega_x$, где $M_{x_0}^{\omega_x} = \left(\frac{\delta M_x}{\delta \omega_x} \right)_0$. Одновременно изменение сил, которое происходит при вращении ЛА вдоль оси OZ приводит к появлению демпфирующего момента по рысканию $M_{y_0}^{\omega_x} \omega_x$, где $M_{y_0}^{\omega_x} = \left(\frac{\delta M_y}{\delta \omega_x} \right)_0$.

Аналогично появляется момент рыскания, в результате вращения ЛА относительно оси OY $M_{y_0}^{\omega_y} \omega_y$, где $M_{y_0}^{\omega_y} = \left(\frac{\delta M_y}{\delta \omega_y} \right)_0$.

Демпфирующий момента крена, возникающий в результате отличия обтекающих потоков крылья, $M_{x_0}^{\omega_y} \omega_y$, где $M_{x_0}^{\omega_y} = \left(\frac{\delta M_x}{\delta \omega_y} \right)_0$.

Из выше сказанного видно, что вследствие скольжения, появляющегося при крене, движения крена и рыскания связаны между собой. При автоматическом управлении автопилот устраняет крен, и скольжение не успевает заметно развиваться. Поэтому при автоматическом управлении ЛА движения крена и рыскания допустимо рассматривать независимо друг от друга [8].

Уравнение движения по крену

Если допустить что, ЛА управляется системой автоматического управления, и скорость во время горизонтального полета не меняется, то уравнение движения относительно продольной оси ОХ в общем виде будет иметь вид:

$$I_x \dot{\omega}_x = M_x, \quad (31)$$

где I_x – момент инерции ЛА относительно оси ОХ, M_x – аэродинамический момент крена.

Аналогично для уравнения движения по крену, его линеаризованный вид:

$$I_x \Delta \ddot{\gamma} + M_{x_0}^{\omega_x} \Delta \dot{\gamma} = -M_{x_0}^{\delta \Theta} + M^P, \quad (32)$$

$\Delta \delta \Theta$ – угол отклонения элеронов, M^P – возмущающий момент, $M_{x_0}^{\omega_x} = m_x^{\omega_x} q S l$, $M_{x_0}^{\delta \Theta} = m_x^{\delta \Theta} q S l$.

Уравнения движения по углу рыскания

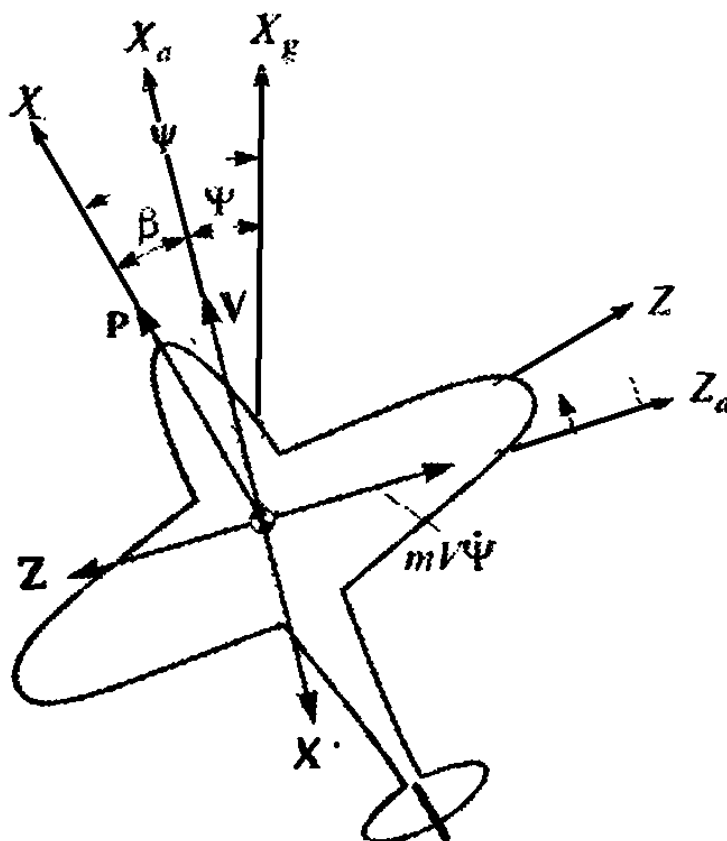


Рис. 9. Схема приложения сил к ЛА в горизонтальной плоскости

Момент рыскания M_y , возникающий при развороте ЛА относительно оси OY с некоторой угловой скоростью, препятствует изменению угла траектории Ψ полета ЛА.

Приравнивая проекции внешних и инерционных сил на ось OZ_a , нормальную к траектории полета, а также внешний и инерционный моменты относительно оси OY , перпендикулярной плоскости XZ , получим уравнения движения:

$$\begin{aligned} mV\dot{\Psi} &= Z + P \sin \beta, \\ I_y \dot{\omega}_y &= M_y, \\ \omega_y &= \dot{\psi}, \\ \psi &= \Psi + \beta. \end{aligned} \quad (33)$$

В линеаризованном виде эти уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} mV_0 \dot{\Psi} + Z_0^\beta \Delta\beta &= 0, \\ I_y \Delta\dot{\omega}_y + M_{y_0}^\beta \Delta\beta + M_{y_0}^{\omega_y} \Delta\omega_y &= -M_{y_0}^{\delta_H} \Delta\delta_H, \\ \Delta\omega_y &= \dot{\psi}, \\ \Delta\psi &= \Delta\Psi + \Delta\beta, \end{aligned} \quad (34)$$

где δ_H – угол отклонения руля направления.

Запишем уравнения в переменных приращений углов курса $\Delta\psi$ и скольжения $\Delta\beta$:

$$\begin{aligned} I_y \Delta\dot{\psi} + M_{y_0}^\beta \Delta\beta + M_{y_0}^{\omega_y} \dot{\psi} &= -M_{y_0}^{\delta_H} \Delta\delta_H + M_p, \\ mV_0 (\Delta\dot{\psi} - \Delta\dot{\beta}) + Z_0^\beta \Delta\dot{\beta} &= F_p, \\ Z_0^\beta &= C_z^\beta qS. \end{aligned} \quad (35)$$

Структурная схема бокового движения

Линеаризованные уравнения движения ЛА были получены в предыдущем пункте. Если пренебречь скольжением, то система имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} I_x \ddot{\gamma} + M_{x_0}^{\omega_x} \dot{\gamma} &= -M_{x_0}^{\delta_\Theta} \delta_\Theta + M_p, \\ I_y \ddot{\psi} + M_{y_0}^\beta V_0 \dot{\psi} + M_{y_0}^{\omega_y} \dot{\psi} &= -M_{y_0}^{\delta_H} \delta_H + M_p, \\ \dot{\gamma} &= \omega_x, \\ \dot{\psi} &= \omega_y. \end{aligned} \right. \quad (36)$$

Запишем модель в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gf, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (37)$$

$$x = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \gamma \\ \psi \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} \delta_\delta \\ \delta_H \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} M_p \\ M_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -n_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n_{22} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -m_1 \\ -m_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Зададим параметры n и m значениями близкими к реальным:
 $n_{12} = 5, \quad n_{22} = 0.2; \quad m_1 = 30, \quad m_2 = 3.$

Структурная схема модели бокового движения самолета:

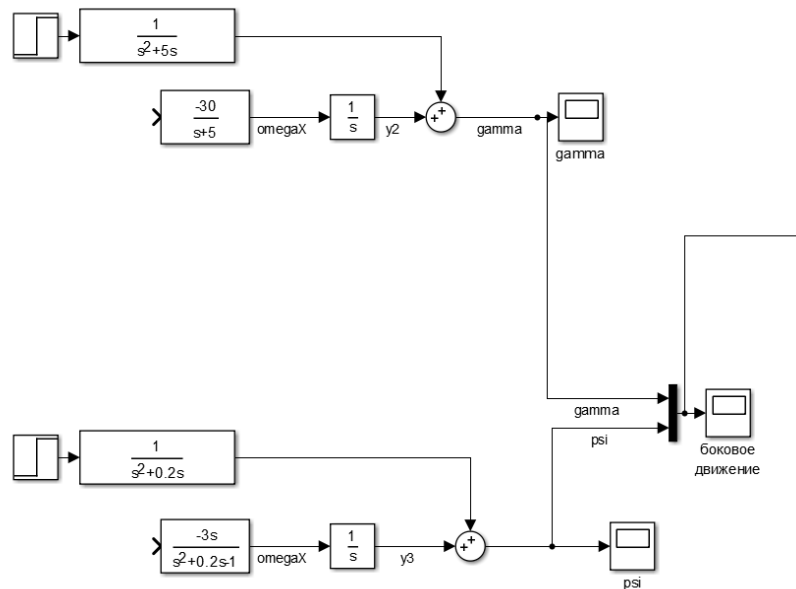


Рис. 10. Структурная схема бокового движения ЛА

Замкнём контуры управления по регулируемым величинам $\omega_x, \gamma, \omega_y, \psi$ [5,6,7].
Как видно из структурной схемы передаточная функция разомкнутой системы имеет астатизм второго порядка, а значит переходный процесс будет обязательно иметь установившуюся ошибку при ступенчатом воздействии.

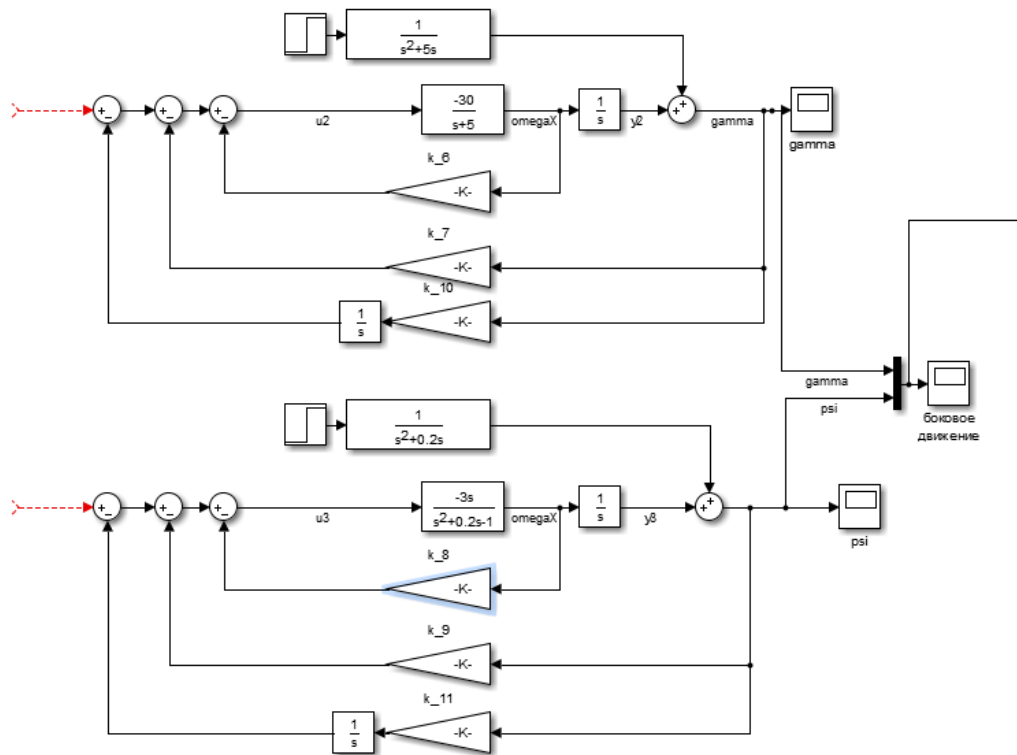


Рис. 11. Структурная схема САУ стабилизацией бокового движения ЛА

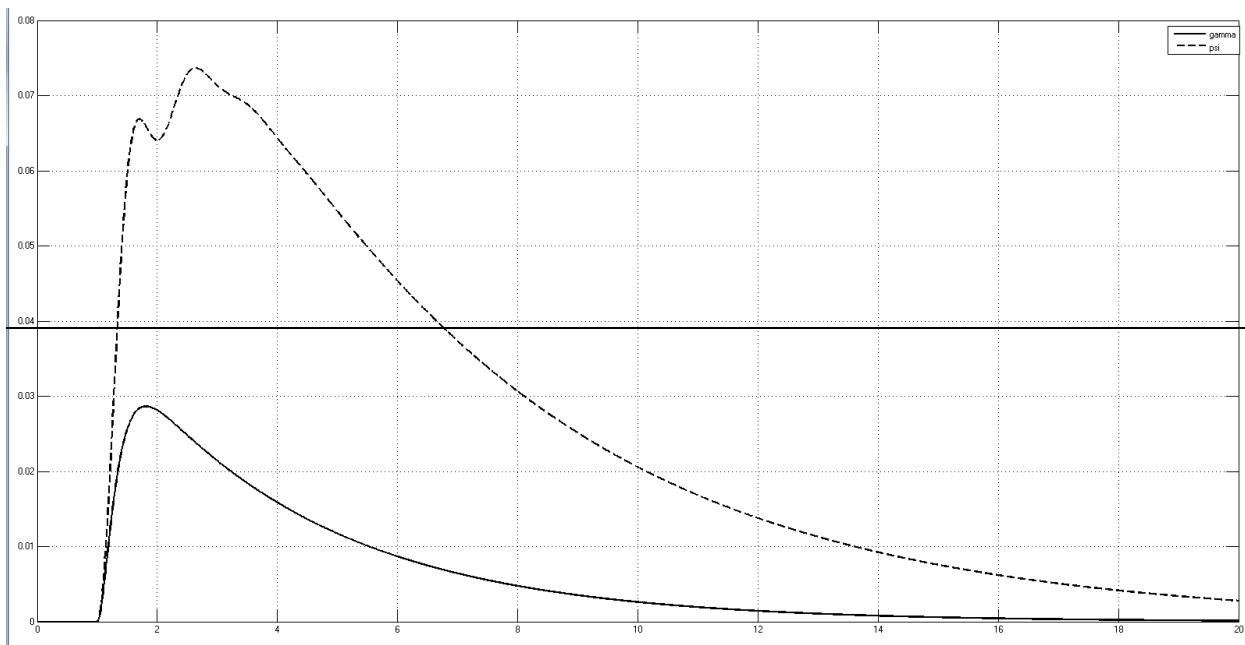


Рис. 12. Отклик САУ стабилизацией бокового движения ЛА

Заключение

Составленная математическая модель динамики полета ЛА самолётного типа в данной работе может быть использована для разработки системы

автоматического управления полётом. В ходе создания математической модели объекта управления были указаны допущения и ограничения в плане адекватности полученной модели.

Литература

1. Боднер В.А. Системы управления летательными аппаратами. - М.: Машиностроение, 1973. - 506 с.
2. Агеев Р.В., Кондратов Д.В., Маслов Ю.В. Применение аддитивных технологий при проектировании и производстве деталей аэрокосмических объектов. - Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2013. № 6. С. 35-39.
3. Боднер В. А., Теория автоматического управления полётом, М., 1964, 700 с.
4. Тарг С.М. Краткий курс теоритической механики, 1986г.
5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – 4-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург: Профессия, 2007. – 747 с.
6. Ким П.Д. Теория автоматического управления. Часть 1. Линейные системы: учебник для вузов; 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010 – 288с..
7. Ерофеев А.А. Теория автоматического управления: учебник – СПб.: Политех-ника, 2008. – 302 с.
8. Боднер В. А. Стабилизация летательных аппаратов и автопилоты : учебное пособие для вузов / В. А. Боднер, М. С. Козлов. - М.: Оборонгиз, 1961.