Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: **mathmod.esrae.ru/17-65**
Ссылка для цитирования этой статьи:
Блинкова О. В., Кондратов Д.В. Математическая модель взаимодействия сдавливаемого слоя вязкой сжимаемой жидкости с упругой трехслойной пластиной с легким несжимаемым заполнителем // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. №1

УДК 51-74

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СДАВЛИВАЕМОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНОЙ С ЛЕГКИМ НЕСЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Блинкова О. В.[1,2], Кондратов Д.В.[2]
[1] Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Саратовская государственная юридическая академия", Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина – филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации,
Россия, Саратов, oksana_parfilova@mail.ru,
[2] Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина – филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Россия, Саратов, kondratovdv@yandex.ru

MATHEMATICAL MODEL OF LAYERED VISCOUS COMPRESSED LIQUID LAYER INTERACTION WITH ELASTIC THREE-LAYER PLATE WITH A LIGHT INCOMPLETE FILLER

Blinkova O.V.[1,2], Kondratov D.V.[2]
[1]Federal State Budget Educational Institution of Higher Education Saratov State Academy of Law,
Volga Management Institute named after P.A. Stolypin - a branch of Federal State-Funded Educational Institution of Higher Education Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
Russia, Saratov, oksana_parfilova@mail.ru,
[2] Volga Management Institute named after P.A. Stolypin - a branch of Federal State-Funded Educational Institution of Higher Education Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration,
Russia, Saratov, kondratovdv@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача моделирования течения вязкой сжимаемой жидкости в щелевом канале, состоящем из двух пластин. Первая пластина является абсолютно жесткой и совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости. Вторая представляет собой упругую трехслойную пластину с легким несжимаемым заполнителем. Математическая модель в безразмерных переменных представляет собой связанную систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую динамику движения вязкой сжимаемой жидкости и упругой балки-полоски с соответствующими граничными условиями.

Ключевые слова: вязкая сжимаемая жидкость; щелевой канал; балка-полоска; упругая трехслойная пластина; уравнение Навье-Стокса.

Annotation. The problem of modelling the flow of a viscous compressible fluid in a slit channel consisting of two plates is considered. The first plate performs harmonic oscillations in the vertical plane relative to the second and is absolutely rigid. The second is an elastic three-layer plate with a light incompressible filler and is held rigidly by the edges. The mathematical model in dimensionless variables is a connected system of partial differential equations describing the dynamics of the motion of a viscous compressible fluid and an elastic beam-strip with the corresponding boundary conditions.

Keywords: viscous compressible liquid, slit channel, a bar-strip, elastic three-layer plate, Navier-Stokes equation.

Современное бурное техническое развитие стало причиной построения и рассмотрения математических моделей упругих трехслойных элементов конструкций. Для многих современных технических изделий характерно все более частое использование различных слоистых материалов и многослойных упругих элементов конструкций. К таким элементам относятся стержни и пластины со слоистой структурой.

Вопросы моделирования деформирования трехслойных конструкций при силовых статистических нагрузках широко изучены, например, изгиб несимметричных по толщине упругих трехслойных пластин изучался Зеленой А.С. [1], механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций описана Горшковым А.Г., Старовойтовым Э.И., Яровой А.В. [2], проводилось так же изучение их поведения при динамическом взаимодействии с жидкостью, например, математическое моделирование динамики взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости с упругим трехслойным статором и абсолютно твердым вибратором опоры описывалось в работах Могилевича Л.И., Попова В.С., Поповой А.А., Скородумова Е.С., Грушенкова Е.Д и др., циклическое деформирование трехслойного стержня локальной поверхностной нагрузкой изучалось Старовойтовым Э.И., Леоненко Д.В., Плескачевским Ю.М. [3]. В рассмотренных ранее задачах гидроупругости жидкостных демпферов с упругими элементами моделировалась динамика вязкой жидкости в щелевых каналах, стенки которых могли быть ребристыми и трехслойными [4-7], а также задачи гидроупругости труб кольцевого профиля с жидкостью между ними при вибрации [8, 9] .

Несмотря на большое количество исследований, поведение трехслойных пластин при динамическом взаимодействии с жидкостью изучено пока еще недостаточно широко. Разработка агрегатов, состоящих из упругих тонкостенных конструкций в виде пластин, взаимодействующих с окружающим слоем вязкой жидкости, предусматривает исследование динамики механической системы пластина-слой вязкой жидкости. Это приводит к необходимости постановки и решения задач моделирования динамики взаимодействия трехслойных стержней и пластин со слоем вязкой жидкости, находящейся в плоском щелевом канале, в которой поддерживается гармонически изменяющееся давление.

Рассмотрим физическую модель механической системы (рис.1). Она состоит из абсолютно жесткой пластины I (вибратора) и трехслойной пластины с несжимаемым заполнителем II (статора), представляющей собой упругую стенку щелевого канала. Пространство III между пластинами I и II заполнено вязкой сжимаемой жидкостью. Внутренняя поверхность вибратора считается плоской и является одной из стенок щелевого канала. Предполагается, что вибратор имеет подвес, который обладает упругой податливостью. В результате пульсации давления в жидкости в соответствии с гармоническим законом возникают колебания вибратора в вертикальном направлении относительно статора. Движение пластины I описывается гармоническим законом и имеет амплитуду z_m.

Статор представляет собой упругую трехслойную пластину с несжимаемым легким и жестким заполнителем. Делается предположение, что в несущих слоях статора 1 и 2 выполняются гипотезы Кирхгофа, а в заполнителе 3 нормаль поворачивается на некоторый угол $\varphi(x)$, но является прямолинейной и не меняет длины. Предполагается, что на торцах трехслойного статора расположены жесткие диафрагмы. Торцы трехслойного статора являются свободно опертыми, а деформации статора считаются малыми.

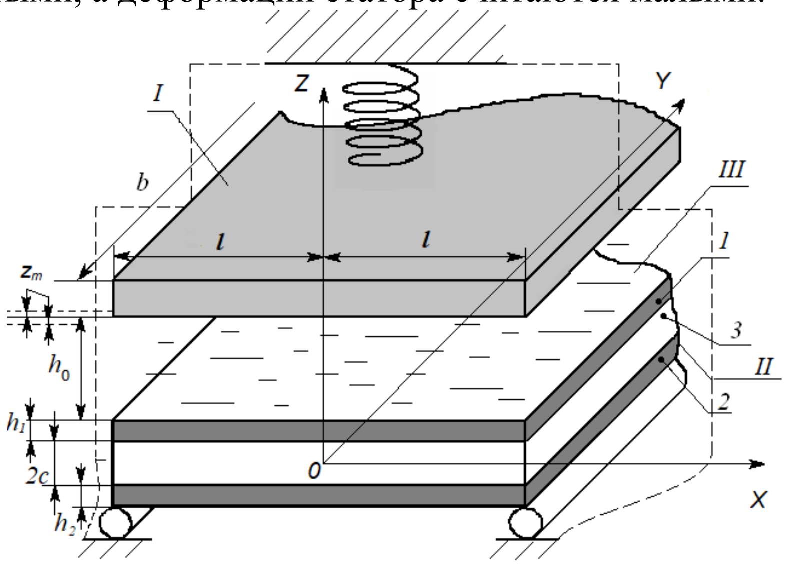

Рис.1 Физическая модель

Длина и ширина статора ($2l$ и b) аналогична длине и ширине вибратора. Считается, что ширина стенок значительно больше их длины, то есть $2b >> 2l$. Предполагается, что жесткость пластины вдоль стороны b гораздо больше ее жесткости вдоль стороны $2l$. В данной модели плоскости в направлении оси y можно считать неограниченными. Таким образом, далее рассматривается плоская задача, т.е. всеми производными по y можно пренебречь.

Следовательно, можно считать, что вибратор и статор в данной модели являются неограниченными в направлении стороны b и трехслойный статор II имеет изгиб, сходный с цилиндрическим, другими словами, прогибы статора можно моделировать как прогибы трехслойного стержня.

Вязкая сжимаемая жидкость III полностью заполняет щелевое пространство, образованное вибратором I и упругим трехслойным статором II. Предполагается также, что в жидкости, заполняющей щелевой зазор, и вне его, поддерживается давление $p_0 + p_1(\omega t)$, состоящее из постоянной составляющей p_0 и гармонической по времени составляющей $p_1(\omega t)$.

Толщина слоя вязкой сжимаемой жидкости имеет ширину h_0, которая значительно меньше длины пластин: $2l >> h_0$.

Считается так же, что температура жидкости, вибратора и упругого статора является постоянной. Предполагается также, что возникающие при взаимодействии слоя жидкости со статором прогибы пластины II и амплитуда колебаний вибратора являются намного меньшими средней толщины слоя жидкости, т.е. $h_0 >> z_m$.

Таким образом, физическая модель опоры представляет собой совокупность абсолютно жесткого вибратора, упругого трехслойного статора, взаимодействующих друг с другом через сдавливаемый слой вязкой сжимаемой жидкости с пульсирующим в ней давлением. Кроме того, предполагается, что ширина вибратора и трехслойной пластины значительно больше их длины.
Пусть x, z - декартовы координаты; V_x - проекция вектора скорости на ось x; V_z - проекция вектора скорости на ось z; t - время; p - давление; ρ - плотность; ν - коэффициент кинематической вязкости жидкости.
Введем в рассмотрение следующие безразмерные переменные: $\tau = \omega t,\ \xi = \dfrac{x}{l}$,

$$\zeta = \frac{z - c - h_1}{h_0},\ \psi = \frac{h_0}{l} << 1,\ \lambda = \frac{z_m}{h_0},\ V_x = \frac{z_m \omega l}{h_0} U_\xi(\xi, \zeta, \tau),\ V_z = z_m \omega U_\zeta(\xi, \zeta, \tau),$$

$$p = p_0 + \frac{\mu \lambda \omega}{\psi^2} P(\xi, \tau) + p_1(\tau),\ Ma^2 = \frac{l^2 \omega^2}{c^2},\ c = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_{00}}},\ \mathrm{Re} = \frac{h_0^2 \omega \rho_{00}}{\mu},$$

$w = w_m W(\xi, \tau),\ u = u_m U(\xi, \tau)$, где $u_m,\ w_m$ - амплитуды упругих перемещений срединной плоскости верхнего слоя 1 статора в направлении осей Ox и Oz,

Динамика движения вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей пространство между пластинами, описывается уравнениями Навье-Стокса и уравнением неразрывности [10]:, которые в безразмерных переменных имеют вид [7]:

$$(\mathrm{Re}+\lambda Ma^2 P)\left(\frac{\partial U_\xi}{\partial\tau}+\lambda U_\xi\frac{\partial U_\xi}{\partial\xi}+\lambda U_\zeta\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\right)=$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial\xi}+\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial\zeta^2}+\psi^2\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial\xi^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial\zeta\partial\xi}\right);$$

$$\psi^2(\mathrm{Re}+\lambda Ma^2 P)\left(\frac{\partial U_\zeta}{\partial\tau}+\lambda U_\xi\frac{\partial U_\zeta}{\partial\xi}+\lambda U_\zeta\frac{\partial U_\zeta}{\partial\zeta}\right)= \qquad (1)$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial\zeta}+\psi^2\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial\zeta^2}+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial\zeta\partial\xi}+\psi^2\frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial\xi^2}\right);$$

$$Ma^2\frac{\partial P}{\partial\tau}+\lambda Ma^2\left(U_\xi\frac{\partial P}{\partial\xi}+U_\zeta\frac{\partial P}{\partial\zeta}\right)+(\mathrm{Re}+\lambda Ma^2 P)\left(\frac{\partial U_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial U_\zeta}{\partial\zeta}\right)=0.$$

Граничные условия системы уравнений (1) представляют собой условия прилипания вязкой сжимаемой жидкости к поверхностям абсолютно жесткого вибратора и упругого трехслойного статора. В рассматриваемом случае данные условия выражаются в совпадении скорости жидкости со скоростями движения поверхностей:

$$U_\xi=0,\; U_\zeta=\frac{df_z(\tau)}{d\tau} \quad \text{при} \quad \zeta=1+\lambda f_z(\tau);$$

$$\qquad (2)$$

$$U_\xi=0,\; U_\zeta=\frac{w_m}{z_m}\frac{\partial W}{\partial\tau} \quad \text{при} \quad \zeta=\lambda\frac{w_m}{z_m}W.$$

Кроме того, уравнения (1) дополняются условиями свободного истечения вязкой сжимаемой жидкости на торцах. Эти условия в направлении оси x и в противоположном направлении являются условиями совпадения давления на торце с давлением в жидкости. Данные условия в безразмерных переменных записываются следующим образом:

$$P=0 \text{ при } \xi=1, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial\xi}=0 \text{ при } \xi=0.$$

Нормальное напряжение, оказывающее действие на поверхность упругого трехслойного статора со стороны жидкости примет следующий вид в случае безразмерных переменных:

$$q_{zz}=-p_0-\frac{\rho\nu z_m\omega}{h_0\psi^2}\left(P-2\psi^2\frac{\partial U_\zeta}{\zeta}\right)-p_1(\tau) \quad \text{при} \quad \zeta=\lambda\frac{w_m}{z_m}W.$$

Касательное напряжение в безразмерных переменных запишется следующим образом:

$$q_{zx}=\frac{\rho\nu z_m\omega}{h_0\psi}\left(\psi^2\frac{\partial U_\zeta}{\partial\xi}+\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\right) \quad \text{при} \quad \zeta=\lambda\frac{w_m}{z_m}W.$$

Уравнения динамики упругого трехслойного статора (в данном случае совпадающие с уравнениями динамики трехслойного стержня) принимают вид [11]:

$$\begin{aligned}
&a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_6\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-a_7\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0;\\
&a_6\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-a_3\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0;\\
&a_7\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+a_3\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}-a_4\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=p_0+p_1(\tau)+\frac{\rho\nu z_m\omega}{h_0\psi^2}P.
\end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь $m_0=\rho_1 h_1+\rho_2 h_2+2\rho_3 c$, где ρ_k – плотность материала k- го слоя, $k=1,2,3$ – номер слоя;

q_{zx}, q_{zz} – напряжения, действующие со стороны слоя жидкости на поверхность упругого трехслойного статора.

Здесь введены следующие коэффициенты, отражающие жесткостные свойства слоев:

$$a_1=K_1^+h_1+K_2^+h_2+2K_3^+c;$$

$$a_2=c^2\left[K_1^+h_1+K_2^+h_2+\frac{2}{3}K_3^+c\right];\ a_3=c\left[K_1^+h_1\left(c+\frac{1}{2}h_1\right)+K_2^+h_2\left(c+\frac{1}{2}h_2\right)+\frac{2}{3}K_3^+c^2\right];$$

$$a_4=K_1^+h_1\left(c^2+ch_1+\frac{1}{3}h_1^2\right)+K_2^+h_2\left(c^2+ch_2+\frac{1}{3}h_2^2\right)+\frac{2}{3}K_3^+c^3;$$

$$a_5=2G_3c;\ a_6=c\left[K_1^+h_1-K_2^+h_2\right];\ a_7=K_1^+h_1\left(c+\frac{1}{2}h_1\right)-K_2^+h_2\left(c+\frac{1}{2}h_2\right);$$

и приняты обозначения: $K_k^+=K_k+\frac{3}{4}G_k$; где G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации.

Умножая первое уравнение в (4) на a_2, второе на a_6 и вычитая из первого второе, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=b_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \text{где} \quad b_1=\frac{a_2a_7-a_3a_6}{a_1a_2-a_6^2};$$

умножая первое уравнение в (4) на a_6, второе на a_1 и вычитая из второго уравнения первое, получаем:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=b_2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \text{где} \quad b_2=\frac{a_1a_3-a_7a_6}{a_1a_2-a_6^2}.$$

Учитывая найденную связь u, φ, $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ и введенные безразмерные переменные, получим уравнение, определяющее прогиб:

$$-w_m\left\{\frac{1}{l^4}(a_4-a_7b_1-a_3b_2)\frac{\partial^4 W}{\partial\xi^4}+m_0\omega^2\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2}\right\}=p_0+p_1(\tau)+\frac{\rho\nu z_m\omega}{h_0\psi^2}P. \qquad (5)$$

Граничные условия в случае безразмерных переменных примут следующий вид:

$$W=0,\ \frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2}=0 \quad \text{при} \quad \xi=1;$$
$$W=0,\ \frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2}=0 \quad \text{при} \quad \xi=-1. \qquad (6)$$

Итак, сформулирована связанная нелинейная динамическая задача упругости виброопоры, состоящая из: уравнения динамики слоя вязкой сжимаемой жидкости (1); уравнения динамики упругого трехслойного статора с несжимаемым легким заполнителем (стержня) (5); граничных условий на поверхностях пластин (2), граничных условий для давления на торцах и в торцевых щелях (3) и условий свободного опирания упругого трехслойного статора (6).

Таким образом, осуществлена постановка задачи в безразмерных переменных для механической системы, состоящей из абсолютно жесткого вибратора, упругого трехслойного статора с несжимаемым заполнителем и движущегося между ними слоя вязкой сжимаемой жидкости. Исследование указанной математической модели, расчеты и оценки поведения упругих трехслойных конструкций, взаимодействующих с жидкостью, необходимы для конструирования современных изделий машиностроительной и авиакосмической промышленности.

Выполнено при поддержке грантов РФФИ 16-01-00175-а и 18-01-00127-а и гранта Президента РФ МД-756.2018.8.

Список литературы

1. Зеленая А.С. Изгиб упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2017. – № 3.
2. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: Физматлит, 2005. 576 с.
3. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Плескачевский Ю.М. Циклическое деформирование трехслойного стержня локальной поверхностной нагрузкой // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2016. – № 2.

4. Агеев Р.В., Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия подвижных стенок плоского канала со сдавливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2009. Т. 4. № 1 (42). С. 7-13.
5. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Kondratov D.V. Mathematical model of pulsating viscous liquid layer movement in a flat channel with elastically fixed wall // Applied Mathematical Sciences. 2014. Т. 8. № 157-160. С. 7899-7908.
6. Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С. 17-35.
7. Могилевич Л.И., Попов В.С., Старовойтов Э.И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56-63.
8. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И., Плаксина И.В. Гидроупругость трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации при различных ее закреплениях // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 29-37.
9. Кондратов Д.В., Плаксина И.В. Гидроупругость геометрически нерегулярной трубы кольцевого профиля при воздействии гармонического перепада давления // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 25-28.
10. Фабрикант Н. Я. Аэродинамика: Общий курс– М. : Наука, 1964 . – 816 с.
11. Попов В.С., Христофорова А.В. Математическое моделирование динамических процессов в гидродинамической опоре с трехслойным статором // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. Т. 3. № 1 (26). С. 38-45.