Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: **mathmod.esrae.ru/18-66**
Ссылка для цитирования этой статьи:
Сопенко А.А., Тебякин А.Д. Влияние форм колебаний на напряжённо-деформированное состояние нелинейной пологой оболочки // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. №2

УДК 539.3; 543.1

ВЛИЯНИЕ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ НА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ

Сопенко А.А.[1] , Тебякин А.Д.[2]
[1] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, saasar@mail.ru
[2] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, alexei.tebyackin@ya.ru

INFLUENCE OF OSCILLATION FORM ON INTENSE STRAINED STATE OF NONLINEAR SHALLOW SHELL

Sopenko A.A.[1], Tebyakin A.D.[2]
[1] Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, saasar@mail.ru
[2] Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, alexei.tebyackin@ya.ru

Аннотация. Рассматривается напряжённо-деформированное состояние геометрически нелинейной пологой оболочки при различных формах колебаний. Оболочка нагружена переменной во времени поперечной нагрузкой. Учитывается связанность деформаций и температуры. Используются уравнения, полученные в рамках модели Киргофа-Лява.

Ключевые слова: нелинейная пологая оболочка, сложные колебания, поперечная нагрузка, связанная термоупругость, напряжённо-деформированное состояние.

Abstract. The paper deals with intense strained state of geometrically nonlinear shallow shell as a corollary of transverse loading. Influence of forms of oscillations, coupled thermo-elasticity and Kirchhoff-Love model are considered.

Keywords: nonlinear shallow shell, complex vibrations, transvers loading, coupled thermo-elasticity, intense strained state.

В настоящее время опубликовано очень большое количество работ, посвящённых сложным колебаниям балок, пластин и оболочек. Получены уравнения, описывающие связанные задачи термоупругости в рамках моделей Тимошенко и Шереметева-Пелеха [1,2]. Некоторые вопросы математического моделирования сложных колебаний в рамках разностных моделей для пластин и оболочек рассматриваются в [3]. Результаты численного решения связанных задач термоупругости для пологих оболочек в рамках модели Кирхгофа-Лява приводятся в [4]. Но во всех указанных работах основное внимание уделяется изучению форм колебаний под действием переменной во времени нагрузки. В настоящей работе основное внимание уделяется исследованию напряжённо-деформированного состояния (НДС) пологой оболочки при различных формах сложных колебаний. В этом плане данная работа является продолжением [4].

Система уравнений, полученная в смешанной форме в рамках модели Кирхгофа - Лява для геометрически нелинейной пологой прямоугольной в плане оболочки, широко известна и приводится ниже в безразмерном виде:

$$\frac{1}{12(1-\nu^2)}\nabla^4 w - L(w,F) - \nabla_k^2 F - q + k(\ddot{w}+\varepsilon\dot{w}) = 0,$$

$$\nabla^4 F + \nabla_k^2 w + \frac{1}{2}L(w,w) = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{h^2}{a^2}\theta_{x_1x_1} + \frac{h^2}{b^2}\theta_{x_2x_2} + \theta_{x_3x_3} = \dot{\theta} + \frac{T_0 E\alpha_T^2}{3(1-2\nu)\rho h^2}\dot{e}$$

где $k = \dfrac{a^2b^2\rho}{Eh^6}$.

Здесь F - функция усилий, w - прогиб в направлении, перпендикулярном срединной поверхности, a,b,h-размеры оболочки, E и ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона, ρ - плотность, θ - приращение температуры, $\theta = T - T_0$, α_T - коэффициент линейного теплового расширения, $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ - объёмное расширение, ε - коэффициент демпфирования. Остальные обозначения, в том числе для известных дифференциальных операторов, приводятся в [4].

Используя известные физические и геометрические соотношения, выразим объёмное расширение e через искомые функции. Переходя к безразмерным переменным, получим

$$e = (1-2\nu)\left(\lambda^{-1}F_{x_1x_1} + \lambda F_{x_2x_2} + 2N_T\right) - \qquad (2)$$

$$-\frac{1-2\nu}{1-\nu}x_3\left(\lambda^{-1}W_{x_1x_1} + \lambda W_{x_2x_2}\right) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\theta.$$

Подставляя значение e в уравнение теплопроводности, приводим последнее к окончательному виду

ISSN 2541-9269

$$\frac{h^2}{a^2}\theta_{x_1x_1}+\frac{h^2}{b^2}\theta_{x_2x_2}+\theta_{x_3x_3}=\left(1+\frac{1+\nu}{1-\nu}\cdot\frac{T_0\alpha_T^2E}{3(1-2\nu)c}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+$$

$$+\frac{T_0\alpha_T^2E}{3(1-2\nu)c}\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\lambda^{-1}F_{x_1x_1}+\lambda F_{x_2x_2}+2N_T-\frac{x_3}{1-\nu}\left(\lambda^{-1}W_{x_1x_1}+\lambda W_{x_2x_2}\right)\right), \quad (3)$$

где c - удельная теплоёмкость, $\frac{\partial}{\partial\tau}$ - дифференцирование по времени.

В начальный момент времени оболочка находится в покое, поэтому в качестве начальных условий примем соотношения $w\big|_{t=0}=0$, $\dot{w}\big|_{t=0}=0$.

По контуру оболочка опирается на гибкие, нерастяжимые в касательной плоскости рёбра; для края $x_1=0;1$ граничные условия имеют вид

$$w=\frac{\partial w}{\partial x_1}=0, \quad \varepsilon_{22}=0, \quad \frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial x_1}-\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_2}=0. \quad (4)$$

На оболочку на поверхности $z=-h/2$ воздействует равномерно распределённая по плану нагрузка интенсивности $q=q_0\sin\omega t$, где частота ω выбиралась близкой к частоте собственных колебаний конструкции в одном случае, и достаточно отличающейся от неё в другом.

В качестве граничных условий уравнения теплопроводности (3) при учёте связанности деформаций и температуры рассматривалась полная теплоизоляция оболочки, т.е. на каждой грани оболочки принималось условие

$$\frac{\partial\theta}{\partial n}=0, \quad (5)$$

где n - внешняя нормаль к границе.

Безразмерные переменные для системы (1) вводились следующим образом (чёрточки сверху, опущенные для удобства в (1), здесь стоят над безразмерными переменными):

$$\overline{x_1}=\frac{x_1}{a},\quad \overline{x_2}=\frac{x_2}{b},\quad \overline{x_3}=\frac{x_3}{h},\quad \overline{w}=\frac{w}{h},\quad \overline{F}=\frac{F}{Eh^3},\quad \lambda=\frac{a}{b},\ \bar{t}=\frac{t\cdot\alpha}{h^2},$$

$$\bar{q}=q\frac{a^2b^2}{Eh^4},\quad \overline{k_1}=k_1\frac{a^2}{h},\quad \overline{k_2}=k_2\frac{b^2}{h},\quad \bar{\theta}=\theta\frac{\alpha_T ab}{h^2},\quad \overline{q_T}=q_T\frac{ab\alpha_T}{hk_T}. \quad (6)$$

Здесь α - коэффициент температуропроводности.

При численных расчетах рассматривалась оболочка с физическими параметрами, соответствующими сплаву АМц, $a=b$, $a/h=100$. Безразмерные параметры кривизны $k_1 = k_2 = 24$. Значение коэффициента демпфирования [1-3], [5] принималось равным 1. Собственная частота колебаний данной конструкции составила, согласно численным расчётам, значение $\omega_0 = 30{,}125$. Определение собственной частоты колебаний конструкции проводилось следующим образом. Рассматривалась динамическая реакция оболочки на описанную выше нагрузку $q = q_0 \sin \omega t$ малой интенсивности, вызывающую максимальные прогибы в центре оболочки порядка нескольких сотых (в безразмерных величинах). Просчёты производились на коротком временном интервале при различных значениях частоты вынуждающей силы. При достижении этой частотой значения, совпадающего с частотой собственных колебаний конструкции, амплитуда прогибов увеличивалась примерно в 10 раз.

Алгоритм численного решения (1) изложен в [4], укажем только, что был применён метод конечных разностей для дискретизации производных по пространственным переменным, полученные обыкновенные дифференциальные уравнения интегрировались по времени при помощи комбинации явного и неявных методов Адамса, система алгебраических уравнений относительно функции усилий F решалась на каждом шаге по времени методом Гаусса.

В качестве характеристик НДС оболочки в задаче, решаемой в смешанной форме, выбраны, помимо прогиба w, вторая производная от функции усилий $F_{x_2 x_2}$ (совпадающая с нормальным усилием) и изгибающий момент M_{11}, которые приводятся вдоль осей симметрии квадратной оболочки: прямых $x_1 = 0.5$ и $x_1 = x_2$. Рисунок, соответствующий первой указанной оси симметрии (в табл. 1 и далее), приводится справа, соответствующий второй оси симметрии (для квадратной оболочки эта ось проходит через угловую точку оболочки и центральную точку плана) – слева. В табл. 1 буквы *NSV* и *SV* соответствуют результатам, полученным в несвязанной и связанной задачах соответственно. В данной таблице и далее все результаты приводятся в безразмерном виде.

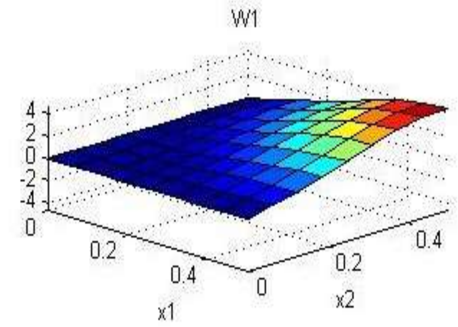
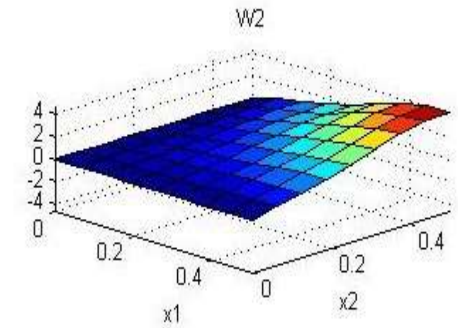
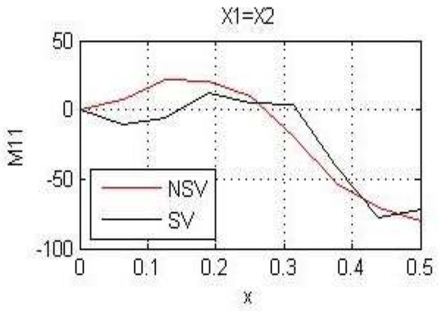
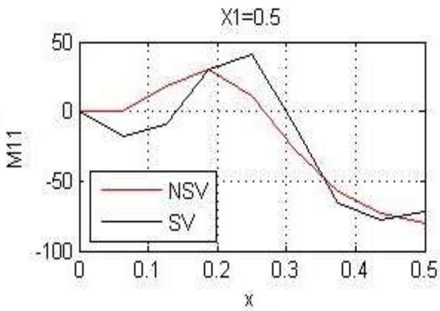
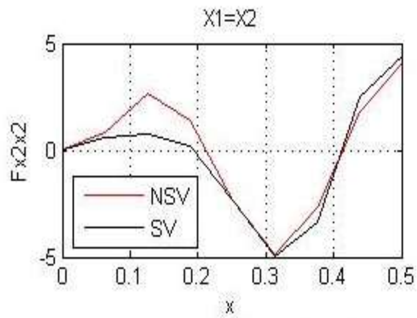
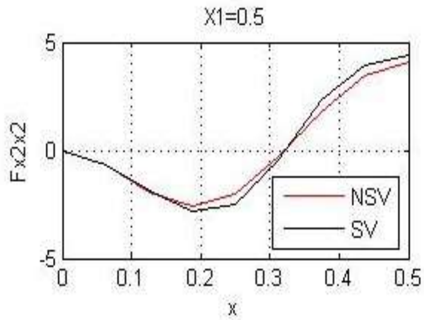
В [4] было показано, что влияние учёта эффекта связанности в задаче о колебаниях очень тонкой оболочки крайне незначительно. Это подтверждается данными, приведённых в табл.1, где графики построены для нагрузки $q_0 = 110$ и частоты вынуждающей нагрузки $\omega = 32$, близкой к собственной частоте колебаний конструкции. Для связанной (*SV*) и несвязанной (*NSV*) задач графики построены для моментов времени, когда прогибы оболочки в её центре в обеих задачах были максимальны.

При данной нагрузке оболочка осуществляет хаотические колебания при динамической потере устойчивости. При меньших значениях q_0 различия в значениях $M_{11}, F_{x_2 x_2}$ составляют десятые и сотые доли процентов и не приводятся. В силу этого для всех последующих задач для оболочки с

ISSN 2541-9269

указанными физическими и геометрическими параметрами связанные задачи не рассматривались.

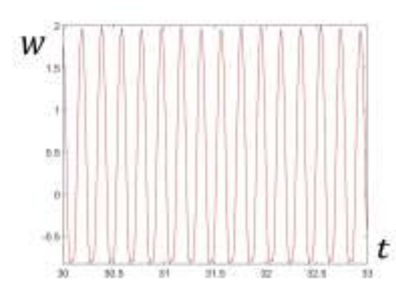
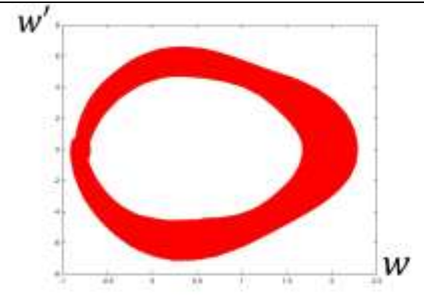
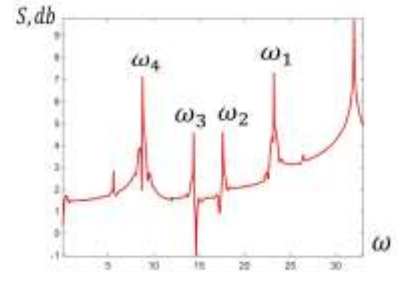
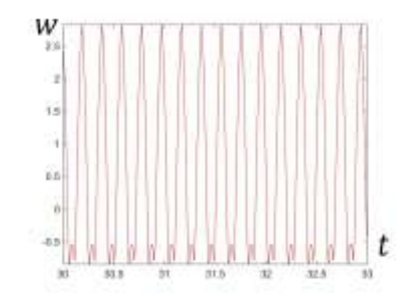
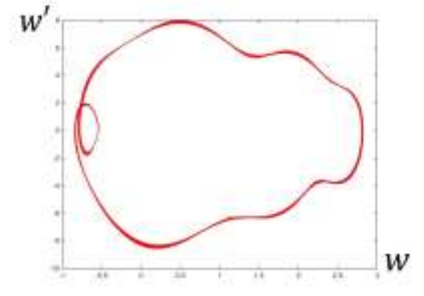
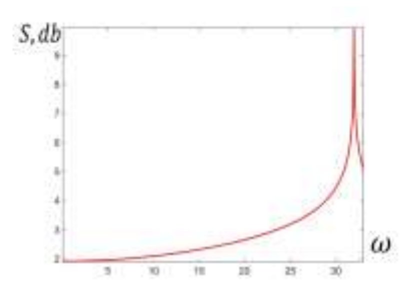
НДС оболочки в связанной и несвязанной задачах Таблица1

	NSV(1)	*SV(2)*
w		
M_{11}		
$F_{x_2x_2}$		

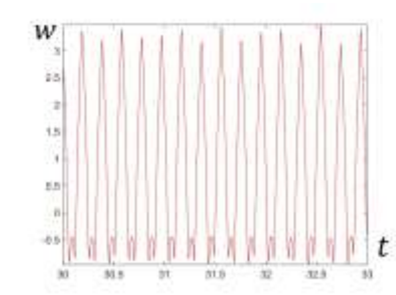
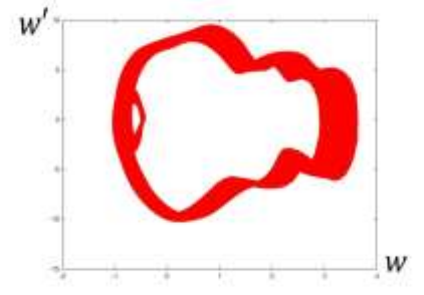
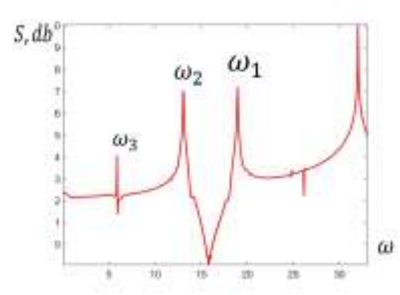
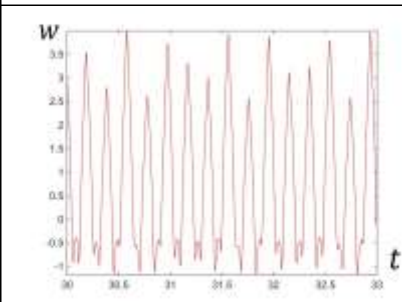
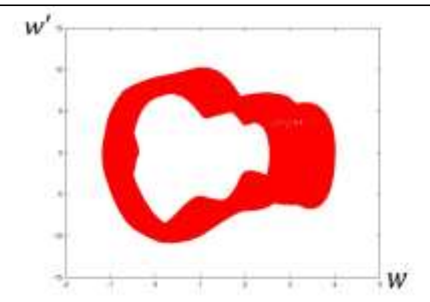
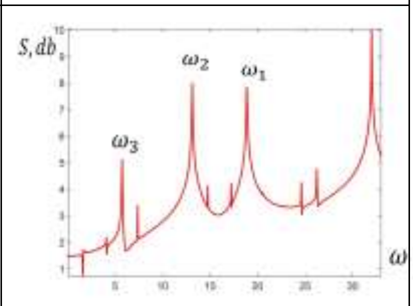
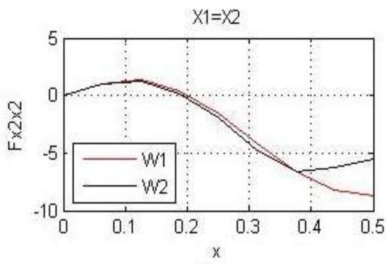
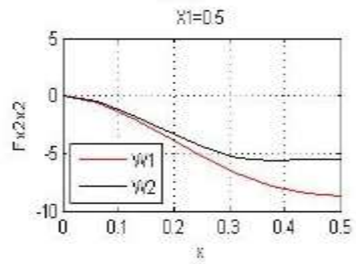
В табл. 2 приведены графики значений $F_{x_2x_2}$ для нагрузок $q_0 = 50$ (первый раз начинают развиваться хаотические колебания), $q_0 = 80$ (двухчастотные колебания), $q_0 = 98$ (колебания начинают переходить в хаотические) и $q_0 = 100$ (колебания, всё более переходящие в хаотические). Распределение нормальных усилий и изгибающих моментов приводится в точках, лежащих на вышеуказанных осях симметрии в том же порядке, только теперь данные, соответствующие первой указанной нагрузке, помечены цифрой 1, второй – цифрой 2.

ISSN 2541-9269

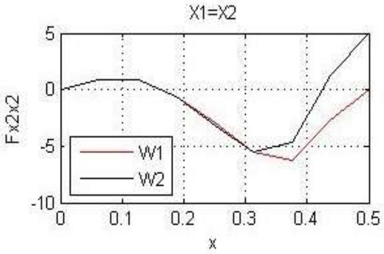
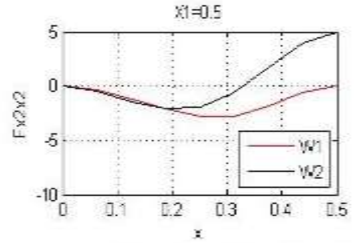
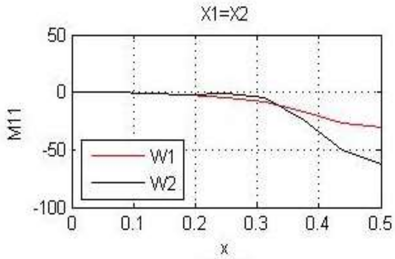
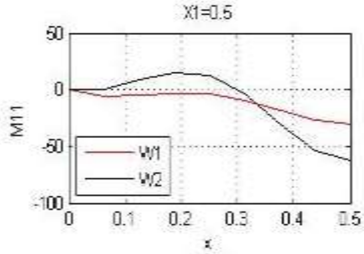
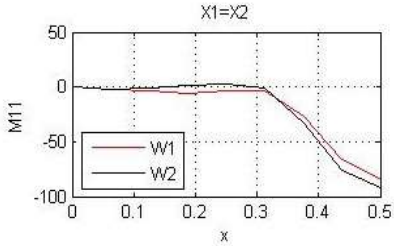
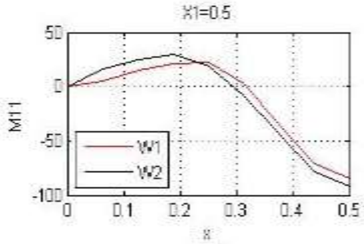
НДС оболочки при воздействии вынуждающей нагрузки с частотой $\omega = 32$ Таблица 2

q_0	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности
50			
80			

Продолжение таблицы 2

98			
100			
$F_{x_2 x_2}$ $q_1 = 50,\ q_2 = 80$			

ISSN 2541-9269

$F_{x_2x_2}$ $q_1 = 98,\ q_2 = 100$		
M_{11} $q_1 = 50,\ q_2 = 80$		
M_{11} $q_1 = 98,\ q_2 = 100$		

Как отмечалось в [4], при упрощении формы колебаний меняется их амплитуда. Так, при $q_0 = 80$ максимальные прогибы в центре оболочки ($w = 2.8$) меньше, чем, например, при $q_0 = 60$ ($w = 3.4$). Но это не влияет существенно на возникающие в оболочки нормальные усилия. Так, при изменении q_0 от 50 до 98 значения $F_{x_2x_2}$ находятся примерно в одном диапазоне значений от +1.5 до -7. И только при $q_0 = 100$, когда оболочка прохлопывает и прогибы в центре находятся в диапазоне от -2 до +7, значение $F_{x_2x_2}$ в центре значительно увеличивается, что вызвано тем, что при больших прогибах в центре возникают растягивающие нормальные усилия.

В табл.2 для тех же значений q_0 собраны графики, характеризующие возникающие в оболочке изгибающие моменты. Следует отметить, что диапазон изменения M_{11}, значительно больше, чем у $F_{x_2x_2}$, и форма колебаний влияет на M_{11}, также более значительно. При $q_0 = 50$ M_{11}, меняется по плану оболочки от 0 до -30, при $q_0 = 60$ от +30 до -75, при $q_0 = 100$ от +30 до -90. Как и для прогибов, при $q_0 = 80$ наблюдается уменьшение изгибающих моментов до диапазона от +15 до -60.

Аналогичные расчёты были проведены для оболочки с теми же физическими и геометрическими параметрами при частоте вынуждающей нагрузки $\omega = 24$. Следует отметить, что сценарий перехода от гармонических колебаний к хаотическим имел несколько иной вид, чем при $\omega = 32$. Полученные результаты приведены в табл. 3. До значения $q_0 = 46$ наблюдались

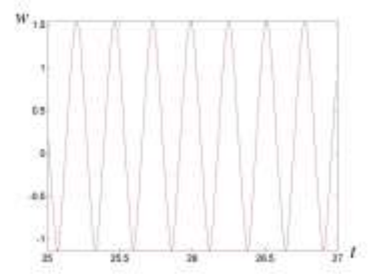
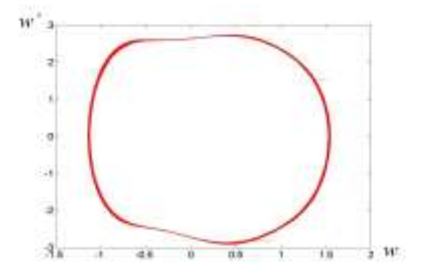
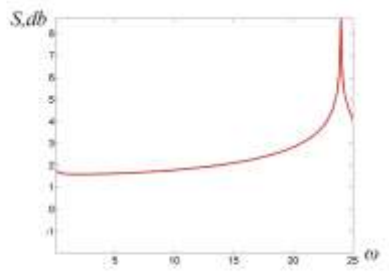
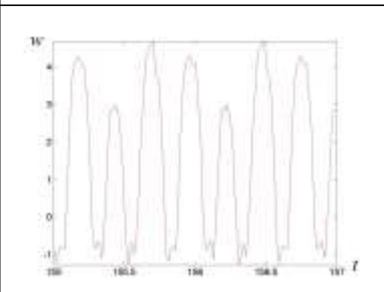
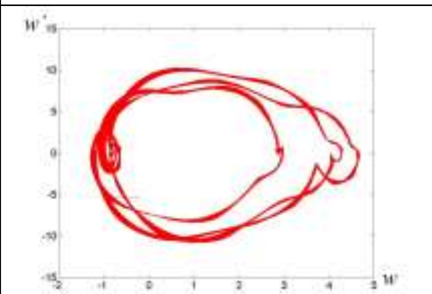
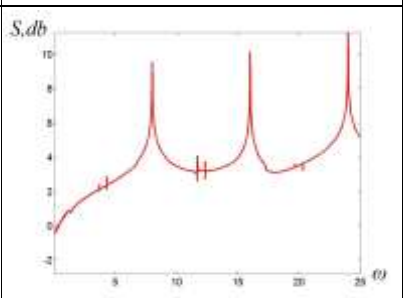
ISSN 2541-9269

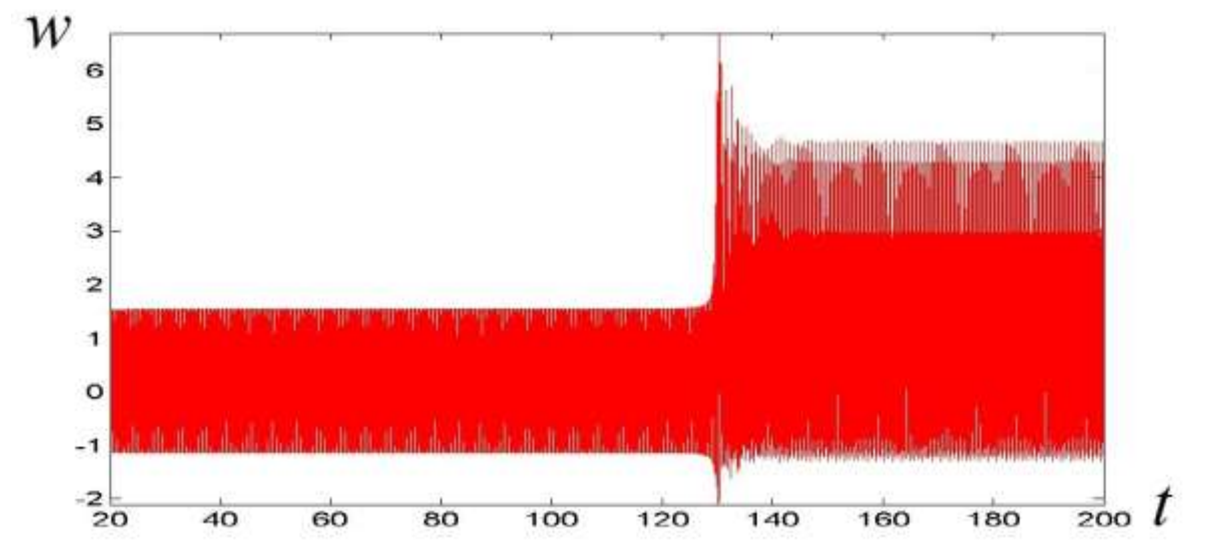
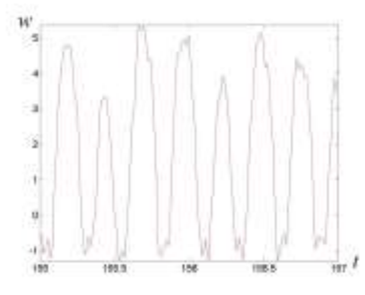
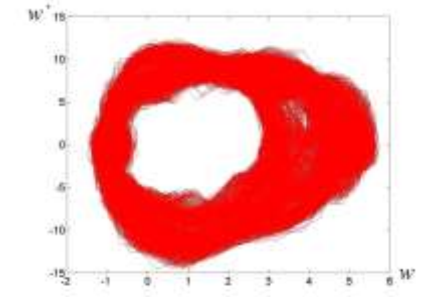
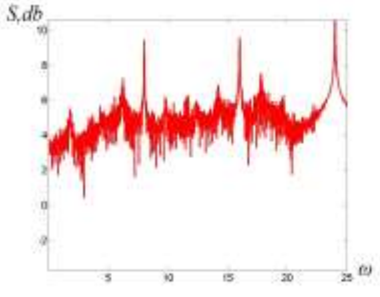
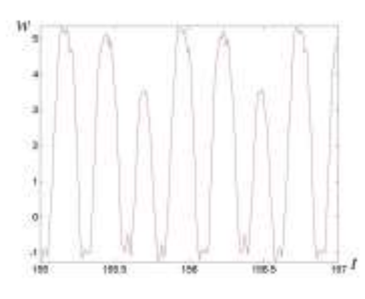
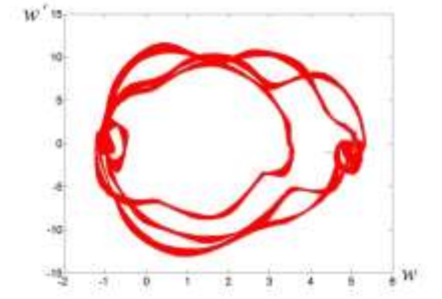
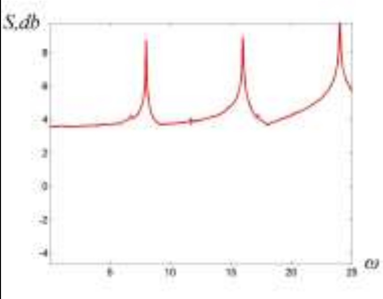
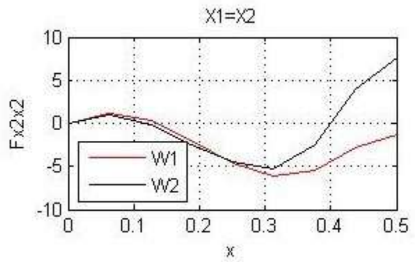
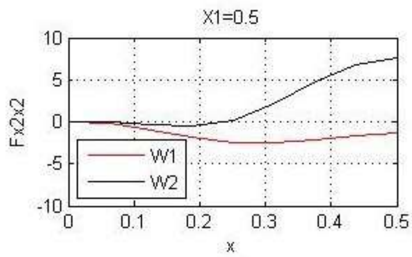
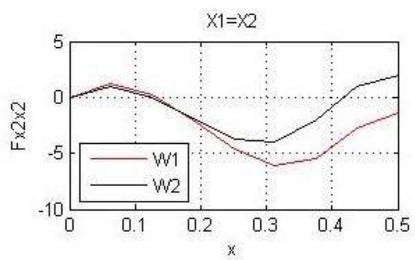
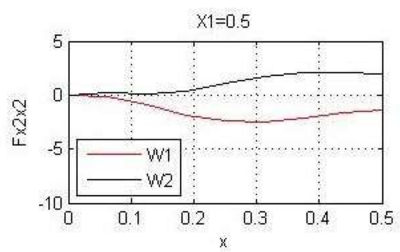
гармонические колебания, при $q_0 = 46{,}072$ осуществлялся переход к квазипериодическим колебаниям и при небольшом возрастании q_0 к хаотическим. В районе значения $q_0 = 70$ наблюдается очень узкий диапазон значений q_0, в котором колебания носили квазипериодический характер, при дальнейшем возрастании q_0 наступали необратимые хаотические колебания.

Интересно отметить, что в [5] и других работах, выполненных под руководством В.А. Крысько, неоднократно наблюдался переход от гармонических колебаний к более сложным формам с временным возвратом к начальным формам колебаний при одном значении q_0 в процессе перемежаемости форм колебаний в расчётах, проведённых для пластин, что соответствует сценарию Помо – Манневиля перехода к хаотическим колебаниям. В наших работах для пологих оболочек подобное явление никогда не наблюдалось. Но для $\omega = 24$ при $q_0 = 46{,}072$ наблюдался переход от гармонических колебаний с максимальными прогибами до $w = 1.6$ к очень кратковременному интервалу возмущённых колебаний с амплитудой до $w = 6.8$ и переход к дальнейшим квазипериодическим колебаниям с амплитудой до $w = 4.8$, что иллюстрируется результатами, приведёнными в табл.3. При $q_0 = 46{,}075$ и более высоких значениях q_0 подобный эффект уже не наблюдался. Авторы предполагают, что подобный эффект сопутствует динамической потере устойчивости оболочки и прохлопыванию оболочки.

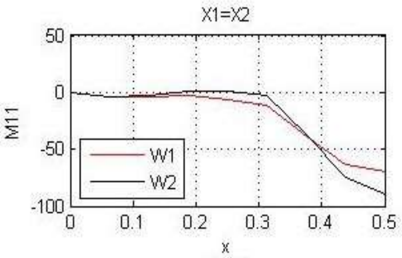
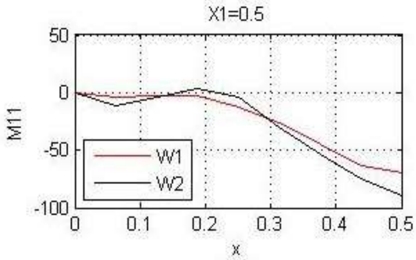
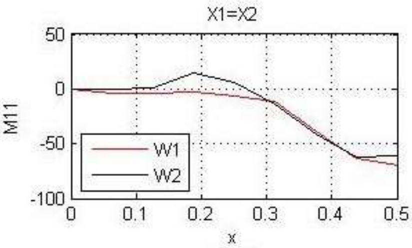
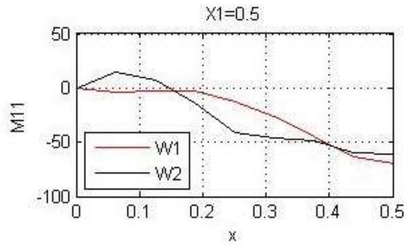
Рассматривая НДС оболочки при действии возбуждающей силы с частотой $\omega = 24$ следует отметить, что наблюдается такое же влияние формы колебаний на возникающие усилия и моменты, как и для частоты $\omega = 32$.

НДС оболочки при действии вынуждающей нагрузки с частотой $\omega = 24$ Таблица 3

q_0	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности
46.072 до перехода			
46.072 после перехода			

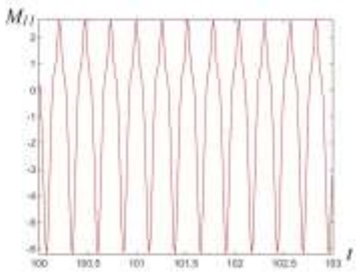
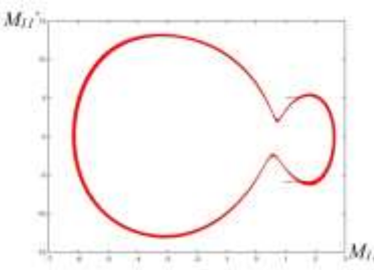
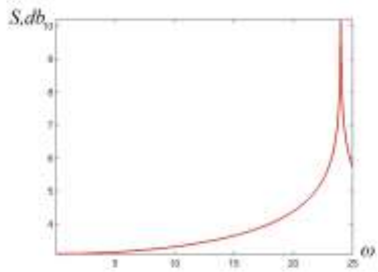
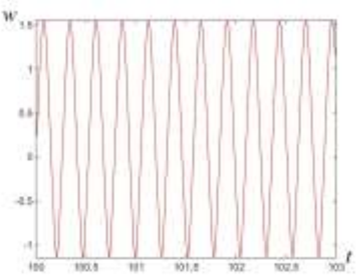
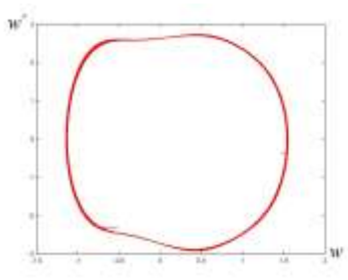
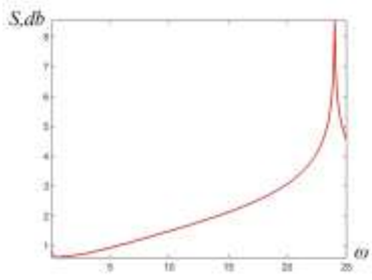
<table>
<tr><td>46.072</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td>65</td><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>70</td><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>$F_{x_2x_2}$
$q_1 = 46.072,$
$q_2 = 65$</td><td colspan="2">
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$F_{x_2x_2}$
$q_1 = 46.072,$
$q_2 = 70$</td><td colspan="2">
</td><td>
</td></tr>
</table>

ISSN 2541-9269

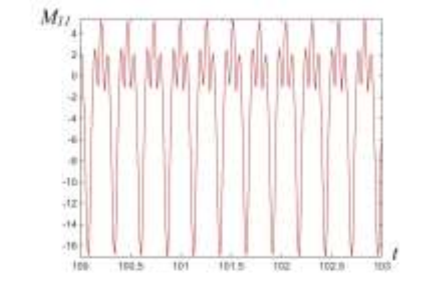
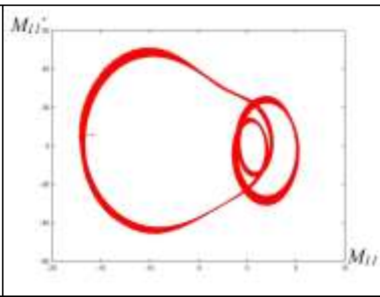
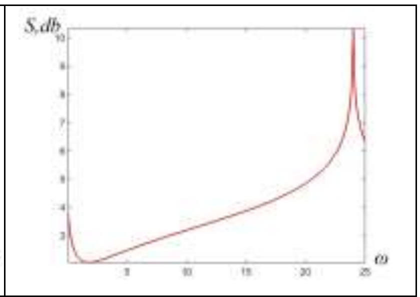
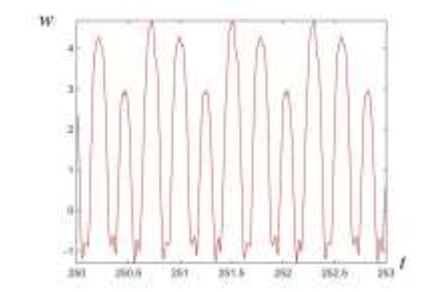
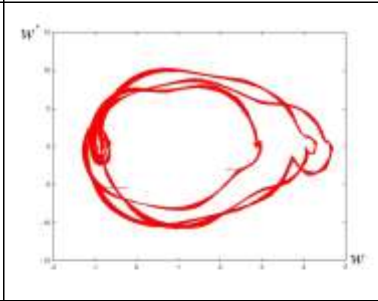
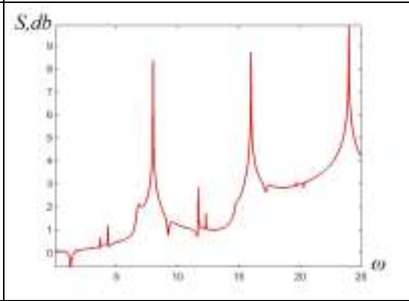
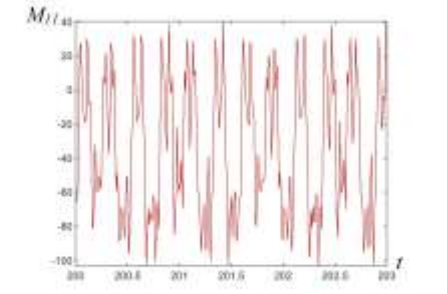
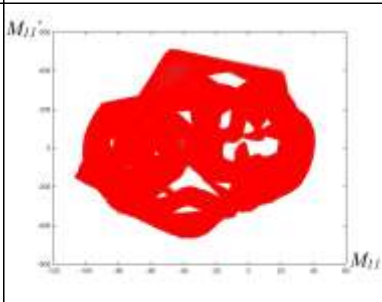
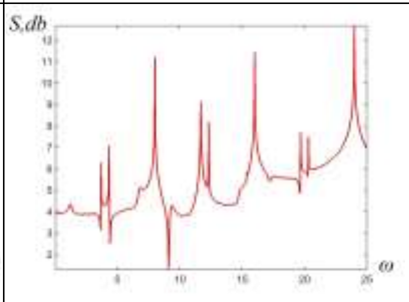
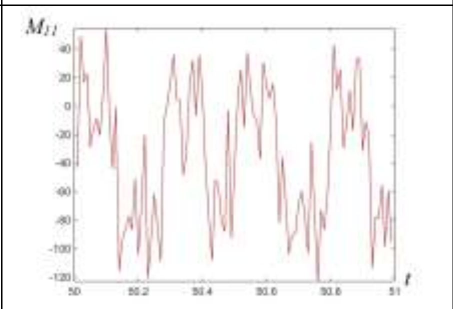
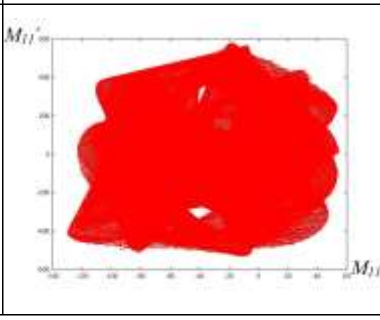
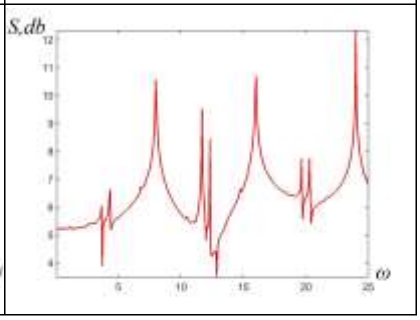
M_{11} $q_1 = 46.072,$ $q_2 = 65$		
M_{11} $q_1 = 46.072,$ $q_2 = 70$		

С целью более полного анализа НДС оболочки, возможно, было бы полезно рассмотреть не только формы колебаний конструкций, но и формы колебаний возникающих в конструкциях усилий и деформаций. Такому анализу можно подвергнуть зависимости от времени изгибающих моментов, интенсивностей деформаций и усилий. В качестве примера в табл. 4 приведены результаты анализа зависимостей прогиба $w(t)$ и изгибающего момента $M_{11}(t)$ для данной оболочки при воздействии вынуждающей нагрузки с частотой $\omega = 24$.

Анализ зависимости $M_{11}(t)$ Таблица 4

q_0	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности
40			
46.072 до перехода			

ISSN 2541-9269

			
46.072 после перехода			
			
70			

Отметим, что эффекта возращения от более сложных форм колебаний к более простым не наблюдается. Гармонические формы колебаний при действии критической нагрузки $q_0 = 46{,}072$ переходят в квазипериодические и затем совершается быстрый переход к хаотическим колебаниям. Для примера в табл.4 приведены для нагрузки $q_0 = 46{,}072$ рисунки, иллюстрирующие формы колебаний $w(t)$ и $M_{11}(t)$ на разных интервалах времени. Очевидно, что колебания $M_{11}(t)$ имеют более сложные формы, чем колебания $w(t)$.

Выводы. В рассмотренных задачах форма колебаний оболочки существенно влияет на характеристики НДС. Возникающие при квазипериодических колебаниях прогибы, усилия, изгибающие моменты могут быть значительно меньше таких же параметров при хаотических колебаниях, хотя последние осуществляются при значительно меньших значениях q_0.

Литература

1. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Nonclassical Thermoelastic Problems in Nonlinear Dynamics of Shells. Applications of the Bubnov-Galerkin and Finite Difference Numerical Methods // Springer, 2002. 438 p.
2. Kirichenko V.F., Awrejcewicz J., Kirichenko A.F., Krysko A.V.,. Krysko V. A. On the non-classical mathematical models of coupled problems of thermo-elasticity for multi-layer shallow shells with initial imperfections // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. vol.74. p. 51–72
3. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Sopenko A.A., Zhigalov M.V., Kirichenko A.V., Krysko A.V. Mathematical modelling of physically/geometrically non-linear micro-shells with account of coupling of temperature and deformation fields// Chaos, Solitons and Fractals. 2017. v.104. p. 635-654
4. Майорова О.А., Сопенко А.А., Тебякин А.Д. Математическое моделирование сложных колебаний нелинейной пологой оболочки в задаче связанной термоупругости // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2017. – № 2; С. 48-56. URL: mathmod.esrae.ru/12-39
5. Аврейцевич Я., Крылова Е.Ю., Папкова И.В., Яковлева Т.В., Крысько В.А. О памяти нелинейных дифференциальных систем в теории гибких пластин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. 2011. № 4-2. С. 21-23.