Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: **mathmod.esrae.ru/18-69**
Ссылка для цитирования этой статьи:
Захарчук Ю.В. Влияние сжимаемости заполнителя на перемещения в трёхслойной круговой симметричной пластине // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. №2

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ ЗАПОЛНИТЕЛЯ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ТРЁХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ПЛАСТИНЕ

Захарчук Ю.В.
Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь, Гомель, zakharchuk.julia2@mail.ru

INFLUENCE OF COMPRESSIBILITY OF FILLER ON DISPLACEMENTS IN THREE-LAYER CIRCULAR SYMMETRICAL PLATE

Zakharchuk Yu.V.
Belarusian state University of transport, Belarus, Gomel, zakharchuk.julia2@mail.ru

Аннотация. Исследован осесимметричный изгиб симметричной по толщине трёхслойной круговой пластины со сжимаемым заполнителем под действием распределенной поверхностной нагрузки. Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали. Заполнитель – лёгкий. Соответствующая краевая задача включает систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях и граничные условия. Получено ее общее аналитическое решение. Показаны численные результаты для случая изгиба пластины под действием равномерно распределённой нагрузки при жёстком закреплении её контура.

Ключевые слова: трёхслойная круговая пластина, перемещения, деформации, осесимметричный изгиб, сжимаемый заполнитель.

Abstract. Axisymmetric bending of a three-layer circular plate with a compressible filler symmetric in thickness under the action of a distributed surface load is investigated. To describe the kinematics of the pack are adopted the hypotheses of a broken normal. The filler is light. The corresponding boundary-value problem includes a system of differential equations of equilibrium in displacements and boundary conditions. Its general analytical solution is obtained. Numerical results are shown for the case of plate bending under the action of a uniformly distributed load with rigid fixing of its contour.

Keywords: three-layer circular plate, displacement, deformation, axisymmetric bending, compressible filler

Введение. Широкое применение в интенсивно развивающихся отраслях строительства и промышленности в наше время находят трехслойные элементы конструкций. Сочетание из двух несущих слоев и заполнителя обеспечивает надежную совместную работу системы в неблагоприятных условиях окружающей среды и позволяет создавать конструкции, имеющие высокую прочность и изгибную жесткость при относительно малой массе.

Вопросам расчета напряженно-деформированного состояния слоистых, в том числе трехслойных элементов конструкций, уделяется большое внимание, так как во многих случаях они являются составляющими сложных и ответственных сооружений. Постановки и методы решения соответствующих краевых задач отражены в многочисленных исследованиях.

Результаты, связанные с динамическим воздействием трехслойных элементов конструкций, в том числе опирающихся на упругое основание, геометрия и движение которых описывается с помощью тех или иных гипотез, изучены в работах [1–9].

Квазистатическое переменное нагружение трехслойных стержней и пластин рассмотрено в статьях [10–14]. Термосиловое деформирование исследовано в работах [14–20].

В статьях [21, 22] выведены уравнения равновесия упругой трехслойной круговой пластины со сжимаемым жестким заполнителем. Для решения предложен метод последовательных приближений.

Следует отметить, что исследования, посвященные изучению деформирования и колебаний трехслойных элементов конструкций, ранее проводились только в случаях несжимаемого заполнителя. Это не позволяет адекватно описать деформирование трехслойных элементов и объективно оценить их поведение под действием нагрузки. Поэтому здесь приведена постановка краевой задачи об изгибе трехслойной круговой пластины со сжимаемым легким заполнителем, получено ее общее аналитическое решение, численно исследован случай воздействия равномерно распределенной нагрузки при жёсткой заделке контура пластины.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача об осесимметричном изгибе упругой круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым заполнителем (рис. 1). Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат. Систему координат свяжем со срединной плоскостью заполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами h_1, h_2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в сжимаемом заполнителе нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$. Обжатие принимается линейным по толщине.

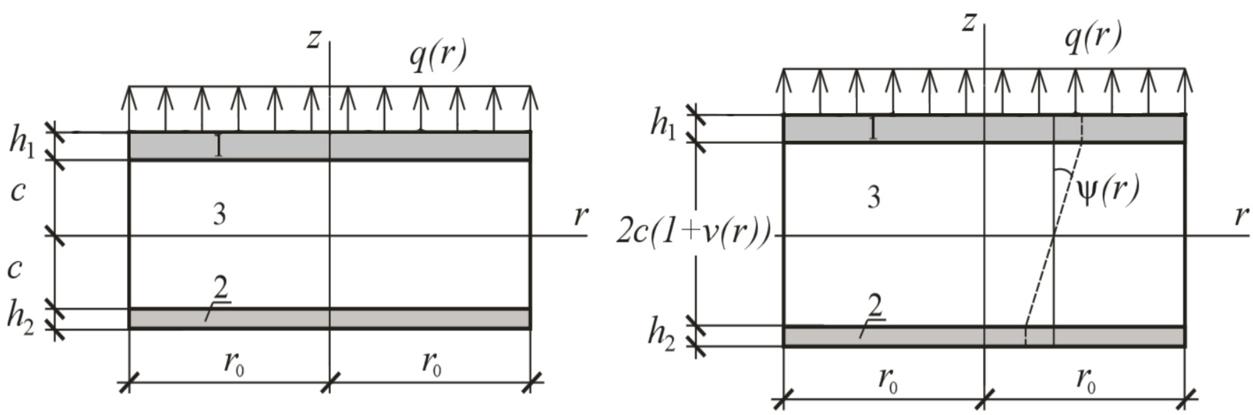

Рис.1.

На внешний слой пластины действует осесимметричная распределенная изгибающая нагрузка $q = q(r)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = r_0$). Через $w(r)$ обозначен прогиб нижнего несущего слоя, $u(r)$ – продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, $v(r)$ – функция, характеризующая сжимаемость заполнителя. Обозначим через h_k толщину k–го слоя (k = 1, 2, 3 – номер слоя), при этом $h_3 = 2c$.

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$ следующими соотношениями:

– в несущих слоях 1, 2

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z\left(w,_r + v,_r\right), \quad w^{(1)}\left(r,z\right) = w\left(r\right) + v\left(r\right), \quad \left(c \le z \le c + h_1\right),$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw,_r, \quad w^{(2)}\left(r,z\right) = w\left(r\right), \quad \left(-c - h_2 \le z \le -c\right),$$

– в заполнителе 3

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z\left[w,_r + \frac{v,_r}{2c}\left(z + c\right)\right],$$

$$w^{(3)}\left(r,z\right) = w\left(r\right) + \frac{v\left(r\right)}{2c}\left(z + c\right), \quad \left(-c \le z \le c\right), \tag{1}$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной поверхности заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим, используя (1) и соотношения Коши:

$$\varepsilon_r^{(1)} = u,_r + c\psi,_r - z\left(w,_{rr} + v,_{rr}\right), \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}\left(u + c\psi - z\left(w,_r + v,_r\right)\right), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0,$$

$$\left(c \le z \le c + h_1\right),$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = u,_r - c\psi,_r - zw,_{rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}\left(u - c\psi - zw,_r\right), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0, \quad \left(-c - h_2 \le z \le -c\right),$$

ISSN 2541-9269

$$\varepsilon_r^{(3)} = u,_r + z\psi,_r - z\left[w,_{rr} + \frac{v,_{rr}}{2c}(z+c)\right], \quad \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}\left\{u + z\psi - z\left[w,_r + \frac{v,_r}{2c}(z+c)\right]\right\},$$

$$\varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\psi - \frac{z}{2c}v,_r\right), \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c}, \quad (-c \le z \le c). \tag{2}$$

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} \,\mathrm{d}z, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^{3} M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z \,\mathrm{d}z,$$

$$S_\alpha^{(3)} = \int_{-c}^{c} \sigma_\alpha^{(3)} z^2 \,\mathrm{d}z, \quad H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c\left(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}\right), \quad D_\alpha = M_\alpha^{(1)} + \frac{1}{2}M_\alpha^{(3)} + \frac{1}{2c}S_\alpha^{(3)}, \tag{3}$$

где $\sigma_\alpha^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений, интегралы берутся по толщине k-го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем получим, используя вариационный принцип Лагранжа:

$\delta A = \delta W$,

где δA – суммарная вариация работы внешних сил δA_1 и контурных усилий δA_2; δW – вариация работы внутренних сил упругости.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки будет:

$$\delta A_1 = \iint_S q\delta w_1 r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \iint_S q(\delta w + \delta v) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi. \tag{4}$$

Вариация работы контурных усилий T_r^0, H_r^0, M_r^0, D_r^0:

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta\psi + M_r^0 \delta w,_r + D_r^0 \delta v,_r) \,\mathrm{d}\varphi. \tag{5}$$

Рассмотрим случай легкого заполнителя пластины. Это позволит пренебречь работой тангенциальных $\sigma_{rz}^{(3)}$ и напряжений обжатия $\sigma_z^{(3)}$ в выражении для вариации работы сил упругости.

Тогда вариация работы сил упругости будет:

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta\varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta\varepsilon_\varphi^{(k)}) \,\mathrm{d}z \right] r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi. \tag{6}$$

Здесь двойной интеграл распространен по всей срединной поверхности заполнителя S.

Вариации перемещений в слоях следуют из (1), деформаций – из (2). Рассмотрим суммарный интеграл по толщине слоёв, входящий в виртуальную работу сил упругости (6).

Для радиальных составляющих будет:

$$\int\limits_{h_1}\sigma_r^{(1)}\delta\varepsilon_r^{(1)}\,\mathrm{d}z=\int\limits_{h_1}\sigma_r^{(1)}\left[\delta u,_r+c\delta\psi,_r-z\left(\delta w,_{rr}+\delta v,_{rr}\right)\right]\mathrm{d}z=$$

$$=T_r^{(1)}\delta u,_r+cT_r^{(1)}\delta\psi,_r-M_r^{(1)}\delta w,_{rr}-M_r^{(1)}\delta v,_{rr},$$

$$\int\limits_{h_2}\sigma_r^{(2)}\delta\varepsilon_r^{(2)}\,\mathrm{d}z=\int\limits_{h_2}\sigma_r^{(2)}\left[\delta u,_r-c\delta\psi,_r-z\delta w,_{rr}\right]\mathrm{d}z=T_r^{(2)}\delta u,_r-cT_r^{(2)}\delta\psi,_r-M_r^{(2)}\delta w,_{rr},$$

$$\int\limits_{h_3}\sigma_r^{(3)}\delta\varepsilon_r^{(3)}\,\mathrm{d}z=\int\limits_{h_3}\sigma_r^{(3)}\left[\delta u,_r+z\delta\psi,_r-z\left[\delta w,_{rr}+\frac{\delta v,_{rr}}{2c}\left(z+c\right)\right]\right]\mathrm{d}z=$$

$$=T_r^{(3)}\delta u,_r+M_r^{(3)}\delta\psi,_r-M_r^{(3)}\delta w,_{rr}-\frac{1}{2c}S_r^{(3)}\delta v,_{rr}-\frac{1}{2}M_r^{(3)}\delta v,_{rr},$$

Аналогично получаем интегралы для тангенциальных составляющих. Просуммировав, получим:

$$\delta W=\iint\limits_S\Big\{T_r\delta u,_r+H_r\delta\psi,_r-M_r\delta w,_{rr}-D_r\delta v,_{rr}+$$

$$+\frac{1}{r}\left[T_\varphi\delta u+H_\varphi\delta\psi-M_\varphi\delta w,_r-D_\varphi\delta v,_r\right]\Big\}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi,\qquad(7)$$

где внутренние усилия T_α, M_α, H_α и D_α введены соотношениями (3).

Вариацию потенциальной энергии деформации проинтегрируем в полярной системе координат. Подынтегральное выражение в (7) можно разбить на два интеграла, вынося в первом из них операцию дифференцирования за общую скобку, а во втором – группируя слагаемые при одинаковых виртуальных перемещениях:

$$\delta W=\int\limits_0^{2\pi}\Big\{rT_r\delta u+rH_r\delta\psi+\left[(rM_r),_r-M_\varphi\right]\delta w+\left[(rD_r),_r-D_\varphi\right]\delta v-rM_r\delta w,_r-$$

$$-rD_r\delta v,_r\Big\}\mathrm{d}\varphi-\iint\limits_{r\,\varphi}\Big\{\left[(rT_r),_r-T_\varphi\right]\delta u+\left[(rH_r),_r-H_\varphi\right]\delta\psi+\left[(rM_r),_{rr}-M_\varphi,_r\right]\delta w+$$

$$+\left[(rD_r),_{rr}-D_\varphi,_r\right]\delta v\Big\}\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,.$$

Приравняем полученное выражение к работе внешних и контурных усилий (4), (5) и потребуем выполнение этого равенства при любых значениях варьируемых перемещений. Это возможно при равенстве нулю коэффициентов при независимых вариациях искомых функций. Отсюда следует система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круглой трехслойной пластинки с легким сжимаемым заполнителем:

ISSN 2541-9269

$$\begin{cases} T_r,_r + \dfrac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = 0, \\ H_r,_r + \dfrac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = 0, \\ M_r,_{rr} + \dfrac{1}{r}(2M_r,_r - M_\varphi,_r) = -q, \\ D_r,_{rr} + \dfrac{1}{r}\left(2D_r,_r - D_\varphi,_r\right) = -q. \end{cases} \tag{8}$$

На границе $r = r_0$ будут выполняться силовые условия:

$$T_r = T_r^0,\ H_r = H_r^0,\ M_r = M_r^0,\ M_r,_r + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = 0,$$

$$D_r = D_r^0,\ D_r,_r + \frac{1}{r}\left(D_r - \mathrm{D}_\varphi\right) = 0. \tag{9}$$

Выразим внутренние обобщенные усилия (3) через перемещения. Для этого напряжения в слоях рассматриваемой пластины представим через деформации с помощью закона Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} + \sigma^{(k)}\delta_{ij}, \tag{10}$$

где

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k Э_{ij}^{(k)},\quad Э_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - \varepsilon^{(k)}\delta_{ij},\quad \sigma^{(k)} = K_k\theta^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)},$$

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)} + \varepsilon_z^{(k)}),\quad (i, j = r, \varphi, z;\ k = 1, 2, 3).$$

Шаровая и девиаторная части тензора деформаций в (10) будут

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}),\quad Э_r^{(k)} = \varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)},$$

$$Э_\varphi^{(k)} = \varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(k)},\quad (k = 1, 2),$$

$$\varepsilon^{(3)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}),$$

$$Э_r^{(3)} = \varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)},$$

$$Э_\varphi^{(3)} = \varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}. \tag{11}$$

Компоненты тензора напряжений выражаются через деформации (11):

$$\sigma_r^{(k)} = 2G_k Э_r^{(k)} + 3K_k\varepsilon^{(k)}\delta_{ij} = 2G_k\left(\frac{2}{3}\varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)}\right) + 3K_k\frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) =$$

$$= \left(K_k + \frac{4}{3}G_k\right)\varepsilon_r^{(k)} + \left(K_k - \frac{2}{3}G_k\right)\varepsilon_\varphi^{(k)} = K_k^+\varepsilon_r^{(k)} + K_k^-\varepsilon_\varphi^{(k)},\quad (k = 1, 2),$$

$$\sigma_r^{(3)} = 2G_3\left(\frac{2}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}\right) + 3K_3\frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) =$$
$$= \left(K_3 + \frac{4}{3}G_3\right)\varepsilon_r^{(k)} + \left(K_3 - \frac{2}{3}G_3\right)\left(\varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}\right) = K_3^+\varepsilon_r^{(3)} + K_3^-\left(\varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}\right),$$
$$\sigma_\varphi^{(k)} = 2G_k\left(\frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(k)}\right) + 3K_k\frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) =$$
$$= \left(K_k + \frac{4}{3}G_k\right)\varepsilon_\varphi^{(k)} + \left(K_k - \frac{2}{3}G_k\right)\varepsilon_r^{(k)} = K_k^+\varepsilon_\varphi^{(k)} + K_k^-\varepsilon_r^{(k)},\ (k = 1,\,2),$$
$$\sigma_\varphi^{(3)} = 2G_3\left(\frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}\right) + 3K_3\frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) =$$
$$= \left(K_3 + \frac{4}{3}G_3\right)\varepsilon_\varphi^{(3)} + \left(K_3 - \frac{2}{3}G_3\right)\left(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}\right) = K_3^+\varepsilon_\varphi^{(3)} + K_3^-\left(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}\right), \qquad (12)$$

где введены обозначения

$$K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k.$$

Используя соотношения (10), (11), (12), выразим обобщенные внутренние усилия и моменты через искомые функции $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ и $v(r)$. Подставив их в систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях (8), получим в итоге систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую перемещения в трехслойной круговой не симметричной по толщине пластине с лёгким сжимаемым заполнителем:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}_2(a_1u + a_2\psi - a_3w,_r - a_4v,_r) + K_3^- v,_r = 0,\\
&\mathrm{L}_2(a_2u + a_5\psi - a_6w,_r - a_7v,_r) = 0,\\
&\mathrm{L}_3(a_3u + a_6\psi - a_8w,_r - a_9v,_r) = -q,\\
&\mathrm{L}_3(a_4u + a_7\psi - a_9w,_r - a_{10}v,_r) + \frac{c}{6}K_3^-\left(v,_{rr} + \frac{v,_r}{r}\right) = -q.
\end{aligned} \qquad (13)$$

Здесь коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2 (*оператор Бесселя*), L_3 определяются соотношениями:

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1K_1^+ - h_2K_2^+), \quad a_3 = h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right)K_1^+ - h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)K_2^+,$$
$$a_4 = h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right)K_1^+ + \frac{c^2}{3}K_3^+, \quad a_5 = c^2\left(h_1K_1^+ + h_2K_2^+\right) + \frac{2}{3}c^3K_3^+,$$
$$a_6 = c\left[h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right)K_1^+ + h_2\left(c + \frac{h_2}{2}\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2K_3^+\right], \quad a_7 = c\left[h_1\left(c + \frac{h_1}{2}\right)K_1^+ + \frac{c^2}{3}K_3^+\right],$$
$$a_8 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right)K_1^+ + h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3}\right)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3K_3^+,$$

ISSN 2541-9269

$$a_9 = h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right)K_1^+ + \frac{c^3}{3}K_3^+, \quad a_{10} = h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3}\right)K_1^+ + \frac{4}{15}c^3K_3^+,$$

$$\mathrm{L}_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r\right),_r \equiv g,_{rr} + \frac{g,_r}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$\mathrm{L}_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(rL_2(g)\right),_r \equiv g,_{rrr} + \frac{2g,_{rr}}{r} - \frac{g,_r}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \qquad (14)$$

В случае симметричной по толщине пластины при $h_1 = h_2, K_1 = K_2, G_1 = G_2$ коэффициенты $a_2 = a_3 = 0$ и система (13) принимает вид:

$$\mathrm{L}_2(a_1u - a_4v,_r) + K_3^- v,_r = 0,$$
$$\mathrm{L}_2(a_5\psi - a_6w,_r - a_7v,_r) = 0,$$
$$\mathrm{L}_3(a_6\psi - a_8w,_r - a_9v,_r) = -q, \qquad (15)$$
$$\mathrm{L}_3(a_4u + a_7\psi - a_9w,_r - a_{10}v,_r) + \frac{c}{6}K_3^-\left(v,_{rr} + \frac{v,_r}{r}\right) = -q$$

Краевая задача замыкается добавлением к (15) силовых (9) или кинематических граничных условий на контуре и требований ограниченности перемещений в центре пластины.

Таким образом, для описания деформирования круговых трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем введены четыре искомые функции. Выведены уравнения равновесия и граничные условия в усилиях и перемещениях для случая пластины с легким заполнителем.

2. Решение краевой задачи

Частично проинтегрировав систему (15), получим выражения перемещений через функцию сжимаемости *v*:

$$u = b_1v,_r + (b_2 + b_3)\mathrm{L}_3^{-1}(q) - \frac{r}{4}(2\ln r - 1)(b_2C_1 + b_3C_2) + C_5\frac{r}{2} + C_6\frac{1}{r},$$

$$\psi = -\frac{1}{a_6}\mathrm{L}_3^{-1}(q) + \frac{1}{a_6}(a_8w,_r + a_9v,_r) + \frac{C_1r}{4a_6}(2\ln r - 1) + C_3\frac{r}{2} + C_4\frac{1}{r},$$

$$w = -\frac{a_6a_7 - a_5a_9}{a_6^2 - a_5a_8}v - \frac{a_5}{\left(a_6^2 - a_5a_8\right)}\int \mathrm{L}_3^{-1}(q)\,\mathrm{d}r +$$

$$+\frac{C_1a_5}{\left(a_6^2 - a_5a_8\right)}\frac{r^2}{4}(\ln r - 1) + C_{10}\frac{r^2}{4} + C_{11}\ln r + C_{12}, \qquad (16)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12} – константы интегрирования; коэффициенты

$$b_1 = \frac{d_2d_6 - d_3d_5}{d_1d_6 - d_3d_4}, \quad b_2 = -\frac{d_3d_7}{d_1d_6 - d_3d_4}, \quad b_3 = \frac{d_3d_8}{d_1d_6 - d_3d_4},$$

$$d_1 = a_1a_6\left(a_6^2 - a_5a_8\right), \quad d_2 = a_4a_6\left(a_6^2 - a_5a_8\right), \quad d_3 = a_6\left(a_6^2 - a_5a_8\right)K_3^-,$$

$$d_4 = a_4 a_6 \left(a_6^2 - a_5 a_8\right), \quad d_5 = \left(a_6 a_{10} - a_7 a_9\right)\left(a_6^2 - a_5 a_8\right) - \left(a_6 a_7 - a_5 a_9\right)\left(a_6 a_9 - a_7 a_8\right),$$

$$d_6 = \frac{a_6 c}{6}\left(a_6^2 - a_5 a_8\right) K_3^-, \quad d_7 = a_7\left(a_6^2 - a_5 a_8\right) - a_5\left(a_6 a_9 - a_7 a_8\right), \quad d_8 = a_6\left(a_6^2 - a_5 a_8\right);$$

L_3^{-1} – линейный интегральный оператор, обратный дифференциальному оператору (14)

$$\mathrm{L}_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r}\int r \int \frac{1}{r}\int rf \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r.$$

Для функции сжимаемости получено следующее уравнение:

$$\mathrm{L}_2\left(v,_r\right) + \beta^2 v,_r = q_1, \tag{17}$$

где

$$\beta^2 = \frac{d_3 d_4 - d_1 d_6}{d_1 d_5 - d_2 d_4},$$

$$q_1 = \frac{1}{r}\left(\frac{d_1 d_8}{d_1 d_5 - d_2 d_4} - \frac{d_1 d_7}{d_1 d_5 - d_2 d_4}\right)\int qr\,\mathrm{d}r - \frac{1}{r}\left(-\frac{d_1 d_7}{d_1 d_5 - d_2 d_4}C_1 + \frac{d_1 d_8}{d_1 d_5 - d_2 d_4}C_2\right).$$

Введя замену

$$y = v,_r \tag{18}$$

приводим уравнение (17) к виду

$$\mathrm{L}_2\left(y\right) + \beta^2 y = q_1. \tag{19}$$

Уравнение (19) представляет собой неоднородное уравнение Бесселя:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r^2}y + \beta^2 y = q_1. \tag{20}$$

Рассмотрим процедуру решения полученного уравнения. Однородное уравнение, соответствующее уравнению (20), имеет вид

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}r^2} + r\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} + \left(r^2\beta^2 - 1\right)y = 0. \tag{21}$$

Его решение y_0 будет

$$y_0 = C_7 J_1(\beta r) + C_8 Y_1(\beta r), \tag{22}$$

где $J_1(\beta r)$ –*функция Бесселя* первого рода первого порядка; $Y_1(\beta r)$ – *функция Бесселя* второго рода первого порядка (*функция Неймана*).

Частное решение y_r уравнения (20) можно получить, используя два независимых решения однородного уравнения (21):

$$y_r = Y_1(\beta r)\int \frac{J_1(\beta r) q_1(r)}{W}\mathrm{d}r - J_1(\beta r)\int \frac{Y_1(\beta r) q_1(r)}{W}\mathrm{d}r,$$

где W – *определитель Вронского*, который в данном случае

$$W\left\{J_1, Y_1\right\} = Y_1,_r J_1 - J_1,_r Y_1 = \frac{2}{\pi r}.$$

В результате частное решение получим в виде:

ISSN 2541-9269

$$y_r = \frac{\pi}{2}\left(Y_1(\beta r)\int J_1(\beta r)q_1(r)r\,\mathrm{d}r - J_1(\beta r)\int Y_1(\beta r)q_1(r)r\,\mathrm{d}r\right). \tag{23}$$

Искомое решение уравнения (19) выпишем в виде суммы общего решения однородного уравнения (22) и частного решения (23):

$$y = C_7 J_1(\beta r) + C_8 Y_1(\beta r) +$$
$$+\frac{\pi}{2}\left(Y_1(\beta r)\int J_1(\beta r)q_1(r)r\,\mathrm{d}r - J_1(\beta r)\int Y_1(\beta r)q_1(r)r\,\mathrm{d}r\right).$$

Проведя замену обратную (18) и проинтегрировав, получим выражение для функции сжатия

$$v = -\frac{C_7}{\beta}J_0(\beta r) - \frac{C_8}{\beta}Y_0(\beta r) + \frac{\pi}{2}\Big(\int Y_1(\beta r)\int J_1(\beta r)q_1(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r -$$
$$-\int J_1(\beta r)\int Y_1(\beta r)q_1(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\Big) + C_9. \tag{24}$$

Таким образом, формулы (16), (24) описывают искомые перемещения в круговой симметричной пластине с легким сжимаемым заполнителем.

Для сплошных круглых пластин, исходя из условия ограниченности решения в начале координат, следует положить
$C_1 = C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = C_{11} = 0$.
В этом случае решение принимает вид

$$\psi = -\frac{1}{a_6}\mathrm{L}_3^{-1}(q) + \frac{1}{a_6}(a_8 w,_r + a_9 v,_r) + C_3\frac{r}{2},$$

$$w = -\frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8}v - \frac{a_5}{\left(a_6^2 - a_5 a_8\right)}\int \mathrm{L}_3^{-1}(q)\,\mathrm{d}r + C_{10}\frac{r^2}{4} + C_{12},$$

$$u = b_1 v,_r + (b_2 + b_3)\mathrm{L}_3^{-1}(q) + C_5\frac{r}{2},$$

$$v = -\frac{C_7}{\beta}J_0(\beta r) + \frac{\pi}{2}\Big(\int Y_1(\beta r)\int J_1(\beta r)q_1(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r -$$
$$-\int J_1(\beta r)\int Y_1(\beta r)q_1(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\Big) + C_9, \tag{25}$$

где

$$q_1 = \frac{1}{r}\left(\frac{d_1 d_8}{d_1 d_5 - d_2 d_4} - \frac{d_1 d_7}{d_1 d_5 - d_2 d_4}\right)\int q r\,\mathrm{d}r.$$

3. Изгиб под действием равномерно распределенной нагрузки

Пусть на рассматриваемую пластину действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q_0 = const$.

В связи с ограниченностью предполагаемого решения в начале координат для сплошных пластин необходимо положить $C_1 = C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = C_{11} = 0$. Полученные ранее перемещения (25) примут вид:

$$v=-\frac{C_7}{\beta}J_0(\beta r)+\frac{q_0 r}{2\beta^2}\left(\frac{d_1d_8}{d_1d_5-d_2d_4}-\frac{d_1d_7}{d_1d_5-d_2d_4}\right)+C_9,$$

$$\psi=-\frac{q_0r^3}{16a_6}+\frac{1}{a_6}(a_8w,_r+a_9v,_r)+C_3\frac{r}{2},$$

$$u=b_1v,_r+(b_2+b_3)\frac{q_0r^3}{16}+C_5\frac{r}{2},$$

$$w=-\frac{a_6a_7-a_5a_9}{a_6^2-a_5a_8}v-\frac{a_5}{64\left(a_6^2-a_5a_8\right)}q_0r^4+C_{10}\frac{r^2}{4}+C_{12}. \qquad (26)$$

Рассмотрим случай жесткой заделки контура пластины. Тогда при $r = r_0$ должны выполняться следующие условия:

$u=\psi=w=v=w,_r=v,_r=0$.

Подставив сюда решение (26), получим константы интегрирования:

$$C_3=\frac{q_0r_0^2}{8a_6},\quad C_5=-(b_2+b_3)\frac{q_0r_0^2}{8},\quad C_7=-\frac{q_0}{2\beta^2J_1(\beta r_0)}\left(-\frac{d_1d_7}{d_1d_5-d_2d_4}+\frac{d_1d_8}{d_1d_5-d_2d_4}\right),$$

$$C_9=\frac{C_7}{\beta}J_0(\beta r_0)-\frac{q_0r_0}{2\beta^2}\left(-\frac{d_1d_7}{d_1d_5-d_2d_4}+\frac{d_1d_8}{d_1d_5-d_2d_4}\right),\quad C_{10}=\frac{a_5}{8\left(a_6^2-a_5a_8\right)}q_0r_0^2,$$

$$C_{12}=\frac{a_5}{64\left(a_6^2-a_5a_8\right)}q_0r_0^4-C_{10}\frac{r_0^2}{4}. \qquad (27)$$

Таким образом, решение (26) с константами (27) описывает перемещения в трёхслойной круговой симметричной пластине с легким сжимаемым заполнителем в случае заделки её контура при равномерно распределенной нагрузке.

4. Численные результаты

Численный параметрический анализ проведен для защемлённой по контуру пластины единичного радиуса R=1 м, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт-4–Д16Т [20]. Принимались: величина интенсивности поверхностной нагрузки $q_0 = –0,5$ МПа. Линейные перемещения и геометрические параметры слоев пластины отнесены к ее радиусу, толщина заполнителя h_3=0,4 м.

На рис. 2 *а*, …, *г* показано изменение перемещений вдоль радиуса рассматриваемой пластины при различной толщине несущих слоев: *1* – h=0,02, *2* –h=0,03, *3* – h=0,04. Увеличение толщины слоев в 1,5 раза приводит к уменьшению максимального значения функции сжимаемости v на 52 %. При увеличении h в 2 раза начальный прогиб уменьшается на 77 %. Для прогиба нижнего несущего слоя w аналогичные показатели следующие: 76 % и 90 %. Радиальные перемещения заполнителя u изменяются соответственно на

50 % и 75 %. Относительный сдвиг в заполнителе будет уменьшаться на 70 % и 87 %.

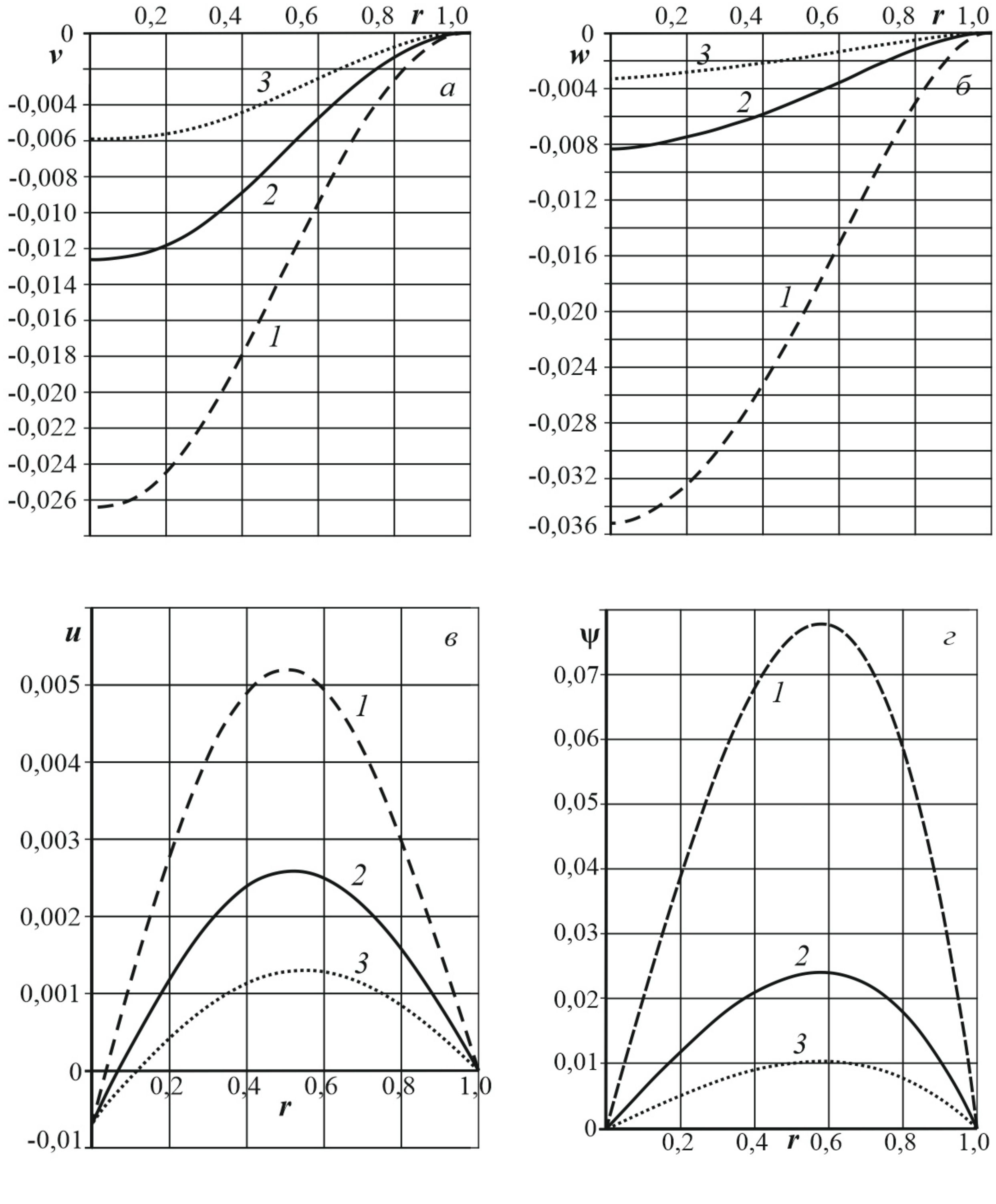

Рис. 2.

Выводы. Приведенная постановка и аналитическое решение краевой задачи могут быть использованы при исследовании напряженно-деформированного состояния круговой симметричной по толщине трехслойной пластины со сжимаемым легким заполнителем при любых осесимметричных граничных условиях, величинах нагрузки, материалах слоев. Численные результаты для рассмотренного случая показали, что максимальное значение функции сжимаемости заполнителя сопоставимо с прогибом нижнего слоя пластины.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда фундаментальных исследований РБ (проект № Т18Р-090).

Литература

1. Могилевич Л.И., Попов В.С., Старовойтов Э.И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56−63.
2. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Circular sandwich plates under local impulsive loads // International Applied Mechanics. 2003. Т. 39. № 8. P. 945–952.
3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 1. С. 45–52.
4. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Vibration of sandwich rod under local and impulsive forces // International Applied Mechanics. 2005. Vol. 41. N. 7 P. 809–816.
5. Starovoitov E.I., Kubenko V.D., Tarlakovskii D.V. Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation // Russian Aeronautics. 2009. Vol. 52. N 2. P. 151-157.
6. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation // International Applied Mechanics. 2011. Vol. 47, N. 5. P. 580–589.
7. Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation // Mechanics of Solids. 2012. Vol. 47, N. 1. P. 111–118.
8. Kuznetsova E.L., Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium // Mechanics of Solids. 2015. Vol. 50, N. 3. P. 359–366.
9. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем // Изв РАН. МТТ. 2000, № 6, С. 91–98.
10. Старовойтов, Э.И. О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек // Вестник МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. 1980. № 2. С. 92–96.
11. Москвитин В.В., Старовойтов Э.И. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин // Механика композит. материалов 1985. № 3. С. 409–416.

12. Москвитин В.В., Старовойтов Э.И. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 116–121.
13. Горшков, А.Г. Циклические нагружения упругопластических тел в нейтронном потоке / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая // Изв РАН, Механика твердого тела, 2001, № 1, 79–85.
14. Starovoitov, E.I. Variable thermal-force bending of a three-layer bar with a compressible filler / E. I. Starovoitov, D. V. Leonenko // Mechanics of Composite Materials. − 2017. – Vol. 53, no. 5. – Pp. 645–658. doi: 10.1007/s11029-017-9693-5.
15. Старовойтов Э.И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2012. № 3.С. 91–99.
16. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Bending of a Sandwich Beam by Local Loads in the Temperature Field [Изгиб трехслойной балки локальными нагрузками в температурном поле] // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 69–83. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-69-83.
17. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 4. С. 55–62.
18. Плескачевский, Ю.М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – Минск: Бел. навука. 2004. – 342 с.
19. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – № 1. С. 16–22.
20. Старовойтов, Э.И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов / Э. И. Старовойтов // Пробл. прочности. 1988. № 4. С. 11–15.
21. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – №4 (33). – С. 53–57.
22. Захарчук, Ю.В. Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем / Ю. В. Захарчук // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – Вып.10. – С. 55–66.