**Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/**
URL статьи: mathmod.esrae.ru/19-75
**Ссылка для цитирования этой статьи:**
Попова А.А. Математическая модель колебаний диска, имеющего упругую связь с жесткой восстанавливающей силой // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. №3

УДК 532.517.2:539.3

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ДИСКА, ИМЕЮЩЕГО УПРУГУЮ СВЯЗЬ С ЖЕСТКОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Попова А.А.[1]
[1]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, anay_p@bk.ru

# MATHEMATICAL MODEL OF SPRING-DISK SYSTEM WITH HARDENING RESTORING FORCE

Popova A.A.[1]
[1]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, anay_p@bk.ru

**Аннотация**. В работе представлена математическая модель для исследования колебаний жесткого диска, подвешенного на пружине с жесткой восстанавливающей силой. Диск является стенкой узкого канала, заполненного вязкой жидкостью. Вторая стенка канала неподвижна. Для пружинного подвеса выбрана модель с жесткой восстанавливающей силой, имеющей кубическую нелинейность. Для рассматриваемой колебательной системы предложена математическая модель, включающая уравнения ползущего движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнения Дуффинга. Рассмотрена осесимметричная задача динамики слоя вязкой жидкости. В качестве граничных условий выбраны условия прилипания жидкости к стенкам канала и свободного истечения на торце. В результате решения уравнений динамики жидкости определено давление в слое жидкости и определен демпфирующий член уравнения Дуффинга.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, гидроупругость, вязкая жидкость, кубическая восстанавливающая сила, нелинейные колебания, уравнение Дуффинга

**Abstract.** The paper presents a mathematical model for investigation of hard disk non-linear oscillation. We assume hard disk attached to a nonlinear spring of hardening type and interacting with viscous liquid layer. The hard disc is a wall of a narrow channel filled with a viscous liquid. The opposite channel wall is a stationary disk, which is coaxial and parallel to the disk attached to the spring. Hardening restoring force model with cubic nonlinearity is chosen for the nonlinear spring. The mathematical model of considered oscillatory system consists of the creeping motion equations of viscous incompressible fluid and the Duffing equations. The axisymmetric dynamic problem of viscous liquid layer is considered. The non-slip conditions at the channel walls and free discharge at the channel edge are chosen as boundary ones. The liquid layer pressure is obtained and the damping term of the Duffing equation is determined on the base of liquid layer dynamics equations solution.

**Keywords:** mathematical modeling, hydroelasticity, viscous liquid, cubic restoring force, non-linear oscillations, Duffing equation

Математическое моделирование поведения аэрогидроупругих систем является современным направлением прикладной математики и имеет важное теоретическое и практическое значение [1-4]. В связи с этим актуальной является разработка новых математических моделей для исследования колебаний тел, взаимодействующих с жидкостью. Например, в [6] предложена модель вынужденных колебаний пластины, взаимодействующей с одной стороны с водой, и являющейся излучателем звуковых волн в жидкость. В [5] предложена модель для исследования вибраций пластины, взаимодействующей с окружающей ее идеальной несжимаемой жидкостью, имеющей свободную поверхность. В [7] разработана математическая модель колебаний гильзы двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением, на базе рассмотрения колебаний балки, взаимодействующей с идеальной жидкостью, и на базе данной модели предложена методика оценки кавитационного ресурса гильзы двигателя. Математическая модель хаотических колебаний праямоугольной пластины, находящейся в потоке идеальной несжимаемой жидкости, предложена в [8]. Вопросы построения и исследования математических моделей собственных колебаний пластин, контактирующих с идеальной жидкостью, находящейся в равновесии или движении рассмотрены в [9-12]. С другой стороны, при исследовании гидроупругих колебаний конструкций видится важным необходимость учета демпфирующих свойств жидкости, обусловленных ее вязкостью. Например, в [13,14] исследованы задачи колебаний балок, взаимодействующих со слоем вязкой жидкости, в плоской постановке, а в [15,16] рассмотрены аналогичные задачи для балки, окруженной вязкой жидкостью и находящейся в ее потоке. Исследования движения вязкой жидкости в щелевом и клиновидном каналах, имеющих упругоподатливые стенки, выполнены в [17-21]. Разработка математических моделей взаимодействия стенок щелевых каналов, образованных параллельными дисками или пластинами, с вязкой жидкостью, которая находится между ними, проведена в [22-33]. Вопросы построения моделей для исследования вынужденных колебаний цилиндрической оболочки, окруженной слоем вязкой жидкости рассмотрены в [34-40]. Моделирование взаимодействия ламинарного пульсирующего потока жидкости с цилиндрической оболочкой выполнено в [41, 42], аналогичная проблема для ребристой оболочки исследована в [43-45]. В [46-50] проведено математическое моделирование распространения нелинейных волн деформаций в цилиндрических оболочках, взаимодействующих с вязкой жидкостью. В [51-54] проведено математическое моделирование колебаний пластин, установленных на упругое основание и взаимодействующей с идеальной жидкостью. В [55-61] разработаны модели гидроупругости пластин, установленных на упругое основание Винклера или Пастернака, взаимодействующих со слоем вязкой жидкости, а в [62-64] – модели гидроупругих колебаний стенки кольцевого канала, заполненного вязкой жидкостью, и окруженного средой Винклера.

Однако, вне рамок указанных выше работ, остались вопросы разработки математической модели для исследования колебаний диска, имеющего упругий подвес с нелинейной восстанавливающей силой и взаимодействующего с тонким слоем сильновязкой жидкости.

Рассмотрим узкий канал образованный двумя жесткими дисками 1 и 2, условно представленный на рис.1. Диски соосны и параллельны друг другу. Радиусы дисков совпадают и равны $R$. В канале, между дисками, находится сильновязкая несжимаемая жидкость 3. В невозмущенном состоянии ширина канала $\delta_0 << R$. Будем рассматривать далее осесимметричную задачу. Свяжем цилиндрическую систему координат $Orz\varphi$ с центром неподвижного диска 2. Будем полагать, что по торцам канала, образованного дисками, жидкость свободно истекает в ту же жидкость, т.е. давление в торцевом сечении канала совпадает с давлением в окружающей жидкости. Закон изменения данного давления будем полагать заданным. Стенка 1 имеет упругий подвес с жесткой восстанавливающей силой. Полагаем, далее, что данная стенка может перемещаться только вдоль направления оси $z$ под действием заданного закона пульсации давления на торце канала. Стенка 2 считается неподвижной.

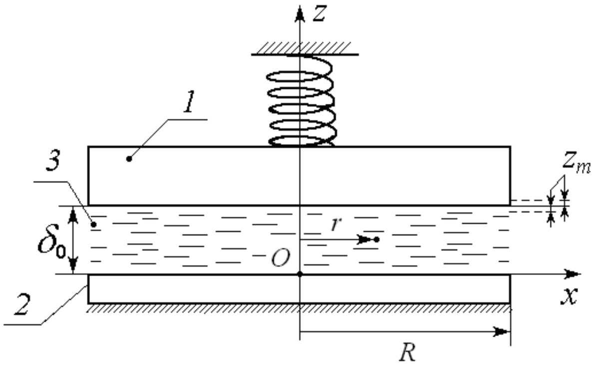


Рис. 1. Узкий канал образованный двумя дисками

Заданный закон пульсации давления по торцу канала представим в виде:

$$p_0 = p_m f_p(\omega t), \tag{1}$$

где $p_m$ – амплитуда пульсации давления, $\omega$ – частота, $t_0$ – характерное время.

В узком канале, образованном дисками, согласно [65] движение вязкой несжимаемой жидкости можно считать ползущим. В этом случае уравнения ее движения представляют собой уравнения Навье-Стока и уравнение неразрывности, записанные в виде:

**ISSN 2541-9269**

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=\nu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}-\frac{u_r}{r^2}\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}u_r+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0.$$

Здесь $u_r$, $u_z$ – компоненты вектора скорости слоя жидкости, $\rho$ – плотность жидкости, $\nu$ – кинематический коэффициент вязкости жидкости, $p$ – давление в слое жидкости.

Уравнения (2) дополняются краевыми условиями – условия прилипания жидкости к стенкам канала

$$u_r=0,\ u_z=0 \text{ при } z=0, \qquad (3)$$

$$u_r=0,\ u_z=\frac{dz}{dt} \text{ при } z=\delta_0+z_m f(\omega t), \qquad (4)$$

условием совпадения давления на торце канала с давлением в окружающей жидкости

$$p=p_0 \text{ при } r=R, \qquad (5)$$

и условием ограниченности давления на оси симметрии

$$r\frac{\partial p}{\partial r}=0 \text{ при } r=0. \qquad (6)$$

Здесь $z_m f(\omega t)$ – закон движения диска 1.

Уравнения колебаний диска с упругим подвесом с жесткой восстанавливающей силой согласно [66] можно записать как

$$m\frac{d^2 z}{dt^2}+F=N,\ F=kz+\beta z^3, \qquad (7)$$

Здесь $m$ – масса диска, $F$ – нелинейная (жесткая) восстанавливающая сила, $k$ – коэффициент жесткости линейной составляющей восстанавливающей силы, β – коэффициент жесткости нелинейной составляющей восстанавливающей силы, $N$ – вынуждающая сила, обусловленная пульсацией давления в вязкой жидкости, заполняющей канал.

Вынуждающая сила $N$ определяется нормальным напряжением жидкости на диске и может быть представлена в виде

$$N=-b\int_{-\ell}^{\ell} q_{zz}dx,\quad q_{zz}=-p+2\rho\nu(\partial u_r/\partial r) \text{ при } z=0. \qquad (8)$$

Введем безразмерные переменные

$$\psi=\delta_0/R<<1,\ \lambda=z_m/\delta_0<<1,\ \tau=\omega t,\ \xi=r/R,\ \zeta=z/\delta_0; \qquad (9)$$

$$u_z=z_m\omega U_\zeta;\ u_r=z_m\omega U_\xi/\psi;\ p=p_0+p(\tau)+\rho\nu z_m\omega(\delta_0\psi^2)^{-1}P.$$

Здесь ψ, λ– параметры, характеризующие задачу.

**ISSN 2541-9269**

В безразмерных переменных (8) уравнения динамики жидкости в узком канале примут вид

$$\frac{\partial P}{\partial \xi}=\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}+\psi^2\left(\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi}-\frac{U_\xi}{\xi^2}\right),$$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta}=\psi^2\left[\psi^2\left(\frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2}\right], \qquad (10)$$

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi}+\frac{1}{\xi}U_\xi+\frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta}=0,$$

краевые условия (3)-(5) примут вид

$$U_\xi=0,\ U_\zeta=0 \text{ при } \zeta=0,\ \ U_\xi=0,\ U_\zeta=\frac{df}{d\tau} \text{ при } \zeta=1+\lambda f(\tau), \qquad (11)$$

$$P=0 \text{ при } \xi=1,\ \xi\frac{\partial P}{\partial \xi}=0 \text{ при } \xi=0,$$

а выражение для силы (6) запишется как

$$N=\frac{2\pi R^2\rho\nu z_m\omega}{\delta_0\psi^2}\int_0^1\left(P-2\psi^2\frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta}\right)\xi d\xi\,. \qquad (12)$$

Принимая во внимание, что $\psi << 1$ и $\lambda << 1$ уравнения (9) упрощаются и получаем следующую задачу динамики тонкого слоя вязкой жидкости между дисками:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi}=\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2},\ \ \frac{\partial P}{\partial \zeta}=0,\ \ \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi}+\frac{1}{\xi}U_\xi+\frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta}=0, \qquad (13)$$

с краевыми условиями

$$U_\xi=0,\ U_\zeta=0 \text{ при } \zeta=0;\ \ U_\xi=0,\ U_\zeta=\frac{df_2}{d\tau} \text{ при } \zeta=1; \qquad (14)$$

$$P=0 \text{ при } \xi=1,\ \ \xi\frac{\partial P}{\partial \xi}=0 \text{ при } \xi=0,$$

а выражение для силы (12) принимает вид

$$N=\frac{2\pi R^2\rho\nu z_m\omega}{\delta_0\psi^2}\int_0^1 P\xi d\xi\,. \qquad (15)$$

Решая задачу (13)-(14) определяем закон изменения безразмерного давления в слое жидкости между дисками

$$P = 3\left(\xi^2 - 1\right)\frac{df_2}{d\tau}. \tag{16}$$

Учитывая (16) в (15) находим выражение для силы, действующей на диск 1 со стороны слоя вязкой жидкости в канале, в размерном виде

$$N = \pi R^2 p_0 - \frac{3\pi R^2 \rho \nu}{2\delta_0 \psi^2}\frac{dz}{dt}. \tag{17}$$

В результате уравнение колебаний диска на упругом подвесе с жесткой восстанавливающей силой (6) принимает вид

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{3\pi R^2 \rho \nu}{2\delta_0 \psi^2}\frac{dz}{dt} + kz + \beta z^3 = \pi R^2 p_0. \tag{18}$$

Полученное в результате уравнение динамики диска (18) является уравнением Дуффинга с жесткой восстанавливающей силой и демпфированием, за счет вязких свойств слоя жидкости в канале. Данное уравнение описывает осциллятор с кубической нелинейностью и его исследование возможно численно или известными приближенными методами [66, 67]. Таким образом, получена математическая модель для исследования колебаний жесткого диска, подвешенного на пружине с жесткой восстанавливающей силой, и взаимодействующего со слоем вязкой несжимаемой жидкости.

## Литература

1. Морозов В.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В. Математическое моделирование сложных аэроупругих систем. М.: Физматлит. 1995. 736 с.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск. 2009.
3. Могилевич Л.И., Попов В.С. Прикладная гидроупругость в машино- и приборостроение. Саратов: Саратовский ГАУ. 2003. 156 с.
4. Могилевич Л.И., Попов В.С., Христофорова А.В. Математические вопросы гидроупругости трехслойных элементов конструкций. Саратов: Изд-во КУБиК. 2012. 123 с.
5. Chapman C.J., Sorokin S.V. The forced vibration of an elastic plate under significant fluid loading // Journal of Sound and Vibration. 281. (2005). P. 719-741. DOI: 10.1016/j.jsv.2004.02.013.
6. Haddara M.R., Cao S.A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates // Marine Structures. 1996. Vol. 9. No. 10. P. 913-933. DOI: 10.1016/0951-8339(96)00006-8.
7. Индейцев Д.А., Полипанов И.С., Соколов С.К. Расчет кавитационного ресурса втулки судовых двигателей // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. №4. С.59-64.

8. Аврамов К.В., Стрельникова Е.А. Хаотические колебания пластинок при их двустороннем взаимодействии с потоком движущейся жидкости // Прикладная механика. 2014. Т. 50. № 3. С. 86-93.
9. Ergin A., Ugurlu B. Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid // Journal of Fluids and Structures. 2003. Vol. 17. No.7. P. 927-939. DOI: 10.1016/S0889-9746(03)00050-1.
10. Kramer, M.R., Liu, Z., Young, Y.L. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water // Composite Structures. 2013. Vol. 95. P. 254-263. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.07.017
11. Kerboua Y., Lakis, A.A. Thomas M., Marcouiller L. Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid // Applied Mathematical Modelling. 2008. Vol. 32. No. 12. P. 2570-2586. DOI: 10.1016/j.apm.2007.09.004.
12. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Hydroelastic Stability of a Rectangular Plate Interacting with a Layer of Ideal Flowing Fluid // Fluid Dynamics. 2016. Vol. 51. No. 6. P. 821-833. DOI: 10.1134/S0015462816060132.
13. Önsay T. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system // Journal of Sound and Vibration. 1993. V. 163. No. 2. P. 231-259. DOI: 10.1006/jsvi.1993.1162.
14. Ageev R. V., Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A., Kondratov D. V. Mathematical Model of Pulsating Viscous Liquid Layer Movement in a Flat Channel with Elastically Fixed Wall // Applied Mathematical Sciences. 2014. Vol. 8. No. 159. P. 7899-7908. DOI: 10.12988/ams.2014.410795.
15. Faria Cassio T., Inman Daniel J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler-Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // Mechanical Systems and Signal Processing. 2014. Vol. 45. No. 2. P. 317-329. DOI: 10.1016/j.ymssp.2013.12.003.
16. Akcabay D.T., Young Y.L., Hydroelastic Response and Energy Harvesting Potential of Flexible Piezoelectric Beams in Viscous Flow // Physics of Fluids. 2012. Vol. 24. No. 5. DOI: 10.1063/1.4719704.
17. Агеев Р.В., Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия подвижных стенок плоского канала со сдавливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2009. Т. 4. № 1 (42). С. 7-13.
18. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78.
19. Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N. Mathematical modeling of elastically fixed wall longitudinal oscillations of wedge-shaped channel under foundation vibration // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2016. Vol. 12. No 4. C. 9-17.

20. Popov V.S., Popova A.A., Sokolova D.L. Mathematical modeling of longitudinal oscillations tapered narrow channel wall under pulsating pressure of highly viscous liquid // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10. No 53. C. 2627-2635.
21. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и поперечные колебания упругозакрепленной стенки клиновидного канала, установленного на вибрирующем основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 3. С. 28-36.
22. Могилевич Л.И., Попов В.С. Исследование взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости со стенками канала, образованного соосными вибрирующими дисками // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2011. № 3. С. 42-55.
23. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдавливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 4. С. 23-32.
24. Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С. 17-35. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.3.02.
25. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 3-11.
26. Могилевич Л.И., Попов В.С., Скородумов Е.С. Динамика сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости, взаимодействующего с упругой пластиной // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017.№ 1. С. 53-63.
27. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Скородумов Е.С. Математическое моделирование динамики взаимодействия слоя вязкой жидкости с упругим трехслойным статором и абсолютно твердым вибратором опоры // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 1. С. 16-23.
28. Агеев Р. В., Могилевич Л. И., Попов В. С., Попова А. А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78.
29. Попов В.С., Христофорова А.В. Гидроупругость демпфера с трехслойным упругим стержнем при наличии противодавления в слое жидкости // Наука и техника транспорта. 2008. № 1. С. 43-49.
30. Агеев Р.В., Попов В.С., Попова А.А. Математическая модель канала с вязкой жидкостью, образованного двумя пластинами, в условиях

вибрации // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. 2015. № 7. С. 134-136.
31. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Колебания круглых пластин, между которыми находится пульсирующий слой вязкой жидкости // Ресурсоэнергоэффективные технологии в строительном комплексе региона. 2015. № 5. С. 265-269.
32. Попов В.С., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование взаимодействия пульсирующего слоя вязкой жидкости с круглыми пластинами, между которыми он находится // Интернет-журнал Науковедение. 2017. Т. 9. № 3.
33. Kurzin V.B. Streamwise vibrations of a plate in a viscous fluid flow in a channel, induced by forced transverse vibrations of the plate // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2011. Vol. 52 (3). P. 459-463.
34. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2004. № 5. С. 179-190.
35. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Колебания гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением под действием ударных нагрузок со стороны поршневой группы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 100-106.
36. Епишкина И.Н., Могилевич Л.И., Попов В.С., Симдянкин А.А. Математическое моделирование вынужденных колебаний гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 4. С. 19-26.
37. Могилевич Л.И., Попов В.С., Чернов А.М. Колебания упругого цилиндра конечной длины, окружённого слоем вязкой несжимаемой жидкости // Математика. Механика. 2002. № 4. С. 196-200.
38. Могилевич Л.И., Попов В.С Динамика взаимодействия цилиндропоршневой группы двигателя внутреннего сгорания и слоя охлаждающей жидкости // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003. № 1. С. 79-88.
39. Попов В.С., Волов М.И. Колебания упругого цилиндра в слое вязкой жидкости при периодических ударных воздействиях на него // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. 2013. № 5 (55). С. 9-10.
40. Кондратов Д.В., Куликова С.А., Попов В.С., Старостин Д.Д. Динамика взаимодействия геометрически нелинейной оболочки с пульсирующим тонким слоем вязкой несжимаемой жидкости // Ресурсоэнергоэффективные технологии в строительном комплексе региона. 2015. № 5. С. 250-253.
41. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости

внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64-72.
42. Попов В.С. Исследование динамики взаимодействия пульсирующего ламинарного потока жидкости с упругой цилиндрической оболочкой // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2007. № 1 (33). С. 72-80.
43. Попов В.С., Попова А.А., Волов М.И. Математическое моделирование взаимодействия ламинарного пульсирующего потока с цилиндрической ребристой оболочкой, по которой он движется // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2010. № 1 (36). С. 51-66.
44. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Математическое моделирование колебаний ребристой оболочки с пульсирующим потоком вязкой жидкости // Математические методы в технике и технологиях. ММТТ-25. 2012. С. 9-11.
45. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Попов В.С., Плаксина И.В. Задачи гидроупругости для трубы кольцевого сечения с упругой, геометрически нерегулярной внешней оболочкой при воздействии давления // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. № 3. С. 70-76.
46. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Моделирование колебаний и волн в цилиндрической оболочке с вязкой несжимаемой жидкостью внутри нее // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 13-19.
47. Блинкова А.Ю., Ковалева И.А., Могилевич Л.И., Попов В.С. Распространение волн деформации в двух упругих цилиндрических оболочках, между которыми находится вязкая жидкость // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 7-12.
48. Блинков Ю.А., Блинкова А.Ю., Попов В.С., Могилевич Л.И. Волны деформаций в вязкоупругой физически нелинейной цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость и окруженной упругой средой // Ресурсоэнергоэффективные технологии в строительном комплексе региона. 2015. № 5. С. 221-225.
49. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Нелинейные волны в геометрически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // Ресурсоэнергоэффективные технологии в строительном комплексе региона. 2015. № 5. С. 226-230.
50. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Волны в оболочке с конструкционным демпфированием, содержащей жидкость и окруженной упругой средой // Ресурсоэнергоэффективные технологии в строительном комплексе региона. 2014. № 4. С. 205-209.

51. Alekseev V.V., Indeitsev D.A., Mochalova Yu.A. Resonant oscillations of an elastic membrane on the bottom of a tank containing a heavy liquid // Technical Physics. 1999. Vol. 44. No. 8, p. 903-907.
52. Hosseini-Hashemi, S., Karimi, M., Hossein Rokni, D.T. Hydroelastic vibration and buckling of rectangular Mindlin plates on Pasternak foundations under linearly varying in-plane loads // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2010. Vol. 30. No. 12. P. 1487-1499. DOI: 10.1016/j.soildyn.2010.06.019.
53. Kutlu A., Ugurlu B., Omurtag M.H., Ergin A. Dynamic response of Mindlin plates resting on arbitrarily orthotropic Pasternak foundation and partially in contact with fluid // Ocean Engineering. 2012. Vol. 42. P. 112-125. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2012.01.010.
54. Ugurlu, B., Kutlu, A., Ergin, A., Omurtag, M.H. Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent fluid // Journal of Sound and Vibration. 2008. Vol. 317 No.1-2. P. 308-328. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.03.022.
55. Kuznetsova E.L., Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N. Mathematical model of the plate on elastic foundation interacting with pulsating viscous liquid layer // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10. No 23. P. 1101-1109. DOI: 10.12988/ams.2016.6242.
56. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. Vol. 46. No 1. P. 12-19. DOI:10.3103/S1052618817010113.
57. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Christoforova A.V. Mathematical modeling of highly viscous liquid dynamic interaction with walls of channel on elastic foundation // IEEE Conference 2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Omsk, 2016). DOI: 10.1109/Dynamics.2016.7819051.
58. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Christoforova A.V. Mathematical Modeling of Hydroelastic Walls Oscillations of the Channel on Winkler Foundation Under Vibrations // Vibroengineering PROCEDIA, Vol. 8, 2016, p.294-299.
59. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование динамики взаимодействия сильновязкой жидкости со стенками канала, установленного на упругом основании // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. Т. 3. № 1. С. 350-354.
60. Kondratov D.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Hydroelastic oscillations of a circular plate, resting on winkler foundation // Journal of Physics: Conference Series. 2018. 012057
61. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Christoforova A.V. Mathematical modeling of hydroelastic oscillations of the stamp and the plate, resting on Pasternak foundation // Journal of Physics: Conference Series. 2018. 012081.

62. Mogilevich L.I., Popov V.S. Mathematical modeling of incompressible viscous liquid layer interaction dynamics in an annular slit with its wall, surrounded by elastic medium // IEEE Conference 2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Omsk, 2016). DOI: 10.1109/Dynamics.2016.7819050.
63. Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическое моделирование динамики взаимодействия слоя вязкой жидкости в кольцевой щели со стенкой, окруженной упругой средой // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. Т. 3. № 1. С. 346-350.
64. Mogilevich L.I., Popov V.S., Kondratov D.V., Rabinskiy L.N. Bending oscillations of a cylinder, surrounded by an elastic medium and containing a viscous liquid and an oscillator//Journal of Vibroengineering. 2017. Vol. 19. Issue 8. P. 5758-5766.
65. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа. 2003. 840 с.
66. Магнус К. Колебания. М.: Мир. 1982. 304 с.
67. Мышкис А.Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2007. 688 с.