

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/19-77

Ссылка для цитирования этой статьи:

Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова Е.В. Моделирование волнового процесса в оболочке с жесткой нелинейностью // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. №3

Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00014а и гранта РФФИ № 18-01-00127а

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА В ОБОЛОЧКЕ С ЖЕСТКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Иванов С.В.¹, Могилевич Л.И.², Попов В.С.³, Попова Е.В.⁴

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, evilgraywolf@gmail.com

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, mogilevich@sgu.ru

³Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, vic_p@bk.ru

⁴Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, elizaveta.popova.97@bk.ru

SIMULATION OF A WAVE PROCESS IN A SHELL WITH HARDENING NONLINEARITY

Ivanov S.V.¹, Mogilevich L.I.², Popov V.S.³, Popova E.V.⁴

¹Saratov State University, Russia, Saratov, evilgraywolf@gmail.com

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, mogilevich@sgu.ru

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, vic_p@bk.ru

³Saratov State University, Russia, Saratov, elizaveta.popova.97@bk.ru

Аннотация. Исследование поведения волн деформации в упругих оболочках является важным направлением в современной волновой динамике. Вместе с тем, в литературе отсутствуют исследования влияния на волновой процесс в физически нелинейных упругих оболочках конструкционного демпфирования в продольном направлении, а также упругой окружающей среды. В настоящей работе исследуется учет влияния конструкционного демпфирования и окружающей среды на распространение нелинейных волн деформации, что требует компьютерного моделирования. В настоящей работе использован современный подход для построения разностных схем. Расчеты по полученным разностным схемам позволили сделать интерпретацию физических процессов.

Ключевые слова: нелинейные волны, упругие цилиндрические оболочки.

Abstract. Investigating deformation waves behavior in elastic shells presents a significant trend in contemporary wave dynamics. But there is a lack of sources devoted to investigating construction damping impact on longitudinal direction in physically non-linear elastic shells. The same concerns an elastic surrounding medium. The paper deals with investigating constructing damping a surrounding medium on deformation non-linear waves propagation, demanding computer modeling methods. The modern approach to constructing difference schemes is used in the present paper. The calculations of the obtained difference schemes allowed for interpretation of physical processes.

Keywords: non-linear waves, elastic cylinder shell.

Исследования распространения нелинейных волн в сплошных средах составляют одно из актуальных направлений современной волновой динамики [1-2]. Например, задачи о распространение нелинейных упругих волн в стержнях рассмотрены в [3], задача о распространение нелинейных волн деформации в цилиндрической оболочке, заполненной вязкой жидкостью рассмотрена в [4]. В работах [5-7] рассмотрены вопросы гидроупругих колебаний геометрически регулярных и нерегулярных цилиндрических оболочек с учетом демпфирования, обусловленного вязкостью жидкости. С другой стороны, в работах [8,9] рассмотрены задачи о распространение нелинейных волн деформации в цилиндрической оболочке, окруженной упругой средой. В предлагаемой работе рассматривается задача о распространение уединенных нелинейных волн деформации в оболочке с конструкционным демпфированием, окруженной упругой средой.

Деформационная теория пластичности А. А. Илюшина [10,11] связывает компоненты тензора напряжений σ_x , σ_Θ с компонентами тензора деформаций ε_x , ε_Θ и квадратом интенсивности деформаций ε_u [12,13].

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_x + \mu_0\varepsilon_\Theta)\left(1 + \frac{m}{E}\varepsilon_u^2\right); \quad \sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_\Theta + \mu_0\varepsilon_x)\left(1 + \frac{m}{E}\varepsilon_u^2\right); \quad (1)$$
$$\varepsilon_u^2 = \frac{4}{3}(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\Theta^2 - \varepsilon_x\varepsilon_\Theta)$$

Здесь E – модуль Юнга; m – константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие; μ_0 – коэффициент Пуассона материала оболочки.

Рассматривается осесимметричный случай цилиндрической оболочки толщиной h_0 и упругими перемещениями – продольным U и прогибом W , направленным к центру кривизны.

Введем малый параметр задачи $\varepsilon \ll 1$ и соотношения, характеризующие задачу. Полагаем

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1); \quad \frac{R}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right); \quad \frac{h_0}{R} = O(\varepsilon); \quad \frac{h_0}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right); \quad \frac{m}{E} = O(\varepsilon^{-1}); \quad (2)$$
$$\frac{w_m}{R} = O(\varepsilon); \quad \frac{w_m}{h_0} = O(1); \quad \frac{u_m}{\sqrt{h_0 R}} = O(1).$$

Здесь $l = \lambda = \frac{1}{k}$ - длина волны, волновое число k - произвольная величина, R - радиус срединной поверхности оболочки, u_m - амплитуда продольного перемещения оболочки, w_m - амплитуда прогиба оболочки.

В этих переменных (1) и (2) уравнения динамики оболочки с конструкционным демпфированием и окруженной упругой средой Винклера принимают вид [14].

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l} \frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x^*} \left\langle \left[\frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} - \mu_0 \frac{w_m}{R} u_3 \right] \left\{ \frac{4m}{3E} \left[\left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{u_m}{l} \frac{w_m}{R} u_3 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \left(\frac{w_m}{R} \right)^2 u_3^2 \right] \right\} - \rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{l^2} u_m \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}} - \varepsilon_1 \rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{l^2} u_m \frac{\partial u_1}{\partial t^*} = 0; \right. \\ & \frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^2}{12l^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \left(\frac{w_m}{l^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^{*2}} \right) - \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x^*} \left\{ \frac{w_m}{l} \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \left[\frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \mu_0 \frac{w_m}{R} u_3 \right] \left[1 + \frac{4m}{3E} \left[\left(\frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{w_m}{R} u_3 \right)^2 - \frac{w_m}{l} \frac{u_m}{R} u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right] \right\} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{R} \left\{ \left[\mu_0 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} - \frac{w_m}{R} u_3 \right] \left[1 + \frac{4m}{3E} \left[\left(\frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{w_m}{R} u_3 \right)^2 - \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{w_m}{l} \frac{u_m}{R} u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right] \right] \right\} + w_m \rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{l^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^{*2}} + k_l \rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{R^2} w_m u_3 = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь c_0 - скорость звука, t^* - время, ρ_0 - плотность материала оболочки, ε_1 - коэффициент демпфирования в продольном направлении, k_l - коэффициент постели окружающей среды [15].

Введем независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*,$$

где c - безразмерная неизвестная скорость волны; τ - быстрое время. В этих переменных, получим уравнения [16]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m}{R} u_3 + \frac{4m}{3E} \left[\left(\frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right)^3 + (1 - \mu_0) \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{w_m}{R} u_3 \left(\frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{w_m}{R} u_3 \right) - \mu_0 \left(\frac{w_m}{R} \right)^3 u_3^3 \right] \right\rangle = \frac{u_m}{l} \left[c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon c \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \tau} \right] - \frac{u_m}{l} \varepsilon_1 \left[c \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \mu_0 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{w_m}{R} u_3 + \frac{4}{3} \frac{m}{E} \left(\mu_0 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{w_m}{R} u_3 \right) \left[\left(\frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{w_m}{R} \right)^2 u_3^2 + \right. \\ & \left. + \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{w_m}{R} u_3 \right] = \frac{R^2}{l^2} \frac{w_m}{R} \left[c^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon c \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi \partial \tau} \right] + \frac{w_m}{R} \frac{h_0}{R} k_1 u_3. \end{aligned}$$

Зависимые переменные представим в виде асимптотического разложения

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \dots \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и оставляя члены порядка ε получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \right\rangle &= c^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} \\ \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} &= 0 \end{aligned}$$

Из этой системы получаем

$$\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}, \quad c^2 = 1 - \mu_0^2 \quad (6)$$

Следовательно, u_{10} – остается произвольной функцией, а безразмерная скорость волны $c = (1 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}}$ и, следовательно, скорость волны равна $\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$ - скорости волны в стержне. Здесь

$$\xi = \frac{1}{l} \left(x - \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} t \right),$$

так как оболочка имеет бесконечную длину.

В следующем приближении ε^2 получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} u_{31} + \frac{4}{3} \frac{m}{E \varepsilon} \left[\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^3 + (1 - \mu_0) \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \right) - \mu_0 \left(\frac{w_m l}{u_m R} \right)^3 u_{30}^3 \right] \right\rangle &= -2c \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + c^2 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \xi^2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} c \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{31} + \frac{4}{3} \frac{m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \left(\mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \right) \left[\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{w_m l}{u_m R} \right)^2 u_{30}^2 + \right. \\ \left. + \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} u_{30} \right] &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{w_m l}{u_m R} c^2 \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial \xi^2} + k_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \end{aligned}$$

Подставим соотношение (6) в уравнения (7) и получим систему

$$\begin{aligned} \mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{31}}{\partial \xi} &= \frac{4}{3} \frac{m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0^2) (1 + \mu_0 + \\ &+ \mu_0^2) \beta \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - 2\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}, \\ \mu_0 \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{31} &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} (1 - \mu_0^2) \mu_0 \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} + k_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \mu_0 \frac{\partial u_{30}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (8)$$

Умножим обе части второго уравнения на μ_0 и продифференцируем по ξ . Оно примет вид

$$\mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{31}}{\partial \xi} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \mu_0^2 (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + k_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2}; \quad (9)$$

Левые части уравнения (8) и уравнения (9) совпали. Вычтем, почленно, из уравнения (9) первое уравнение системы (8) и получим разрешающее уравнение

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + 4 \frac{m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0^2) (1 + \mu_0 + \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \mu_0^2 (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + k_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0 \end{aligned}$$

Разделим обе части полученного уравнения на $2\sqrt{1 - \mu_0^2}$ и получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + 2 \frac{m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \sqrt{1 - \mu_0^2} (1 + \mu_0 + \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + k_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0 \end{aligned}$$

Полученное уравнение есть модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза (МКДВ) для $\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}$. Если, учитывая (2), положить

$$w_m = h, \quad u_m = \frac{hl}{R}, \quad \frac{R^2}{l^2} = \varepsilon,$$

то

$$\frac{m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 = \frac{m}{E \varepsilon} \frac{h^2}{R^2} = \frac{m}{E} \varepsilon = O(1)$$

и уравнение становится таким

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + 2\sqrt{1 - \mu_0^2} (1 + \mu_0 + \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} +$$

$$+ k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0.$$

Полагая

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = \varphi, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau,$$

получим модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза (МКДВ)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 6\varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} + s_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + s_0 \varphi = 0, \quad (10)$$

где $c_1 = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1 + \mu_0 + \mu_0^2}{3} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad c_2 = c_1 \frac{1}{3} \sqrt{1 - \mu_0^2} (1 + \mu_0 + \mu_0^2),$

при этом положено

$$s_0 = \frac{1}{c_2} \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}, \quad s_1 = \frac{c_1}{c_2} k_1 \frac{\mu_0^2}{\sqrt{1 - \mu_0^2}}.$$

При отсутствии продольного конструкционного демпфирования $s_0 = 0$ ($\varepsilon_1 = 0$) получаем уравнение МКДВ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 6\varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} + s_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0$$

Оно имеет точное решение в виде солитона

$$\varphi = \pm \frac{k}{ch(k[\eta - (k^2 + s_1)t])}. \quad (11)$$

Фазовая скорость положительная

$$\frac{\omega}{k} = k^2 + s_1.$$

Скорость волны сверхзвуковая

$$\sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \left(1 + 3\varepsilon \frac{k^2 + s_1}{(1 - \mu_0^2)(1 + \mu_0 + \mu_0^2)} \right).$$

Влияние постели - окружающей среды (s_1) увеличивает скорость волны.

Конструкционное демпфирование в продольном направлении ($s_0 > 0$) оказывает влияние на амплитуду волны. Это влияние исследуется с помощью численного решения уравнений МКДВ при $s_0 > 0$.

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + s_1 \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} + 2 \frac{(u_{j+1}^{3n+1} - u_{j-1}^{3n+1}) + (u_{j+1}^{3n} - u_{j-1}^{3n})}{4h} + \\ & + \frac{(u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)}{4h^3} + s_0 \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} = 0. \quad (12) \end{aligned}$$

Проведено численное исследование модели (10), (11) с помощью разностной схемы (12). Результаты приведены на рисунках ниже.

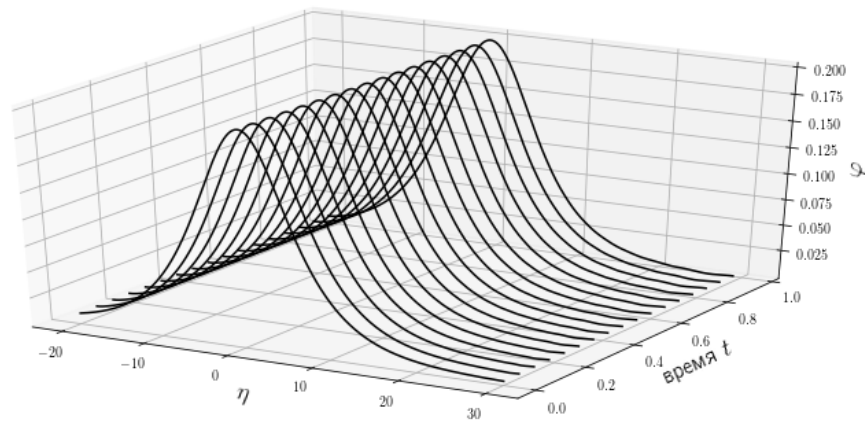


Рис. 1. Отсутствие влияния окружающей среды ($s_l=0$) и конструкционного демпфирования в продольном ($s_0=0$) направлении

При отсутствии влияния окружающей среды и конструкционного демпфирования в продольном направлении, скорость и амплитуда волны не меняется (рис. 1). Это означает что скорость движения сверхзвуковая.

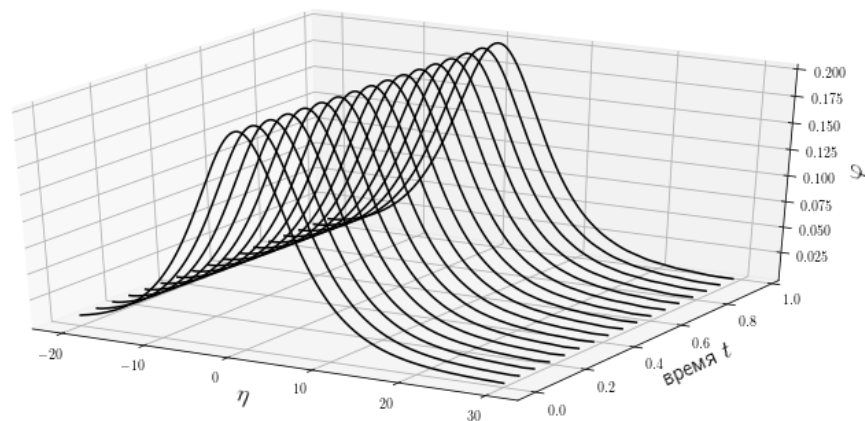


Рис. 2. Отсутствие конструкционного демпфирования в продольном ($s_0=0$) направлении при наличии влияния окружающей упругой среды ($s_l>0$)

При отсутствии конструкционного демпфирования в продольном направлении и наличии влияния окружающей упругой среды амплитуда волны не меняется. Движение происходит в положительном направлении (рис. 2). Это означает, что скорость движения увеличивается.

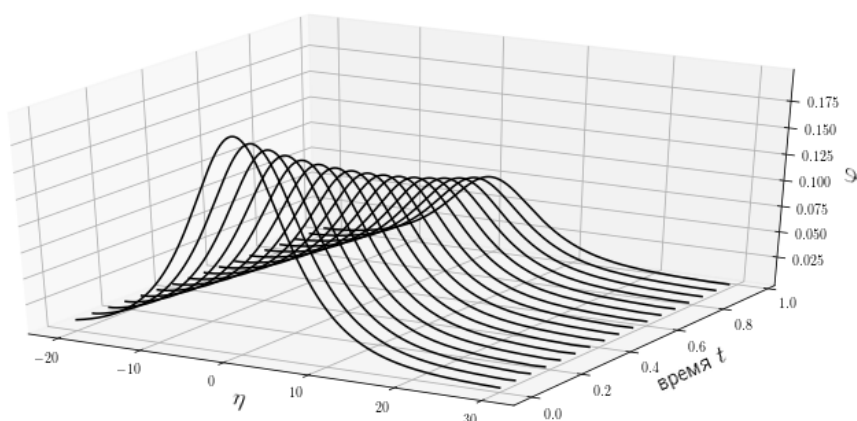


Рис. 3. Наличие влияния конструкционного демпфирования в продольном направлении ($s_2 > 0$) и окружающей упругой среды ($s_1 > 0$).

При влиянии конструкционного демпфирования в продольном направлении и наличии влияния окружающей упругой среды амплитуда волны падает. Движение происходит в положительном направлении, скорость движения увеличивается. (рис. 3).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00014а и гранта РФФИ №18-01-00127а.

Литература

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир. 1977.
2. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н. Волновые процессы в сплошных средах. Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2012.
3. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
4. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Моделирование колебаний и волн в цилиндрической оболочке с вязкой несжимаемой жидкостью внутри нее // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 13-19.
5. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Колебания гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением под действием ударных нагрузок со стороны поршневой группы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 100-106.
6. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64-72.

7. Попов В.С., Попова А.А., Волов М.И. Математическое моделирование взаимодействия ламинарного пульсирующего потока с цилиндрической ребристой оболочкой, по которой он движется // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2010. № 1 (36). С. 51-66.
8. Землянухин А.И., Бочкарев А.В., Могилевич Л.И. Уединенные продольно-изгибные волны в цилиндрической оболочке, взаимодействующей с нелинейно-упругой средой // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2018. № 1 (76). С. 47-60.
9. Бочкарев А.В., Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Уединенные волны в неоднородной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с упругой средой // Акустический журнал. 2017. Т. 63. № 2. С. 145-151.
10. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды.-М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
11. Овчаров А.А., Брылев И.С. Математическая модель деформирования нелинейно упругих подкрепленных конических оболочек при динамическом нагружении // Современные проблемы науки и образования. 2014. №3 URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/viewid=13235>
12. Каудерер К. Нелинейная механика. М., 1961. 778 с.
13. Фельдштейн В.А. Упругопластические деформации цилиндрической оболочки при продольном ударе // Волны в неупругих средах. Кишинев. 1970, С. 199-204.
14. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попова Е.В. Продольные волны в нелинейной осесимметричной цилиндрической оболочке // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. №2 URL: <http://mathmod.esrae.ru/18-68>
15. Власов В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. С. 490.
16. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек: учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры. М., 2018. 439 с.