

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/20-76

Ссылка для цитирования этой статьи:

Попов В.С., Попова Е.В., Черненко А.В. Математическое моделирование гидроупругого взаимодействия между вибрирующим штампом и трехслойной балкой, установленной на основании Винклера // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. №4

Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00127-а

УДК 532.517.2:539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОУПРУГОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ВИБРИРУЮЩИМ ШТАМПОМ И ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКОЙ, УСТАНОВЛЕННОЙ НА ОСНОВАНИЕ ВИНКЛЕРА

Попов В.С.¹, Попова Е.В.², Черненко А.В.³

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, vic_p@bk.ru

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, elizaveta.popova.97@bk.ru

³Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, 3chav@mail.ru

MATHEMATICAL MODELING OF HYDROELASTIC INTERACTION BETWEEN VIBRATING STAMP AND THREE-LAYERED BEAM RESTING ON WINKLER FOUNDATION

Popov V.S.¹, Popova E.V.², Chernenko A.V.³

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, vic_p@bk.ru

²Saratov State University, Russia, Saratov, elizaveta.popova.97@bk.ru

³Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, 3chav@mail.ru

Аннотация. В работе предложена математическая модель колебаний трехслойной балки, установленной на основании Винклера, и взаимодействующей с вибрирующим штампом через тонкий слой вязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрена трехслойная балка с несжимаемым легким заполнителем, для описания кинематики которой использована гипотеза ломаной нормали. Получено уравнение вынужденных гидроупругих колебаний трехслойной балки, установленной на основание Винклера, под воздействием, через слой вязкой жидкости, вибрирующего штампа. На основе решения плоской задачи гидроупругости найдены законы изменения прогиба трехслойной балки и давления в слое жидкости. Построены частотозависимые функции распределения амплитуд прогиба балки и давления жидкости вдоль канала. Показано, что данные функции позволяют определять резонансные частоты колебаний и исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойной балки, а также гидродинамические

параметры слоя вязкой жидкости.

Ключевые слова: гидроупругость, трехслойная балка, основание Винклера, вязкая жидкость, колебания, вибрационный штамп, вязкая жидкость

Abstract. The mathematical model of vibrations of a three-layered beam resting on Winkler foundation and interacting with a vibrating stamp through viscous incompressible liquid layer was carried out. The three-layered beam consists of two outer layers and incompressible lightweight filler between them. The three-layered beam kinematics is considered by means hypothesis of broken normal. The hydroelastic forced vibrations equation of three-layered beam resting on Winkler foundation and interacting with a vibrating stamp through viscous incompressible liquid layer was obtained. On the basis of plane hydroelasticity problem solution the laws of beam deflection and pressure in liquid layer are found. Frequency-dependent distribution functions of beam deflection amplitudes and fluid pressure along the channel are constructed. It is shown that these functions allow to define the resonant oscillation frequencies and to investigate the stress-strain state of three-layered beam, as well as, the hydrodynamic parameters of viscous liquid layer.

Keywords: hydroelasticity, three-layered beam, winkler foundation, viscous liquid, oscillations, vibrating stamp, viscous liquid

В настоящее время многослойные материалы и конструкции из них широко используются в аэрокосмической промышленности, машино- и приборостроении, строительстве и других отраслях. Поэтому задачи математического моделирования статического и динамического поведения трехслойных упругих балок и пластин являются важными как для практического использования, так и для теоретических целей. Например, в работах [1,2] проведен обзор различных подходов к анализу поведения многослойных элементов конструкций. В частности, в [1] рассматриваются различные теории для многослойных балок и пластин, а в [2] рассматривается подход к изучению трехслойных упругих элементов с несжимаемым наполнителем, основанный на гипотезе ломаной нормали, а также статические и динамические задачи трехслойных элементов конструкций со сжимаемым наполнителем при различных нагрузках.

Во многих практических случаях многослойные элементы конструкции опираются на упругий фундамент. Одно из первых исследований изгиба однородной балки на упругом основании было проведено в [3]. В работе рассмотрена модель основания Винклера. В [4] упругий фундамент изучается на основе одно - или двухслойной модели, свойства которой описываются двумя и более упругими характеристиками. В [5] рассмотрены современные аналитические и численные исследования взаимодействия однородных балок и пластин с упругим основанием.

В [6-9] рассмотрены задачи статики и динамики трехслойных балок и пластин, опирающихся на упругий фундамент под действием локальных и распределенных нагрузок различной природы. В частности, работа [6] посвящена изучению термосилового изгиба упругопластической трехслойной балки на основании Винклера. В [7] исследуются осесимметричные колебания упругой круговой трехслойной пластины с легким наполнителем, опирающейся

на упругое основание под действием локальных нагрузок. Для упругого основания используется модель Винклера. В [8] изучены осесимметричные поперечные колебания круглой трехслойной пластины, опирающейся на основание Винклера при термическом воздействии. В [9] исследована статическая и динамическая устойчивость несимметричной сэндвич-балки с вязкоупругой сердцевинкой, опирающейся на основание Пастернака под пульсирующей осевой нагрузкой и подвергающимся одномерному температурному градиенту.

С другой стороны, существует много практических приложений для задач взаимодействия однородных балок и пластин с жидкостью. Например, одно из первых исследований гидроупругости было проведено в [10], где рассмотрены осесимметричные свободные колебания круговой пластины, взаимодействующей с водой. Модель гидроупругого поведения трубопровода, заполненного транспортируемой жидкостью, на основе задачи взаимодействия балки с идеальной жидкостью рассмотрена в [11]. В [12] рассмотрена задача гидроупругости оболочки гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания на базе изучения вынужденных гидроупругих колебаний цилиндрической оболочки, окруженной слоем вязкой жидкости. Влияние кавитационного износа на оболочку-гильзу двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением выполнено в [13]. В [14] исследовано динамическое поведение кольцевого канала, образованного двумя упругими цилиндрическими оболочками, взаимодействующими со слоем идеальной жидкости между ними. Задачи гидроупругости для кольцевых каналов заполненных вязкой несжимаемой жидкостью рассмотрены в [15-19]. Исследованию динамики взаимодействия цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью внутри нее посвящены работы [20-23]. В частности, в [20] рассмотрен случай движения пульсирующего ламинарного потока по геометрически регулярной оболочке, а в [21,22] аналогичная задача для оболочки, имеющей внешние шпангоуты. В [23] исследована задача гидроупругости кольцевого канала, стенка которого образована оболочкой с односторонними шпангоутами, в условиях вибрации основания канала. Гидроупругие колебания круговой пластины, погруженной в идеальную несжимаемую жидкость, находящейся в жестком цилиндре, исследованы в [24]. В [25] рассмотрена устойчивость и динамическая задача гидроупругости пластины, входящей в состав границы, разделяющей области, заполненные вязкой несжимаемой жидкостью. В [26] проведено исследование колебаний бесконечной балки, покоящейся на слое вязкой жидкости. В [27] рассмотрены вынужденные колебания упруго закрепленной стенки канала, взаимодействующей со слоем вязкой жидкости. В [28] изучены изгибные колебания консольной балки, окруженной вязкой несжимаемой жидкостью. Аналогичная задача для балки, находящейся в потоке вязкой несжимаемой жидкости, рассмотрена в [29]. В [30-38] разработаны модели для исследования гидроупругих колебаний стенок каналов, заполненных жидкостью, с параллельными стенками. В частности, в работах [30,31] исследована

устойчивость и динамика пластин-стенок канала при взаимодействии с идеальной жидкостью, а в работах [32-38] исследованы задачи гидроупругости каналов с параллельными стенками, взаимодействующими с вязкой жидкостью. Задачи взаимодействия упруго закрепленной стенки с вязкой жидкостью в клиновидном канале исследованы в [39-41]. Задачи гидроупругости каналов, стенки которых подкреплены внешними ребрами жесткости, рассмотрены в [42,43].

В [44-47] рассмотрены гидроупругие колебания прямоугольных пластин, опирающихся на упругое основание Пастернака, и взаимодействующих с идеальной жидкостью. В работах [48-53] рассмотрены колебания прямоугольных пластин, опирающихся на основания Винклера, и взаимодействующих со слоем вязкой несжимаемой жидкости в плоской постановке. Аналогичные задачи для пластин, установленных на основание Пастернака, исследованы в [54-56]. Гидроупругие колебания круглых пластин, установленных на основание Винклера, в осесимметричной постановке рассмотрены в [57,58]. Вместе с тем, математическое моделирование динамического взаимодействия трехслойной пластины с жидкостью, также, представляет как теоретический, так и практический интерес. Например, в [59] исследованы свободные гидроупругие колебания композитных пластин, взаимодействующих с идеальной жидкостью. В работах [60-65] изучены колебания многослойных пластин, взаимодействующих с вязкой жидкостью. Однако, нет исследований динамического взаимодействия слоя вязкой жидкости и трехслойной балки, опирающейся на упругое основание. В настоящей работе проводится исследование гидроупругих колебаний трехслойной балки, установленной на основании Винклера, и взаимодействующей, через слой вязкой жидкости, с вибрирующим штампом.

Рассмотрим плоский узкий канал, заполненный вязкой несжимаемой жидкостью (см. рис. 1). Стенки канала параллельны друг другу, а длина канала 2ℓ . Верхняя стенка канала представляет собой жесткий вибрирующий штамп. Нижняя стенка канала представляет собой трехслойную балку, опирающуюся на основание Винклера. Трехслойная балка состоит из несущих слоев 1, 2 и несжимаемого легкого заполнителя 3. Толщины наружных пластин h_1 и h_2 , а толщина заполнителя $2c$. Для описания кинематики трехслойной балки принимаем гипотезу ломаной нормали согласно [2], т. е. полагаем, что при деформации для несущих слоев справедливы гипотезы Кирхгофа, а нормаль в заполнителе остается прямолинейной и не меняет своей длины, но поворачивается на угол φ . Следуя [2], будем считать, что на торцах балки находятся жесткие диафрагмы, препятствующие относительному смещению слоев, но не препятствующие деформации из своей плоскости.

Введем декартову систему координат Oxz . Ее центр расположен в центре заполнителя балки в невозмущенном состоянии. Колебания трехслойной балки вызваны воздействием вибрирующего штампа через слой жидкости, при этом

деформации балки считаются малыми. Трехслойная балка шарнирно оперта по краям. Толщина слоя жидкости $h_0 \ll \ell$. Торцевое истечение жидкости будем полагать свободным в такую же жидкость, находящуюся в достаточно больших торцевых полостях, т.е. считать, что давление жидкости на правом и левом торце канала постоянно p_0 и совпадает с давлением жидкости в торцевых полостях. Колебания штампа происходят вдоль оси Oz, их амплитуда z_m . Будем рассматривать далее плоскую задачу гидроупругости для стационарных гармонических колебаний, так как за счет вязкости слоя жидкости в канале происходит быстрое затухание переходных процессов [66]. Также следуя [67], при исследовании изгибных колебаний трехслойной балки даламберовы силы инерции в ней в продольном направлении будем исключать из рассмотрения.

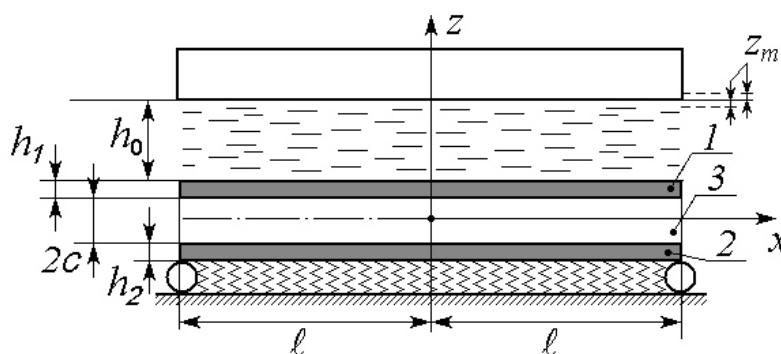


Рис. 1. Трехслойная балка, установленная на основание Винклера, и взаимодействующая с вибрирующим штампом через вязкую жидкость между ними.

Закон колебаний штампа представим в виде:

$$z(\omega t) = z_m f(\omega t), \quad f(\omega t) = \sin \omega t, \quad (1)$$

где z_m - амплитуда колебаний штампа; ω – частота колебаний.

Согласно [2] уравнения динамики трехслойной балки, опирающейся на основание Винклера, получены в виде:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_6 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - a_7 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= q_{zx}, \\ a_6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - a_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= 0, \\ a_7 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - a_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \kappa w - m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -q_{zz}, \end{aligned} \quad (2)$$

где используются следующие обозначения:

$$a_1 = K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + 2K_3^+ c,$$

$$a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + \frac{2}{3} K_3^+ c \right],$$

$$a_3 = c \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right],$$

$$a_4 = K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3,$$

$$a_6 = c (K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2),$$

$$a_7 = K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right),$$

$$K_j^+ = K_j + \frac{4}{3} G_j,$$

$$m_0 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + 2\rho_3 c.$$

Здесь $j = 1, 2, 3$ – номера слоев, G_j – модуль сдвига j -го слоя, K_j – модуль объемной упругости j -го слоя, ρ_j – плотность j -го слоя материала, u – продольные перемещения срединной поверхности трехслойной балки, w – прогиб срединной поверхности трехслойной балки, φ – угол поворота нормали в заполнителе трехслойной балки, κ – коэффициент постели упругого основания Винклера, q_{zz} – нормальное напряжение со стороны вязкой жидкости, q_{zx} – касательное напряжение со стороны вязкой жидкости.

Уравнения (2) дополняются граничными условиями

$$u = \varphi = w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = \pm \ell. \quad (3)$$

Принимая во внимание, что движение слоя вязкой жидкости в узком канале согласно [68] является ползучим, уравнения ее динамики представим в виде:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

где u_x, u_z – проекции скорости жидкости на координатные оси, ρ – плотность жидкости, ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости, p – давление.

Граничные условия уравнений (4) состоят из условий прилипания жидкости к стенкам канала и условий для давления на торцах:

$$u_x = 0, u_z = \frac{dz}{dt} \text{ при } z = h_0 + c + h_1, \quad (5)$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial t}, u_z = \frac{\partial w}{\partial t} \text{ при } z = w + c + h_1,$$

$$p = p_0 \text{ при } x = \pm \ell. \quad (6)$$

Введем в рассмотрение малые параметры

$$\lambda = \frac{z_m}{h_0} \ll 1, \psi = \frac{h_0}{\ell} \ll 1,$$

и безразмерные переменные

$$\zeta = \frac{z - c - h_1}{h_0}, \xi = \frac{x}{\ell}, \tau = \omega t, \quad (7)$$

$$w = w_m W(\xi, \tau), u = u_m U(\xi, \tau), \varphi = \varphi_m \Phi(\xi, \tau),$$

$$p = p_0 + \frac{\rho \nu z_m \omega}{h_0 \psi^2} P(\xi, \zeta, \tau), u_z = z_m \omega U_\zeta(\xi, \zeta, \tau), u_x = \frac{z_m \omega}{\psi} U_\xi(\xi, \zeta, \tau).$$

Принимая во внимание малые параметры и безразмерные переменные (7) уравнения (4) в безразмерных переменных, в нулевом приближении по ψ и λ примут вид:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0,$$

а граничные условия (7), (6) запишутся как:

$$U_\xi = 0, U_\zeta = \frac{df}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1, \quad (9)$$

$$U_{\xi} = 0, U_{\zeta} = \frac{w_m}{z_m} \frac{\partial W}{\partial \tau} \text{ при } \zeta = 0$$

$$P = 0 \text{ при } \xi = \pm 1. \quad (10)$$

Таким образом, согласно второго уравнения системы (8), давление не зависит от координаты ζ . Принимая это во внимание и решая уравнения (8) с граничными условиями (9), (10) получаем:

$$U_{\xi} = \frac{\zeta^2 - \zeta}{2} \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad (11)$$

$$U_{\zeta} = \frac{w_m}{z_m} \frac{\partial W}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \frac{3\zeta^2 - 2\zeta^3}{12},$$

$$P = 6(\xi^2 - 1) \frac{df}{d\tau} - 12 \frac{w_m}{z_m} \int_{-1}^{\xi} \int \frac{\partial W}{\partial \tau} d\xi d\xi + 6(\xi + 1) \frac{w_m}{z_m} \int_{-1}^1 \frac{\partial W}{\partial \tau} d\xi d\xi. \quad (12)$$

Нормальное и касательное напряжения со стороны слоя вязкой жидкости, действующие на трехслойную балку, в переменных (7) имеют вид:

$$q_{zz} = -p_0 - \frac{\rho \nu z_m \omega}{h_0 \psi^2} P \text{ при } \zeta = 0, \quad (13)$$

$$q_{zx} = \frac{\rho \nu z_m \omega}{h_0 \psi} \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \zeta} \text{ при } \zeta = 0. \quad (14)$$

Из (13), (14) следует, что $q_{zz} \gg q_{zx}$, т. е. касательным напряжением можно пренебречь по сравнению с нормальным. С учетом этого, уравнения динамики трехслойной балки (2) принимают вид:

$$a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_6 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - a_7 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0,$$

$$a_6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - a_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad (15)$$

$$a_7 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - a_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \kappa w - m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p_0 + \frac{\rho \nu z_m \omega}{h_0 \psi^2} P.$$

Рассматривая первое и второе уравнения (15), получаем, что:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = b_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad (16)$$

$$\text{где, } b_1 = \frac{a_2 a_7 - a_3 a_6}{a_1 a_2 - a_6^2}, b_2 = \frac{a_1 a_3 - a_7 a_6}{a_1 a_2 - a_6^2}.$$

Подставляя (16) и (12) в третье уравнение (15) получаем уравнение изгибных колебаний трехслойной балки, опирающейся на основание Винклера и взаимодействующей с вибрирующим штампом через слой вязкой жидкости:

$$D^* \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \kappa w + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \quad (17)$$

$$= -p_0 - \frac{\rho v z_m \omega}{h_0 \psi^2} \left(6(\xi^2 - 1) \frac{df}{d\tau} - 12 \frac{w_m}{z_m} \int_{-1}^{\xi} \int \frac{\partial W}{\partial \tau} d\xi d\xi + 6(\xi + 1) \frac{w_m}{z_m} \int_{-1}^1 \int \frac{\partial W}{\partial \tau} d\xi d\xi \right),$$

где $D^* = a_4 - a_7 b_1 - a_3 b_2$

Граничные условия для уравнения (17) имеют вид

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = \pm \ell. \quad (18)$$

Исходя из граничных условий (18) решение уравнения (17) представляется в виде:

$$w = w_m \sum_{k=1}^{\infty} (R_k^0 + R_k(\tau)) \cos\left(\frac{2k-1}{2} \pi \xi\right). \quad (19)$$

Здесь верхний индекс 0 означает решение, соответствующее статическому давлению p_0 .

Подставляя (7), (19) в (17) и раскладывая давление p_0 и $(\xi^2 - 1)$ в ряды по тригонометрическим функциям продольной координаты ξ , получим

$$\begin{aligned} & w_m \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D^*}{\ell^4} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2} \right)^4 + \kappa \right) (R_k^0 + R_k) \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi + \quad (20) \\ & + m_0 \omega^2 w_m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2 R_k}{d\tau^2} \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi + w_m \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^2 12 \frac{\rho v \omega}{h_0 \psi^2} \frac{dR_k}{d\tau} \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi = \\ & = p_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi} \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi - \\ & - z_m \sum_{k=1}^{\infty} 12 \frac{\rho v \omega}{h_0 \psi^2} \frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi} \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^2 \frac{df}{d\tau} \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi. \end{aligned}$$

Из (20), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения R_k^0

$$w_m \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D^*}{\ell^4} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2} \right)^4 + \kappa \right) R_k^0 \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi = p_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi} \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi$$

и систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $R_k(\tau)$

$$\begin{aligned} w_m \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D^*}{\ell^4} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2} \right)^4 + \kappa \right) R_k \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi + m_0 \omega^2 w_m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^2 R_k}{d\tau^2} \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi + \\ + w_m \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^2 12 \frac{\rho v \omega}{h_0 \psi^2} \frac{dR_k}{d\tau} \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi = \\ = -z_m \sum_{k=1}^{\infty} 12 \frac{\rho v \omega}{h_0 \psi^2} \frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi} \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^2 \frac{df}{d\tau} \cos \frac{2k-1}{2} \pi \xi. \end{aligned}$$

Проводя решение этих систем уравнений для режима установившихся гармонических колебаний, получено следующее выражение для прогиба трехслойной балки под действием вибрирующего штампа через слой вязкой жидкости

$$\begin{aligned} w = -p_0 \frac{2\ell^4}{D^*} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos((2k-1)\pi x / (2\ell)) \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^5}{1 + (\kappa/D^*)(2\ell/(2k-1)\pi)^4} \right] - \\ - z_m A(x, \omega) \sin(\tau + \varphi(x, \omega)), \end{aligned} \quad (21)$$

здесь введены обозначения:

$$A(x, \omega) = \sqrt{C^2 + B^2},$$

$$\varphi(x, \omega) = \text{arctg} \left(\frac{B}{C} \right),$$

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_k^z K_k^w \omega^2}{(D_k - m_0 \omega^2)^2 + (K_k^w \omega)^2} \cos \frac{2k-1}{2\ell} \pi x,$$

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_k^z \omega (D_k - m_0 \omega^2)}{(D_k - m_0 \omega^2)^2 + (K_k^w \omega)^2} \cos \frac{2k-1}{2\ell} \pi x,$$

$$D_k = \frac{D^*}{\ell^4} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2} \right)^4 + \kappa,$$
$$K_k^z = 12 \frac{\rho v}{h_0 \psi^2} \frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi} \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^2,$$
$$K_k^w = 12 \frac{\rho v}{h_0 \psi^2} \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right)^2.$$

Принимая во внимание (7) и подставляя (19) в (12), получено выражение для давления в слое жидкости между вибрирующим штампом и трехслойной балкой:

$$p = p_0 + z_m \Pi(x, \omega) \sin(\omega t + \varphi_p(x, \omega)), \quad (22)$$

здесь введены обозначения:

$$\Pi(x, \omega) = \sqrt{S^2 + Q^2},$$

$$\varphi_p(x, \omega) = \text{arctg} \left(\frac{Q}{S} \right),$$

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} K_k^z \omega \left(1 - \frac{(K_k^w \omega)^2}{(D_k - m_0 \omega^2)^2 + (K_k^w \omega)^2} \right) \cos \frac{2k-1}{2\ell} \pi x,$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_k^w K_k^z \omega^2 (D_k - m_0 \omega^2)}{(D_k - m_0 \omega^2)^2 + (K_k^w \omega)^2} \cos \frac{2k-1}{2\ell} \pi x.$$

Выражения для прогиба трехслойной балки (21) и давления жидкости (22) содержат функции $A(x, \omega)$ и $\Pi(x, \omega)$. Функция $A(x, \omega)$ представляет собой частотозависимую функцию распределения амплитуд прогиба трехслойной балки вдоль канала. Функция $\Pi(x, \omega)$ является частотозависимой функцией распределения амплитуд давления вдоль канала. При фиксированном значении продольной координаты, данные функции трансформируются в соответствующие амплитудные частотные характеристики для прогиба и давления в рассматриваемом сечении канала. Таким образом, исследование этих функций дает возможность изучать гидроупругие изгибные колебания трехслойной стенки канала, как балки опирающейся на основание Винклера, а также изменения пульсации давления вязкой несжимаемой жидкости, вызванное колебаниями стенок канала.

Для иллюстрации данной возможности приведем результаты расчета амплитудной частотной характеристики прогиба балки в центре канала ($x = 0$). Для этого рассмотрим канал со следующими параметрами: $l = 0,1\text{ м}$; $h_1 = 0,002\text{ м}$; $h_2 = 0,003\text{ м}$; $c = 0,005\text{ м}$; $\rho_1 = 2700\text{ кг/м}^3$; $\rho_2 = 2700\text{ кг/м}^3$; $\rho_3 = 2150\text{ кг/м}^3$; $\rho = 1840\text{ кг/м}^3$; $\nu = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$; $K_1 = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $K_2 = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $K_3 = 4,7 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $G_1 = 2,67 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $G_2 = 2,67 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $G_3 = 9 \cdot 10^7 \text{ Па}$.

При расчетах рассмотрен случай балки без учета влияния упругого основания ($\kappa = 0$), а также использованы три вида упругих оснований с различными коэффициентами постели: $\kappa = 25 \cdot 10^6 \text{ Па}$ (глинистые грунты пластичные), $\kappa = 8 \cdot 10^8 \text{ Па}$ (известняк), $\kappa = 2 \cdot 10^9 \text{ Па}$ (песчаник). Результаты расчетов $A(0, \omega)$ при удержании в решении одного члена ряда представлены на рис. 2, при удержании в решении двух членов ряда представлены на рис. 3, а при удержании в решении четырех членов ряда представлены на рис. 4.

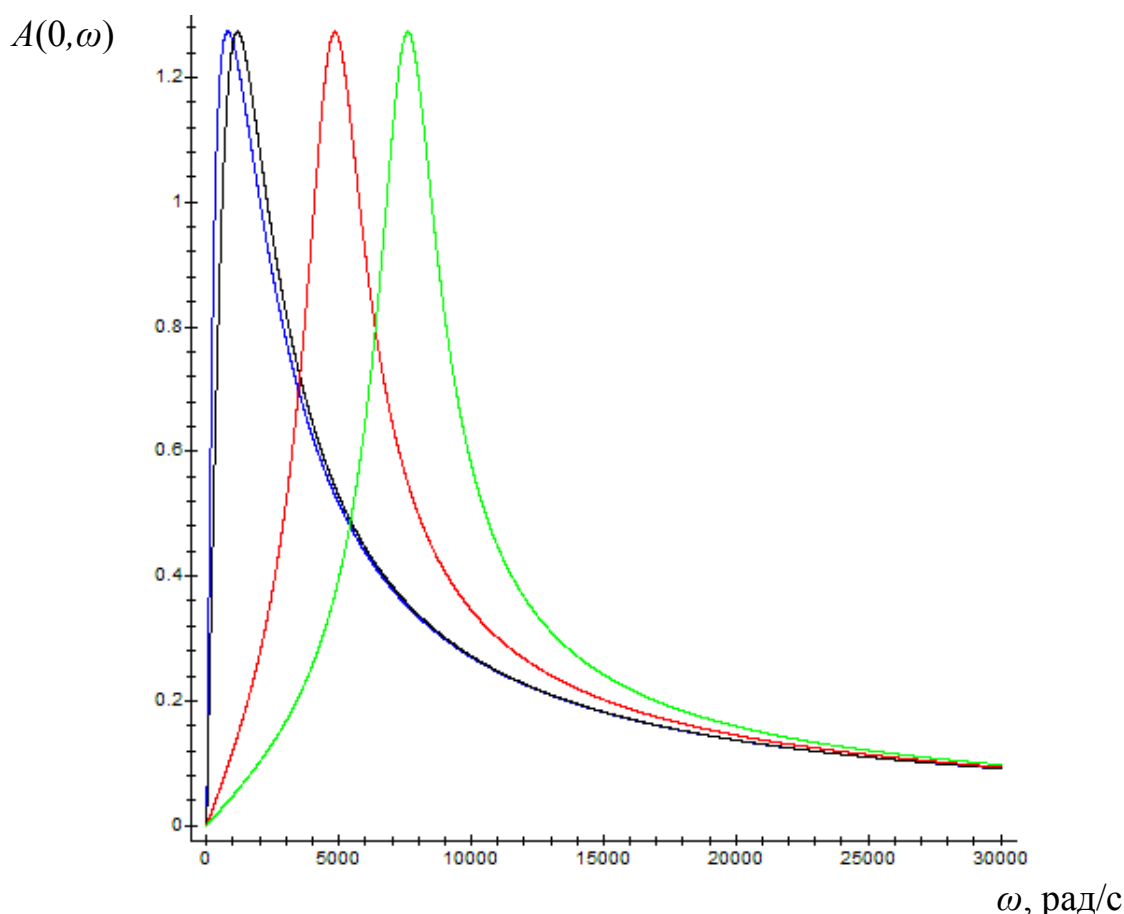


Рис. 2 Амплитудная частотная характеристика прогиба трехслойной балки при удержании в решении одного члена ряда (синяя линия - $\kappa = 0$; черная линия - $\kappa = 25 \cdot 10^6 \text{ Па}$; красная линия - $\kappa = 8 \cdot 10^8 \text{ Па}$; зеленая линия - $\kappa = 2 \cdot 10^9 \text{ Па}$)

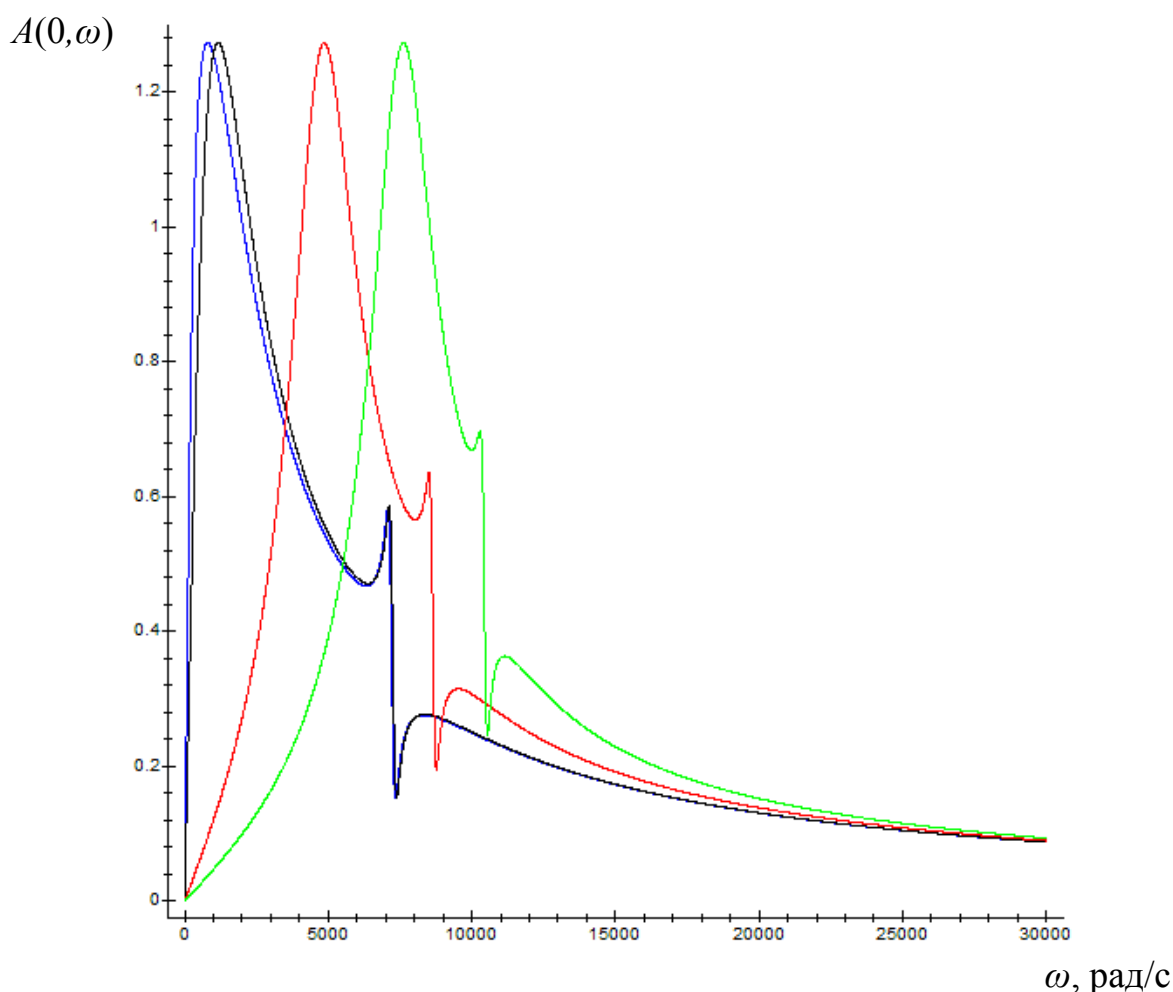


Рис. 3 Амплитудная частотная характеристика прогиба трехслойной балки при удержании в решении двух членов ряда (синяя линия - $\kappa = 0$; черная линия - $\kappa = 25 \cdot 10^6$ Па; красная линия - $\kappa = 8 \cdot 10^8$ Па; зеленая линия - $\kappa = 2 \cdot 10^9$ Па)

Таким образом, разработана математическая модель гидроупругого взаимодействия вибрирующего штампа с трехслойной балкой, установленной на основании Винклера. Данная модель была использована для исследования изгибных колебаний трехслойной балки для случая, когда балка является стенкой канала, опирающегося на упругое основание. Выполненные расчеты показали существенное влияние учета упругого основания на резонансные частоты колебаний. Из расчетов следует, что увеличение количества удерживаемых в решении членов ряда приводит к появлению дополнительных резонансных частот, расположенных выше предыдущих. При этом амплитуда колебаний на данных частотах снижается, поэтому для практических расчетов достаточно удержания конечного числа членов ряда. Расчеты также показали, что увеличение жесткости основания ведет к увеличению значений резонансных частот. Причем на высоких частотах, влияние жесткости основания снижается.

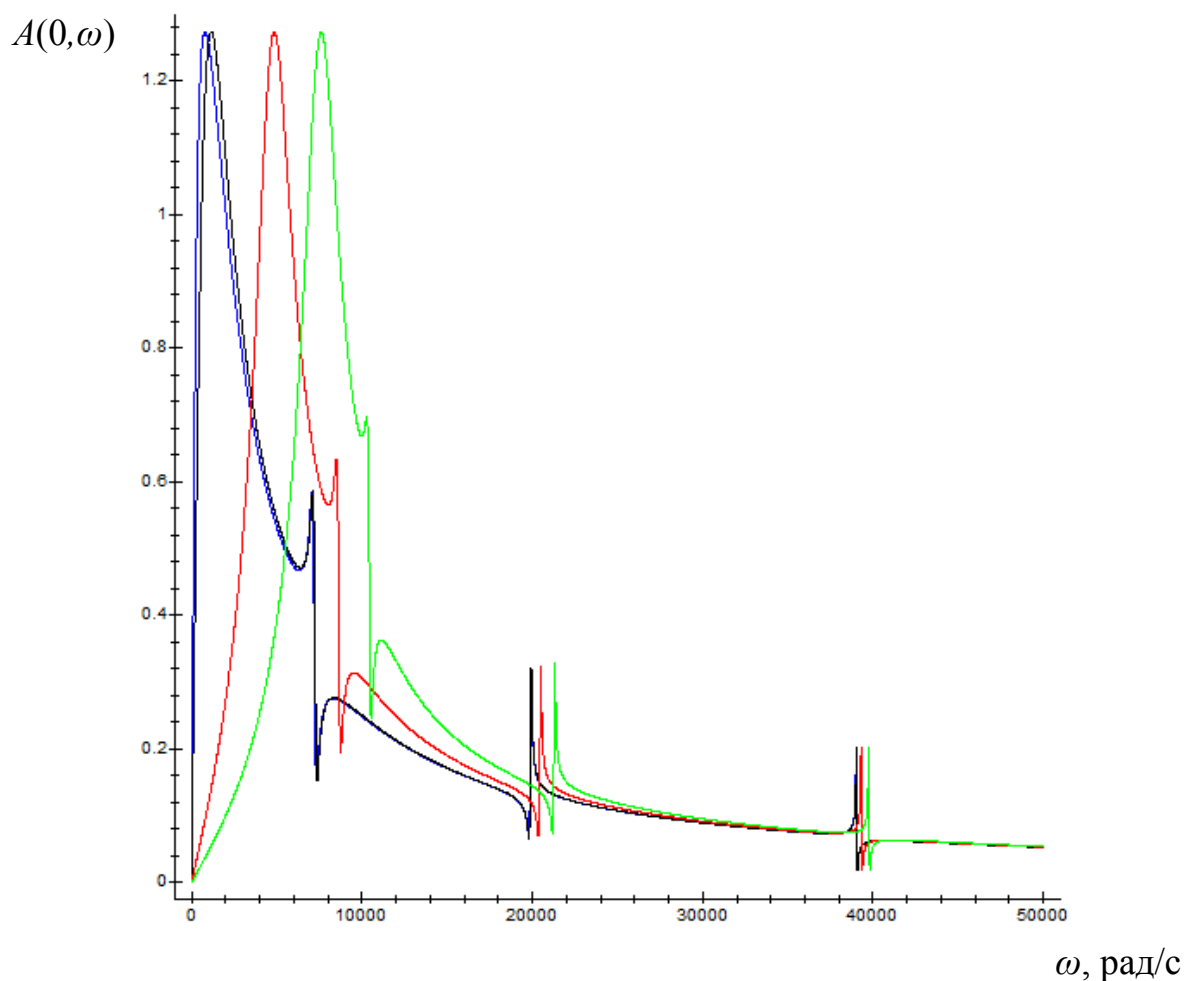


Рис. 4 Амплитудная частотная характеристика прогиба трехслойной балки при удержании в решении четырех членов ряда (синяя линия - $\kappa = 0$; черная линия - $\kappa = 25 \cdot 10^6$ Па; красная линия - $\kappa = 8 \cdot 10^8$ Па; зеленая линия - $\kappa = 2 \cdot 10^9$ Па)

Полученные в работе результаты могут быть использованы для математического моделирования гидроупругих колебаний трехслойных элементов, применяемых в приборостроении, аэрокосмической промышленности, машиностроении, гражданском строительстве и др.

Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00127-а.

Литература

1. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells // Appl. Mech. Rev. 2003. Vol. 56(3). P. 287-308.
2. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: Физматлит, 2005. 576 с.
3. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Л.: Изд-во АН СССР. 1931. 154 с.

4. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием. М.: Физматлит. 2011. 560 с.
5. Wang Y.H., Tham L.G., Cheung Y.K. Beams and plates on elastic foundations: A review // Progress in Structural Engineering and Materials. 2005. Vol. 7(4). P. 174-182.
6. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Деформирование трехслойного упругопластического стержня на упругом основании // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2011. № 2. С. 160-168.
7. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads // Mechanics of Composite Materials. 2016. Vol. 52(5). P. 665–672.
8. Леоненко Д.В., Старовойтов Э.И. Тепловой удар по круглой трехслойной пластине на упругом основании // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2012. № 1. С. 141-149.
9. Pradhan M., Dash P.R., Pradhan P.K. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient // Meccanica. 2016. Vol. 51(3). P. 725-739.
10. Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water // Proc. Roy. Soc. A. 1921. Vol. 98. P. 205-216.
11. Веклич Н.А. Уравнение малых поперечных колебаний упругого трубопровода, наполненного транспортируемой жидкостью // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2013. № 6. С. 86-95.
12. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Колебания гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением под действием ударных нагрузок со стороны поршневой группы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 100-106.
13. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С., Симдянкин А.А. Исследование влияния кавитационного износа гильз двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением камаз-740 на их деформацию в блоке // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2007. № 1 (33). С. 120-126.
14. Vochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Aeroelastic stability of cylindrical shells interacting with internal annular fluid flow // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 208. 012009.
15. Попова А.А., Попова Е.В. Исследование давления в кольцевом слое вязкой жидкости в канале с подвижной стенкой // Техническое регулирование в транспортном строительстве. 2015. № 5 (13). С. 53-59.
16. Кондратов Д.В., Попова А.А., Попова Е.В. Исследование динамики взаимодействия слоя вязкой жидкости в кольцевом канале со стенкой, обладающей упругой податливостью // Тезисы докладов IV Международного научного семинара "Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной

физической природы" Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). 2016. С. 90-93.

17. Кондратов Д.В., Попова А.А., Попова Е.В. Математическое моделирование динамики взаимодействия слоя вязкой жидкости в кольцевой щели с вибрирующей стенкой // Прикладная математика и механика (Ульяновск). 2017. № 11. С. 145-152.

18. Попова А.А., Попова Е.В. Продольные колебания стенки кольцевого канала, заполненного вязкой жидкостью // Техническое регулирование в транспортном строительстве. 2018. № 6 (32). С. 86-90.

19. Попова А.А., Попова Е.В. Динамика взаимодействия вязкой жидкости в кольцевом канале с его упругозакрепленной стенкой // Творчество юных - шаг в успешное будущее. Арктика и её освоение: материалы IX Всероссийской научной молодежной конференции с международным участием с элементами научной школы имени профессора М.К. Коровина. Национальный исследовательский Томский политехнический университет. 2016. С. 213-215.

20. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64-72.

21. Попов В.С., Попова А.А., Волон М.И. Математическое моделирование взаимодействия ламинарного пульсирующего потока с цилиндрической ребристой оболочкой, по которой он движется // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2010. № 1 (36). С. 51-66.

22. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Математическое моделирование колебаний ребристой оболочки с пульсирующим потоком вязкой жидкости // Математические методы в технике и технологиях. ММТТ-25. 2012. С. 9-11.

23. Kondratov D.V., Kalinina A.V., Mogilevich L.I., Popova A.A., Kondratova Y.N. Mathematical model of elastic ribbed shell dynamics interaction with viscous liquid under vibration // Vibroengineering PROCEDIA, Vol. 8. 2016. p. 300-305.

24. Askari E., Jeong K.-H., Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface // Journal of Sound and Vibration. 2013. Vol. 332(12). P. 3064-3085.

25. Velmisov P.A., Ankilv A.V. Dynamic stability of plate interacting with viscous fluid // Cybernetics and Physics. 2017. Vol. 6(4). P. 262-270.

26. Onsay T. Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system // Journal of Sound and Vibration. 1993. Vol. 163(2). P. 231-259.

27. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Kondratov D.V. Mathematical Model of Pulsating Viscous Liquid Layer Movement in a Flat Channel with Elastically Fixed Wall // Applied Mathematical Sciences. 2014. Vol. 8(159). P. 7899-7908.

28. Faria C.T., Inman D.J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler-Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // Mechanical Systems and Signal Processing. 2014. Vol. 45(2). P. 317-329.

29. Akcabay D.T., Young Y.L. Hydroelastic response and energy harvesting potential of flexible piezoelectric beams in viscous flow // Physics of Fluids. 2015. Vol. 24(5).

30. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Effect of boundary conditions on the hydroelastic vibrations of two parallel plates // Solid State Phenomena. 2016. Vol. 243. P. 51-58.

31. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Numerical investigation of the effect of boundary conditions on hydroelastic stability of two parallel plates interacting with a layer of ideal flowing fluid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2016. Vol. 57(7). P. 1254-1263.

32. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдвливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №4. С. 23-32.

33. Агеев Р. В., Могилевич Л. И., Попов В. С., Попова А. А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78.

34. Попова А.А. Математическое моделирование динамических процессов в виброопоре с упругими элементами конструкции // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. Т. 4. № 1 (28). С. 25-31.

35. Агеев Р.В., Попов В.С., Попова А.А. Математическая модель канала с вязкой жидкостью, образованного двумя пластинами, в условиях вибрации // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. 2015. № 7. С. 134-136.

36. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Колебания круглых пластин, между которыми находится пульсирующий слой вязкой жидкости // Ресурсоэнергоэффективные технологии в строительном комплексе региона. 2015. № 5. С. 265-269.

37. Попов В.С., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование взаимодействия пульсирующего слоя вязкой жидкости с круглыми пластинами, между которыми он находится // Интернет-журнал Науковедение. 2017. Т. 9. № 3.

38. Курзин В.Б. Продольные колебания пластины, обтекаемой вязкой жидкостью в канале, обусловленные вынужденными поперечными колебаниями пластины // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52. № 3. С. 153-158.

39. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и поперечные колебания упругозакрепленной стенки клиновидного канала, установленного

на вибрирующем основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 3. С. 28-36.

40. Popov V.S., Popova A.A., Sokolova D.L. Mathematical modeling of longitudinal oscillations tapered narrow channel wall under pulsating pressure of highly viscous liquid // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10. № 53. С. 2627-2635.

41. Попова А.А., Попова Е.В. Динамика слоя вязкой жидкости в клиновидном канале с подвижной стенкой // Проблемы управления, обработки и передачи информации: сборник трудов V Международной юбилейной научной конференции. Саратовский государственный технический университет. 2017. С. 464-467.

42. Агеев Р.В., Попов В.С., Попова А.А. Взаимодействие пульсирующего слоя жидкости с упругой пластиной переменной толщины // Ресурсоэнергоэффективные технологии в строительном комплексе региона. 2014. № 4. С. 209-213.

43. Могилевич Л.И., Попова А.А. Динамическая задача гидроупругости виброопоры с упругой ребристой пластиной // Наука и техника транспорта. 2007. № 4. С. 55-61.

44. Hosseini-Hashemi S., Karimi M., Hossein Rokni D.T. Hydroelastic vibration and buckling of rectangular Mindlin plates on Pasternak foundations under linearly varying in-plane loads // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2010. Vol. 30(12). P. 1487-1499.

45. Ergin A., Kutlu A., Omurtag M.H., Ugurlu B. Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent fluid // Journal of Sound and Vibration. 2008. Vol. 317(1-2). P. 308-328.

46. Hasheminejad S.M., Mohammadi M.M. Hydroelastic response suppression of a flexural circular bottom plate resting on Pasternak foundation // Acta Mechanica. 2017. Vol. 228(12). P. 4269-4292.

47. Ergin A., Kutlu A., Omurtag M.H., Ugurlu B. Dynamic response of Mindlin plates resting on arbitrarily orthotropic Pasternak foundation and partially in contact with fluid // Ocean Engineering. 2012. Vol. 42. P. 112-125.

48. Попов В.С., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование колебаний пластины, установленной на упругом основании Винклера и взаимодействующей со штампом через слой вязкой жидкости // Интернет-журнал Науковедение. 2017. Т. 9. № 2.

49. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия пульсирующей вязкой жидкости со стенками щелевого канала, установленного на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 1. С. 15-23.

50. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование динамики взаимодействия сильновязкой жидкости со стенками канала, установленного на упругом основании // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. № 2. С. 350-354.

51. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Christoforova A.V. Mathematical modeling of hydroelastic walls oscillations of the channel on Winkler foundation under vibrations // *Vibroengineering PROCEDIA*. 2016. Vol. 8. P. 294-299.

52. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Christoforova A.V. Mathematical modeling of highly viscous liquid dynamic interaction with walls of channel on elastic foundation // *IEEE Conference 2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines*. 2016 DOI: 10.1109/Dynamics.2016.7819051

53. Агеев Р.В., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование гидроупругих колебаний жестко заземленной пластины на упругом основании // *Математические методы в технике и технологиях - ММТТ*. 2017. Т. 3. С. 29-34.

54. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Christoforova A.V. Mathematical Modeling of Hydroelastic Oscillations of the Stamp and the Plate, Resting on Pasternak Foundation // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 944. 012081.

55. Kondratov D.V., Popov V.S., Mogilevich L.I., Popova A.A. Hydroelastic oscillation of a plate resting on Pasternak foundation // *Vibroengineering Procedia*. Vol. 12, 2017, p. 102-108.

56. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А., Христофорова А.В. Колебания штампа, взаимодействующего с пластиной на упругом основании Пастернака, через слой вязкой жидкости // *Динамика систем, механизмов и машин*. 2017. Т. 5. № 1. С. 46-52.

57. Kondratov D.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Hydroelastic Oscillations of a Circular Plate, Resting on Winkler Foundation // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 944. 012057

58. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Гидроупругие колебания круглой пластины, установленной на основании Винклера // *Динамика систем, механизмов и машин*. 2017. Т. 5. № 1. С. 34-41.

59. Kramer M.R., Liu Z., Young Y.L. Free vibration of cantilevered composite plates in air and in water // *Composite Structures*. 2013. Vol. 95. P. 254-263.

60. Агеев Р.В., Попов В.С., Попова А.А. Математическое моделирование взаимодействия слоя жидкости с круглой трехслойной пластиной // *Ресурсоэнергоэффективные технологии в строительном комплексе региона*. 2011. № 1. С. 68-71.

61. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Christoforova A.V., Popova E.V. Mathematical modeling of three-layer beam hydroelastic oscillations // *Vibroengineering PROCEDIA*. 2017. Vol. 12. P. 12-18.

62. Могилевич Л.И., Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование взаимодействия трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем с пульсирующим слоем вязкой жидкости // *Компьютерные науки и информационные технологии: матер. Междунар. науч. конф. Саратов: Наука*, 2016. С. 280-283.

63. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Гидроупругость трехслойной пластины, установленной на вибрирующем основании // Ресурсоэнергоэффективные технологии в строительном комплексе региона. 2015. № 5. С. 254-257.

64. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попова А.А. Математическое моделирование гидроупругих колебаний трехслойного элемента опоры с пульсирующим слоем вязкой несжимаемой жидкости // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 1. С. 24-32

65. Попова А.А., Христофорова А.В. Математическое моделирование взаимодействия жидкости с трехслойной пластиной со сжимаемым наполнителем // Математические методы в технике и технологиях - ММТТ. 2016. № 3 (85). С. 63-64.

66. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука. 1964. 336 с.

67. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Физматлит. 1976. 416 с.

68. Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1947. 928 с.