

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/20-83](http://mathmod.esrae.ru/20-83)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попова Е.В. Исследование распространения волн в оболочке с мягкой нелинейностью // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. №1

Выполнено при поддержке грантов РФФИ № 19-01-00014-а и 18-01-00127-а

УДК 532.517.2:539.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ОБОЛОЧКЕ С МЯГКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Иванов С.В.<sup>1</sup>, Могилевич Л.И.<sup>2</sup>, Попова Е.В.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, [evilgraywolf@gmail.com](mailto:evilgraywolf@gmail.com)

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., [mogilevich@sgu.ru](mailto:mogilevich@sgu.ru)

<sup>3</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, [elizaveta.popova.97@bk.ru](mailto:elizaveta.popova.97@bk.ru)

## INVESTIGATION OF WAVE PROPAGATIONS IN A SHELL WITH SOFTENING NONLINEARITY

Ivanov S.V.<sup>1</sup>, Mogilevich L.I.<sup>2</sup>, Popova E.V.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, [evilgraywolf@gmail.com](mailto:evilgraywolf@gmail.com)

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, [mogilevich@sgu.ru](mailto:mogilevich@sgu.ru)

<sup>3</sup>Saratov State University, [elizaveta.popova.97@bk.ru](mailto:elizaveta.popova.97@bk.ru)

**Аннотация.** В настоящей работе развивается метод возмущений для исследования нелинейных волн деформаций в упругой цилиндрической оболочке. Метод двухмасштабных разложений приводит к модифицированному уравнению Кортевега – де Вриза, имеющему точные решения.

**Ключевые слова:** нелинейные волны, упругие цилиндрические оболочки.

**Abstract.** The present article deals with further developing of perturbation method for non-linear deformation waves in an elastic cylinder shell. The method of two-scale expansions leads to the modified Korteweg – de Vries equation having exact solutions.

**Keywords:** non-linear waves, elastic cylinder shell.

Тонкостенные оболочки широко используются в различных изделиях современной промышленности и инженерных сооружениях, в связи с этим, исследования динамических процессов в них имеют не только теоретический, но и практический интерес. Традиционно распространение волн в сплошных средах изучается при помощи линейных уравнений [1]. В рамках данного

подхода скорость распространения малых возмущений считается постоянной и равной скорости распространения звука в невозмущенной среде. Однако, известен ряд нелинейных волновых явлений, например, распространение уединенных волн в нелинейных средах. В этом случае волновые процессы описываются на базе нелинейных уравнений, а их исследования проводятся с помощью методов возмущений [2]. На сегодняшний день исследований распространения нелинейных уединенных волн деформации в цилиндрической оболочке, имеющей конструкционное демпфирование, практически нет. С другой стороны, известно достаточно много работ [3-15], посвященных вопросам гидроупругости цилиндрических оболочек, взаимодействующих с вязкой жидкостью, в которых показана важность учета демпфирования при изучении динамических процессов в них.

В настоящей работе на базе метода возмущений исследуются вопросы математического моделирования распространения нелинейных уединенных волн деформации в физически нелинейной цилиндрической оболочке с учетом конструкционного демпфирования.

В рамках теории пластичности А. А. Илюшина [16,17], компоненты тензора напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_\Theta$  определены через компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_\Theta$  и квадрат интенсивности деформаций  $\varepsilon_u$  [18,19] следующими выражениями

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_x + \mu_0\varepsilon_\Theta)\left(1 - \frac{m}{E}\varepsilon_u^2\right); \quad \sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_\Theta + \mu_0\varepsilon_x)\left(1 - \frac{m}{E}\varepsilon_u^2\right); \quad (1)$$
$$\varepsilon_u^2 = \frac{4}{3}(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\Theta^2 - \varepsilon_x\varepsilon_\Theta).$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга;  $m$  – константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие;  $\mu_0$  – коэффициент Пуассона материала оболочки.

Далее будем исследовать осесимметричную задачу для цилиндрической оболочки. Толщина оболочки  $h_0$ , а ее упругие перемещения – продольное  $U$  и прогиб  $W$ , направленный к центру кривизны. Связь компонент деформаций с упругими перемещениями имеет вид [20]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_\Theta = -\frac{W}{R}. \quad (2)$$

Здесь  $x$  – продольная координата вдоль срединной поверхности;  $z$  – нормальная координата в оболочке  $\left(-\frac{h_0}{2} \leq z \leq \frac{h_0}{2}\right)$ . Квадрат интенсивности деформаций записывается в виде

$$\varepsilon_u^2 = \frac{4}{3}\left\{\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]^2 + \frac{W^2}{R^2} + \frac{W}{R}\left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]\right\} \quad (3)$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_u^2 = & \frac{4}{3} \left\{ \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{W}{R} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial R} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] - \right. \\ & \left. - z \left[ 2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \frac{W}{R} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + z^2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Усилия в срединной поверхности оболочки и момент определим по формулам

$$N_x = \int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x dz, \quad N_\Theta = \int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_\Theta dz, \quad M_x = \int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x z dz. \quad (5)$$

При этом

$$\int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \left[ 1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^2 \right] dz = h_0 \left\langle 1 - \frac{4m}{3E} \left\{ \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{W}{R} \right)^2 + \frac{W}{R} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{h_0^2}{12} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \right\rangle$$

$$\int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} z \left[ 1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^2 \right] dz = h_0 \frac{4m}{3E} \left\{ \frac{h_0^2}{12} \left[ 2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{W}{R} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right\}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} z^2 \left[ 1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^2 \right] dz = & \frac{h_0^3}{12} \left\langle 1 - \frac{4m}{3E} \left\{ \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{W}{R} \right)^2 + \frac{W}{R} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \frac{h_0^2}{20} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

Подставляя (6) в (5) находим

$$\begin{aligned} N_x = & \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \left\langle \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W}{R} - \frac{4m}{3E} \left\{ \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^3 + (1-\mu_0) \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^2 \frac{W}{R} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1-\mu_0) \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] \left( \frac{W}{R} \right)^2 - \mu_0 \left( \frac{W}{R} \right)^3 + \frac{h_0^2}{12} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \left[ 3 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) + (1-\mu_0) \frac{W}{R} \right] \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_\Theta = & \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \left\langle \mu_0 \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{W}{R} - \frac{4m}{3E} \left\{ \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{W}{R} \right] \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{W}{R} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W}{R} \right] + \frac{h_0^2}{12} \left[ 3\mu_0 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - (1-\mu_0) \frac{W}{R} \right] \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

$$M_x = -\frac{Eh_0^3}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left\langle 1 - \frac{4m}{3E} \left[ 3 \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^2 \right] + 2(1-\mu_0^2) \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{W}{R} + \right. \\ \left. + (1-\mu_0) \left( \frac{W}{R} \right)^2 + 3 \frac{h_0^2}{20} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \right\rangle \quad (7)$$

Материал оболочки обладает демпфирующими свойствами в продольном и нормальном направлениях. Учет данный факт введя в рассмотрение конструкционное демпфирование. Тогда, уравнения динамики рассматриваемой оболочки с конструкционным демпфированием, имеют вид

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \varepsilon_1 \frac{1}{l} \rho_0 h_0 \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial x} N_x \right) + \frac{1}{R} N_\Theta = \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \varepsilon_2 \frac{l}{R^2} \rho_0 h_0 \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \frac{\partial W}{\partial t} + k_1 \frac{h_0}{R_3} \rho_0 h_0 \frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)} W.$$

Здесь  $t$  – время;  $\rho_0$  – плотность материала оболочки;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – коэффициенты демпфирования,  $k_1$  – коэффициент постели окружающей среды. Подставляя (1), (2), (5) в (8) находим уравнения динамики в перемещениях

$$\frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W}{R} - \frac{4m}{3E} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^3 + (1-\mu_0) \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^2 \frac{W}{R} + (1-\mu_0) \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] \left( \frac{W}{R} \right)^2 - \mu_0 \left( \frac{W}{R} \right)^3 + \frac{h_0^2}{12} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \left[ 3 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) + (1-\mu_0) \frac{W}{R} \right] \right\rangle = \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \varepsilon_1 \frac{1}{l} \rho_0 h_0 \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \frac{\partial U}{\partial t} \\ - \frac{Eh_0^3}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\langle \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left[ 1 - \frac{4m}{3E} \left[ 3 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right)^2 \right] + 2(1-\mu_0^2) \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W}{R} + (1-\mu_0) \left( \frac{W}{R} \right)^2 + 3 \frac{h_0^2}{20} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right\rangle + \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial W}{\partial x} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W}{R} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4m}{3E} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^3 + (1-\mu_0) \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^2 \frac{W}{R} + (1-\mu_0) \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] \left( \frac{W}{R} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \mu_0 \left( \frac{W}{R} \right)^3 + \frac{h_0^2}{12} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \left[ 3 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) + (1-\mu_0) \frac{W}{R} \right] \right] \right\rangle + \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{1}{R} \left\langle \mu_0 \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{W}{R} - \frac{4m}{3E} \left\{ \mu_0 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{W}{R} \right\} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{W}{R} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W}{R} \right] + \frac{h_0^2}{12} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \left[ 3\mu_0 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - (1-\mu_0) \frac{W}{R} \right] \right\rangle = \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \varepsilon_2 \frac{l}{R^2} \rho_0 h_0 \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \frac{\partial W}{\partial t} + k_1 \frac{h_0}{R^3} \rho_0 h_0 \frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)} W
 \end{aligned}$$

Проводимые оценки в безразмерных переменных, характеризуют рассматриваемые задачи. Для волновых задач оболочку считаем бесконечной. Для продольных волн в оболочке вводятся безразмерные переменные и параметры. Принимаем за характерную длину  $l$  – длину волны, а  $u_m$ ,  $w_m$  – характерные значения упругих перемещений

$$W = w_m u_3, U = u_m u_1, x^* = \frac{x}{l}, t^* = \frac{c_0}{l} t, r^* = \frac{r}{R}, \quad (10)$$

где  $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu_0)}}$  – скорость распространения продольных упругих волн в оболочке.

Положим

$$\frac{h_0}{R} = \varepsilon \ll 1, \frac{R^2}{l^2} = O(\varepsilon), \frac{w_m}{h_0} = O(1), \frac{u_m}{l} \frac{R}{h_0} = O(1), \frac{m\varepsilon}{E} = O(1), \frac{h_0^2}{l^2} = \frac{h_0^2}{R^2}, \frac{R^2}{l^2} = \varepsilon^3 \quad (11)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр задачи. В этих переменных уравнения (9) принимают вид

$$\begin{aligned}
 & c_0^2 \rho_0 h_0 \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x^*} \left\langle \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 - \mu_0 \frac{w_m}{R} u_3 - \frac{4m}{3E} \left\{ \left[ \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 \right]^3 + (1-\mu_0) \left[ \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 \right] \frac{w_m}{R} u_3 \left[ \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 \right) + \frac{w_m}{R} u_3 \right] - \mu_0 \left( \frac{w_m}{R} \right)^3 u_3 + \frac{h_0^2}{12} \frac{R^2}{l^4} \frac{w_m^2}{R^2} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^{*2}} \right)^2 \left[ 3 \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 \right) + (1-\mu_0) \frac{w_m}{R} u_3 \right] \right\rangle = \frac{c_0^2 \rho_0 h_0}{l^2} u_m \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}} + \varepsilon_1 \frac{c_0^2 \rho_0 h_0}{l^2} \frac{\partial u_1}{\partial t^*}; \\
 & - c_0^2 \rho_0 \frac{h_0}{l} \frac{h_0^2}{12} \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \left\langle \frac{R}{l} \frac{w_m}{R} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^{*2}} \left\{ 1 - \frac{4m}{3E} \left[ 3 \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 \right)^2 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + 2(1-\mu_0) \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 \right) \frac{w_m}{R} u_3 + (1-\mu_0) \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 + \right. \right. \right.
 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 & + 3 \frac{h_0^2 R^4}{20 l^4} \left( \frac{w_m}{R^2} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^{*2}} \right)^2 \right) \left. \right\} + c_0^2 \rho_0 h_0 \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x^*} \left\langle \frac{R w_m}{l R} \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \left[ \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 - \mu_0 \frac{w_m}{R} u_3 - \frac{4 m}{3 E} \left\{ \left[ \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 \right]^3 + \right. \\
 & + (1 - \mu_0) \left[ \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 \right] \frac{w_m}{R} u_3 \left[ \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 + \right. \\
 & + \left. \left. \frac{w_m}{R} u_3 \right] - \mu_0 \frac{w_m}{R} u_3^3 + \frac{h_0^2 R^2}{12 l^4} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^{*2}} \right)^2 \left[ 3 \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 \right) + \right. \\
 & + (1 - \mu_0) \frac{w_m}{R} u_3 \left. \right] \left. \right\} + c_0^2 \rho_0 h_0 \frac{1}{R} \left\langle \mu_0 \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 \right) - \frac{w_m}{R} u_3 - \right. \\
 & - \frac{4 m}{3 E} \left\{ \left[ \mu_0 \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 \right) - \frac{w_m}{R} u_3 \right] \left[ \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \right. \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 u_3^2 + \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 \right) \frac{w_m}{R} u_3 \right. \left. \right\} + \\
 & + \left. \left. \frac{h_0^2 R^2}{12 l^4} \frac{w_m^2}{R^2} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^{*2}} \right)^2 \left[ 3 \mu_0 \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} + \frac{1}{2} \frac{R^2}{l^2} \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \right)^2 \right) - (1 - \mu_0) \frac{w_m}{R} u_3 \right] \right. \right\} = \\
 & = \rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{l^2} w_m \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^{*2}} + \varepsilon_2 \rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{R^2} w_m \frac{\partial u_3}{\partial t^*} + k_1 \rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{R^2} w_m u_3
 \end{aligned}$$

Введем независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*,$$

где  $c$  – безразмерная неизвестная скорость волны;  $\tau$  – быстрое время. В этих переменных, оставляя в уравнениях (12) члены порядка  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$ , и, отбрасывая члены с более высокими степенями, получим уравнения [21]

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m}{R} u_3 - \frac{4 m}{3 E} \left[ \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right)^3 + (1 - \mu_0) \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{w_m}{R} u_3 \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{w_m}{R} u_3 \right) - \right. \right. \\
 & - \left. \left. \mu_0 \left( \frac{w_m}{R} \right)^3 u_3^3 \right] \right\rangle = \frac{u_m}{l} \left[ c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon c \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \tau} \right] - \frac{u_m}{l} \varepsilon_1 c \frac{\partial u_1}{\partial \xi}; \\
 & \mu_0 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{w_m}{R} u_3 - \frac{4 m}{3 E} \left( \mu_0 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{w_m}{R} u_3 \right) \left[ \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 u_3^2 + \right. \\
 & + \left. \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{w_m}{R} u_3 \right] = \frac{R^2 w_m}{l^2 R} \left[ c^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon c \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi \partial \tau} \right] - \frac{R^2 w_m}{l^2 R} \varepsilon_2 \frac{l^2}{R^2} c \frac{\partial u_3}{\partial \xi} + \frac{w_m}{R} \frac{h_0}{R} k_1 u_3.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Зависимые переменные представим в виде асимптотического разложения

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \dots \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14) и оставляя члены порядка  $\varepsilon$  получим систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \right\rangle = c^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} \quad (16)$$

$$\mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = 0.$$

Из этой системы получаем

$$\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}, \quad c^2 = 1 - \mu_0^2. \quad (17)$$

Таким образом,  $u_{10}$  остается произвольной функцией, а безразмерная скорость волны  $c = (1 - \mu_0^2)^{1/2}$  и, следовательно, скорость волны равна  $\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$  -

скорости волны в стержне. Здесь  $\xi = \frac{1}{l} \left( x - \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} t \right)$ , так как оболочка имеет бесконечную длину.

В следующем приближении  $\varepsilon^2$  получим систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} u_{31} - \frac{4}{3} \frac{m}{E \varepsilon} \left[ \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^3 + (1 - \mu_0) \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \right) - \mu_0 \left( \frac{w_m l}{u_m R} \right)^3 u_{30}^3 \right] \right\rangle = -2c \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + c^2 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \xi^2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} c \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} q_x; \quad (18)$$

$$\mu_0 \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{31} - \frac{4}{3} \frac{m}{E \varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 \left( \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \right) \left[ \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{w_m l}{u_m R} \right)^2 u_{30}^2 + \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} u_{30} \right] = \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{w_m l}{u_m R} c^2 \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial \xi^2} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \frac{w_m l}{R u_m} c \frac{\partial u_{30}}{\partial \xi} + k_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \frac{w_m l}{u_m R} u_{30}$$

Подставим соотношение (17) в уравнения (18) и получим систему

$$\mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{31}}{\partial \xi} = + \frac{4}{3} \frac{m}{E \varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0^2) (1 + \mu_0 + \mu_0^2) \beta \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - 2\sqrt{1 - \mu_0^2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}, \quad (19)$$

$$\mu_0 \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{31} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} (1 - \mu_0^2) \mu_0 \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \sqrt{1 - \mu_0^2} \mu_0 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + k_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi};$$

Умножим обе части второго уравнения на  $\mu_0$  и продифференцируем по  $\xi$ . Оно примет вид

$$\begin{aligned} & \mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{31}}{\partial \xi} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \mu_0^2 (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \sqrt{1 - \mu_0^2} \mu_0^2 \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} + \\ & + k_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2}; \end{aligned} \quad (20)$$

Левые части уравнения (19) и уравнения (20) совпали. Вычтем, почленно, из уравнения (20) первое уравнение системы (19) и получим разрешающее уравнение

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} - 4 \frac{m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0^2) (1 + \mu_0 + \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \mu_0^2 (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \sqrt{1 - \mu_0^2} \mu_0^2 \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} + k_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \\ & + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0 \end{aligned}$$

Разделим обе части полученного уравнения на  $2\sqrt{1 - \mu_0^2}$ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} - 2 \frac{m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 \sqrt{1 - \mu_0^2} (1 + \mu_0 + \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \mu_0^2 \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} + k_1 \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0 \end{aligned}$$

Полученное уравнение есть модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза - Бюргера (МКДВ-Б) для  $\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}$ . Если, учитывая (11), положить  $w_m = h$ ,

$u_m = \frac{hl}{R}$ ,  $\frac{R^2}{l^2} = \varepsilon$ , то  $\frac{m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 = \frac{m}{E\varepsilon} \frac{h^2}{R^2} = \frac{m}{E} \varepsilon = O(1)$  и уравнение становится таким

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} - \sqrt{1 - \mu_0^2} 2(1 + \mu_0 + \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \mu_0^2 \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} + \\ & + k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0 \end{aligned}$$

Полагая  $\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = \varphi$ ,  $\eta = c_1 \xi$ ,  $t = c_2 \tau$  получим модифицированное уравнение

Кортевега – де Вриза – Бюргера

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - 6\varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} - s_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + s_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + s_0 \varphi = 0, \quad (21)$$

где  $c_1 = \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{1 + \mu_0 + \mu_0^2}{3} \right]^{\frac{1}{2}}$ ,  $c_2 = c_1 \frac{1}{3} \sqrt{1 - \mu_0^2} (1 + \mu_0 + \mu_0^2)$ ,



при этом положено  $s_0 = \frac{1}{c_2} \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ ,  $s_1 = \frac{c_1}{c_2} k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}}$ ,  $s_2 = \frac{c_1^2}{c_2} \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \mu_0^2$ .

При отсутствии продольного конструкционного демпфирования ( $s_0 = 0$  ( $\varepsilon_1 = 0$ )) уравнение МКдВ-Б имеет точные решения.

В случае мягкой нелинейности уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - 6\varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} - s_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + s_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0$$

имеет точное решение в виде кинка-антикинка

$$\varphi = \mp \frac{1}{6} s_2 \pm k \operatorname{th} \left\{ k \left[ \eta + \left( 2k^2 - s_1 + \frac{1}{6} s_2^2 \right) t \right] \right\}.$$

Фазовая скорость  $\frac{\omega}{k} = -2k^2 - \frac{1}{6} s_2^2 + s_1$ , скорость волны при этом

$$\sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \left( 1 - 3\varepsilon \frac{2k^2 + \frac{1}{6} s_2^2 - s_1}{(1-\mu_0^2)(1+\mu_0+\mu_0^2)} \right).$$

Если числитель дроби  $2k^2 + \frac{1}{6} s_2^2 - s_1 > 0$  ( $s_1 < 2k^2 + \frac{1}{6} s_2^2$ ), то скорость дозвуковая. Если числитель дроби  $2k^2 + \frac{1}{6} s_2^2 - s_1 < 0$  ( $s_1 > 2k^2 + \frac{1}{6} s_2^2$ ), то скорость сверхзвуковая.

Влияние постели - окружающей среды ( $s_l$ ) в любом случае увеличивает скорость волны.

Конструкционное демпфирование в продольном направлении ( $s_0 > 0$ ) оказывает влияние на амплитуду волны. Это влияние исследуется с помощью численного решения уравнений МКдВ-Б и МКдВ при  $s_0 > 0$ .

Волновое число  $k$  – произвольная величина,  $l = \lambda = \frac{1}{k}$  - длина волны.

Для численного исследования модели волновых движений физически нелинейной упругой оболочки с конструкционным демпфированием (рассеянием энергии), взаимодействующей с окружающей ее упругой средой, используем следующую разностную схему для уравнения (21) аналогичную схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности.

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + s_1 \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} - \\ & - 2 \frac{(u_{j+1}^{3n+1} - u_{j-1}^{3n+1}) + (u_{j+1}^{3n} - u_{j-1}^{3n})}{4h} + \\ & + \frac{(u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)}{4h^3} - \\ & - s_2 \frac{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)}{2h^2} + s_0 \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} = 0 \end{aligned}$$

При отсутствии влияния окружающей среды и конструкционного демпфирования в продольном и нормальном направлениях скорость и амплитуда волны не меняется. Движение происходит в отрицательном направлении (рис. 1). Это означает что скорость движения дозвуковая.

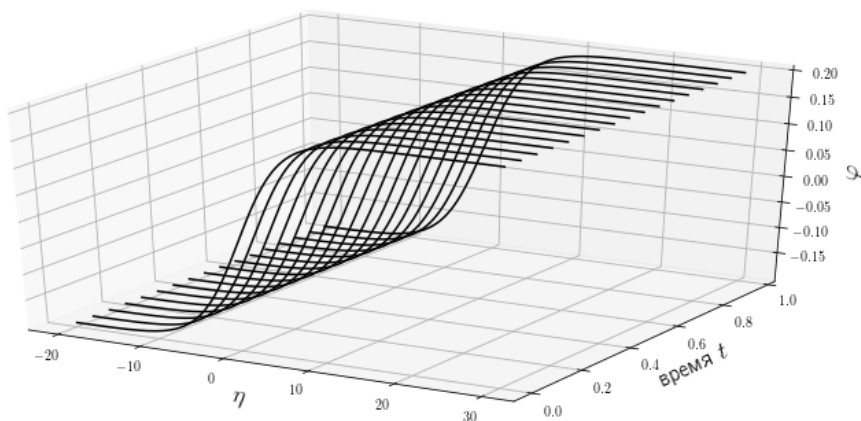


Рис. 1. Отсутствие влияния окружающей среды ( $s_1=0$ ) и конструкционного демпфирования в продольном ( $s_0=0$ ) и нормальном ( $s_2=0$ ) направлениях

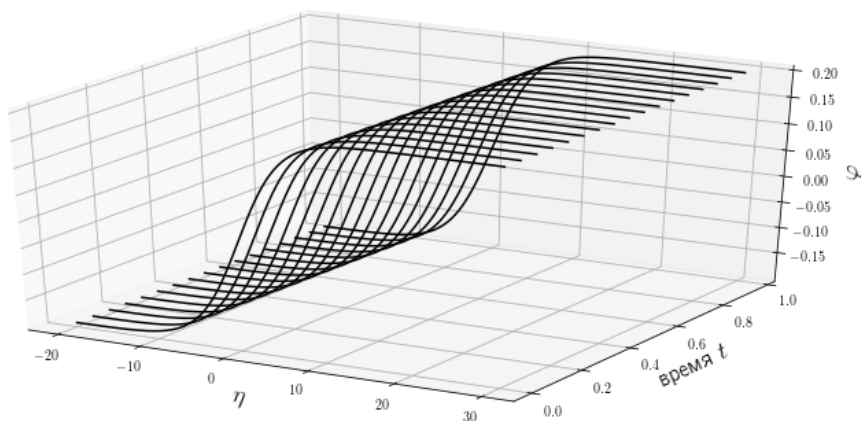


Рис. 2. Отсутствие конструкционного демпфирования в продольном ( $s_0=0$ ) и нормальном ( $s_2=0$ ) направлениях, при наличии влияния окружающей упругой среды ( $s_1>0$ )

При отсутствии конструкционного демпфирования в продольном и нормальном направлениях и наличии влияния окружающей упругой среды амплитуда волны не меняется. Движение происходит в положительном направлении (рис. 2). Это означает, что скорость движения становится сверхзвуковой.

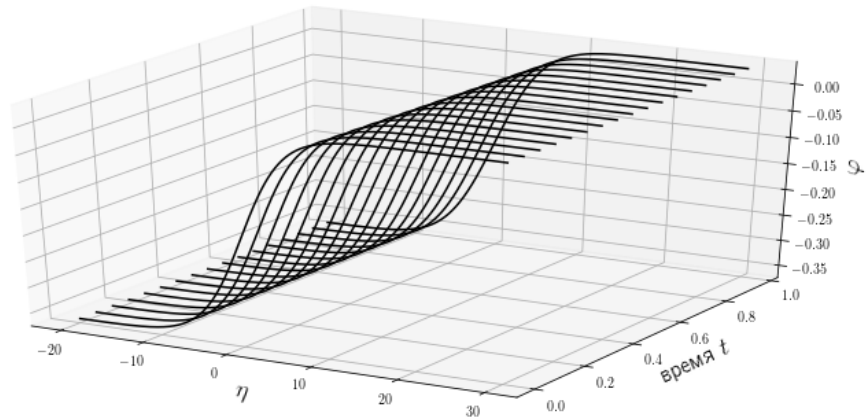


Рис. 3. Отсутствие влияния конструкционного демпфирования в продольном направлении ( $s_0=0$ ), наличие влияния конструкционного демпфирования нормальном направлении ( $s_2>0$ ) и окружающей упругой среды ( $s_1>0$ ).

Наличие влияния окружающей упругой среды движение происходит в положительном направлении. Это означает, что скорость движения становится сверхзвуковой (рис. 3). Наличие демпфирования в нормальном направлении приводит к структуре ударной волны сжатия ( $\varphi < 0$ ).

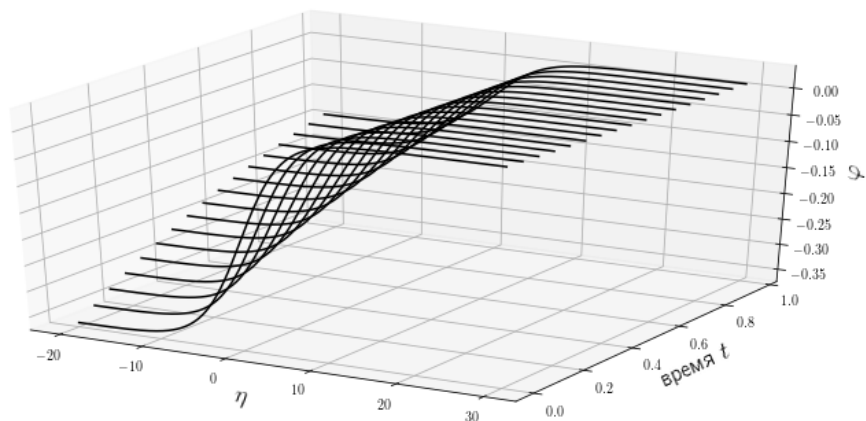


Рис. 4. Наличие влияния окружающей упругой среды ( $s_1>0$ ) и конструкционного демпфирования в продольном ( $s_0>0$ ) и нормальном ( $s_2>0$ ) направлениях

Наличие конструкционного демпфирования в продольном направлении приводит к падению амплитуды волны (рис. 4).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00014-а и гранта РФФИ № 18-01-00127-а.

### Литература

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004 472 с.
2. Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. Stanford, CA: Parabolic Press, 1975. 271 p.
3. Блинкова А.Ю., Ковалева И.А., Могилевич Л.И., Попов В.С. Распространение волн деформации в двух упругих цилиндрических оболочках, между которыми находится вязкая жидкость // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 7-12.
4. Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическое моделирование динамики взаимодействия слоя вязкой жидкости в кольцевой щели со стенкой, окруженной упругой средой // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. № 2. С. 346-350.
5. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Моделирование колебаний и волн в цилиндрической оболочке с вязкой несжимаемой жидкостью внутри нее // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 13-19.
6. Mogilevich L. I., Popov V. S. Mathematical modeling of incompressible viscous liquid layer interaction dynamics in an annular slit with its wall, surrounded by elastic medium//IEEE Conference Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Omsk, 2016) DOI: 10.1109/Dynamics.2016.7819050.
7. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64 - 72.
8. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2004. № 5. С. 179-190.
9. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия пульсирующей вязкой жидкости со стенками щелевого канала, установленного на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 1. С. 15-23.
10. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Попов В.С., Плаксина И.В. Задачи гидроупругости для трубы кольцевого сечения с упругой, геометрически нерегулярной внешней оболочкой при воздействии давления // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. № 3. С. 70-76.
11. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Колебания гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением под действием

- ударных нагрузок со стороны поршневой группы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 100-106.
12. Попов В.С. Колебания ребристой оболочки, окруженной слоем вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Саратовского госагроуниверситета им. Н.И. Вавилова. 2003. № 4. С. 47-50.
13. Попов В.С., Попова А.А., Волов М.И. Математическое моделирование взаимодействия ламинарного пульсирующего потока с цилиндрической ребристой оболочкой, по которой он движется // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2010. № 1 (36). С. 51-66.
14. Попов В.С. Исследование динамики взаимодействия пульсирующего ламинарного потока жидкости с упругой цилиндрической оболочкой // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2007. № 1 (33). С. 72-80.
15. Mogilevich L.I., Popov V.S., Kondratov D.V., Rabinskiy L.N. Bending oscillations of a cylinder, surrounded by an elastic medium and containing a viscous liquid and an oscillator // Journal of Vibroengineering. 2017. Т. 19. № 8. С. 5758-5766.
16. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ. 1990. 310 с.
17. Овчаров А.А., Брылев И.С. Математическая модель деформирования нелинейно упругих подкрепленных конических оболочек при динамическом нагружении // Современные проблемы науки и образования. 2014. №3 URL: [www.science-education.ru/ru/article/view?id=13235](http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=13235).
18. Каудерер К. Нелинейная механика.- М.: Издательство иностранной литературы. 1961. 778 с.
19. Фельдштейн В.А. Упругопластические деформации цилиндрической оболочки при продольном ударе // Волны в неупругих средах, Кишинев. 1970. С. 199-204.
20. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Издательство Юрайт. 2018. 439 с.
21. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т. 1999. 132 с.
22. Землянухин А.И. Бочкарев А.В. Могилевич Л.И. Уединенные продольно-изгибные волны в цилиндрической оболочке, взаимодействующие с нелинейно-упругой средой // Вестник Московского государственного университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2018. №1(76). С. 47-60.