

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/24-90

Ссылка для цитирования этой статьи:

Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И., Кондратов Д.В. Нелинейные волны в цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость с учетом инерции ее движения, при воздействии окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования в продольном направлении // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. №1

Выполнено при поддержке гранта РФФИ 19-01-00014 и гранта Президента Российской Федерации МД-756.2018.8

УДК 532.516:539.3:517.957

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ,
СОДЕРЖАЩЕЙ ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ЕЕ
ДВИЖЕНИЯ, ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ОКРУЖАЮЩЕЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ
И КОНСТРУКЦИОННОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ В ПРОДОЛЬНОМ
НАПРАВЛЕНИИ**

Блинков Ю.А.¹, Евдокимова Е.В.², Могилевич Л.И.³, Кондратов Д.В.⁴

¹Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
Россия, Саратов, BlinkovUA@info.sgu.ru

²Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, eev2106@mail.ru

³Саратовский государственный технический университет имени
Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, mogilevich@info.sgu.ru

⁴Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина – филиал
Российской академии народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации, Россия, Саратов,
kondratovdv@yandex.ru

**NONLINEAR WAVES IN A CYLINDER SHELL CONTAINING A VISCOUS
LIQUID WITH INERTIA OF ITS MOVEMENT, UNDER THE IMPACT OF
THE SURROUNDING ELASTIC MEDIUM AND STRUCTURAL DAMPING
IN THE LONGITUDINAL DIRECTION**

Blinkov Y.A.¹, Evdokimova E.V.², Mogilevich L.I.³, Kondratov D.V.⁴

¹Saratov State University, Russia, Saratov, BlinkovUA@info.sgu.ru

²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov,
eev2106@mail.ru

³Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov,
mogilevich@info.sgu.ru

⁴Volga Management Institute named after P.A. Stolypin - a branch of Federal State-Funded Educational Institution of Higher Education Russian Presidential Academy of

National Economy and Public Administration, Russia, Saratov,
kondratovdv@yandex.ru

Аннотация. В настоящей работе развивается метод возмущений для моделирования нелинейных волн деформаций в упругой цилиндрической оболочке, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью с учетом инерции ее движения, окруженной упругой средой и при конструкционном демпфировании в продольном направлении. Наличие окружающей среды приводит к интегро-дифференциальному уравнению, обобщающему уравнение Korteweg - де Вриза, имеющему то же решение в виде уединенной волны - солитона. Оно не содержит произвольного постоянного волнового числа, в отличие от решения уравнения Korteweg - де Вриза. Поведение вязкой несжимаемой жидкости внутри оболочки описывается уравнениями динамики и неразрывности. Они решаются вместе с граничными условиями прилипания жидкости к стенке оболочки. Решение представляется прямым разложением искомых функций по малому параметру задачи гидроупругости и сводится к задаче для уравнения гидродинамической теории смазки. Решение этих уравнений и определяет напряжения со стороны жидкости, действующие на оболочку в продольном направлении и по нормальям. Наличие жидкости в оболочке добавляет в уравнения продольных волн деформаций член уравнения, который не позволяет найти точное решение. Конструкционное демпфирование в продольном направлении добавляет такой же точно член уравнения, что и наличие жидкости. Они имеют разные знаки, когда коэффициент Пуассона меньше $1/2$. В противном случае знаки совпадают. Наличие жидкости и конструкционного демпфирования требуют численного исследования. Численное исследование проводится с использованием современного подхода, основанного на универсальном алгоритме коммутативной алгебры, для интегро-интерполяционного метода. В результате построения разностного базиса Грёбнера сгенерированы разностные схемы типа Кранка-Николсона, полученные с использованием базовых интегральных разностных соотношений, аппроксимирующих исходную систему уравнений. Вычислительный эксперимент показал, что если конструкционное демпфирование и влияние жидкости имеют разные знаки и совпадает по величине, то их влияние исчезает и солитон распространяется не меняя ни направление, ни амплитуду, что совпадает с аналитическим решением. Если конструкционное демпфирование превышает влияние жидкости, то происходит затухание амплитуды волны, а в противном случае происходит рост амплитуды.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки.

Abstract. The present article deals with further developing of perturbation method for deformation non-linear waves in an elastic cylinder shell, filled with viscous incompressible liquid without inertia of its movement, surrounded by an elastic media and under construction damping in longitudinal direction. Surrounding medium presence leads to integral-differential equation, to generalizing Korteweg-de Vries ones and possessing the same soliton in the form of a solitary wave - a soliton. It does not contain an arbitrary constant number unlike Korteweg-de Vries equation solution. The viscous incompressible liquid presence inside the shell behavior is described by means of dynamics and continuity equation, is solved together with boundary conditions liquid adhesion to a shell wall. The solution is presented by direct expansion of unknown function by small parameter of hydroelasticity problem and reduced to the problem for hydrodynamics lubrication theory equations. The equations solution defines the tensions on the part of the liquid, the tensions influence the shell longitudinal and normal directions. The liquid presence in the shell adds to longitudinal deformation waves equations one more equation member, which does not allow to find exact solution. Construction damping in a longitudinal direction adds the same equation

member, like liquid presence does. They possess opposite signs in the case of shell Poisson coefficient being smaller than $1/2$. In contrary case signs coincide. Liquid presence in the shell and construction damping demand for numerical research. The liquid presence leads to the equation, generalizing Korteweg-de Vries equation, lacking the exact solution and demanding numerical investigation. The numerical investigation is carried out with the use of the modern approach, relying on the universal algorithm of commutative algebra for integro-interpolation method. As a result of difference Gröbner basis construction, the difference Crank-Nicolson type schemes are generalized. The schemes were obtained due to the use of basic integral difference correlations, approximating the initial equations system. Computational experiment showed that in the case of construction damping and liquid impact have opposite signs but coincide in value, their influence does not case and a soliton propagates without changing its direction and its amplitude, which coincide analytical solution. If constructive damping exceeds liquid impact, the wave amplitude decreases; in the opposite case the wave amplitude grows.

Keywords: nonlinear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylinder shell

ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие упругих элементов конструкций с жидкостью рассматривалось в разных аспектах. Взаимодействие упругих оболочек с идеальной несжимаемой и сжимаемой жидкостью (газа) исследовано в работах [1,2]. В абсолютно жесткой трубе с круговым сечением ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического поведения по времени перепада давления анализировалось в [3], а при пульсирующем движении вязкой жидкости в соосных упругих оболочках конечной длины - в [4, 5]. В условиях вибрации взаимодействие вязкой несжимаемой жидкости с упругими оболочками исследовалось в [6-9], а с учётом вращения жидкости - в [10-12].

В современной волновой динамике одним из важных направлений является изучение поведения волн деформаций в упругих тонкостенных конструкциях. Проблема распространения волн в газовой динамике и теории упругих оболочек изучается при помощи линеаризованных уравнений. При этом скорость распространения возмущений считается постоянной и равной скорости распространения звука в невозмущенной среде. Однако, ряд явлений, несмотря на малые значения зависимых переменных, целиком определяется зависимостью скорости распространения возмущений от величины зависимых переменных и исследуется на базе нелинейных уравнений. Эти исследования проводятся с помощью методов возмущений, таких как метод сращиваемых асимптотических разложений, метод деформируемых координат, метод многомасштабных разложений.

Впервые уравнения Кортвега-де Вриза для продольных нелинейных волн в стержнях получены в [13], а с учетом диссипативных факторов уравнения Кортвега-де Вриза - Бюргерса для стержней и пластин получено в [14]. Обзор работ о распространение нелинейных волн и экспериментальном обнаружении таких волн приведен в [15].

Волны деформаций в упругих цилиндрических оболочках рассматривались [16-18]. Кроме того, проблемы распространения волн в упругих

и вязкоупругих тонкостенных конструкциях, в том числе в бесконечно длинных цилиндрических оболочках без взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью, рассматривались в [19-21] с позиции теории солитонов. Получение точных решений эволюционных уравнения, включая уравнения распространения уединенных волн, рассмотрено в [22-23].

Ранее в [24-26] были получены математические модели и проведены исследования волновые процессы в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных оболочках, учитывающие влияние вязкой несжимаемой жидкости. Был исследован эффект влияния вязкой несжимаемой жидкости на поведение волны деформации в оболочке в зависимости от коэффициента Пуассона материала оболочки. В частности, выявлен экспоненциальный рост амплитуды волны при наличии жидкости в оболочке из неорганических материалов (различные трубопроводы в технологических сооружениях). В случае органического материала (кровеносные сосуды) волна в жидкости быстро затухает.

Решение поставленной в работе задачи для геометрически нелинейных оболочек представляется актуальным и сложным и имеет важное значение для акустической диагностики и неразрушающего контроля материалов. Во многом интерес к подобным задачам инициирован необходимостью анализа упругих и динамических свойств нанообъектов, в частности, карбоновых.

В настоящей работе развивается метод возмущений для моделирования нелинейных волн деформаций в упругой цилиндрической оболочке, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, окруженной упругой средой и при конструкционном демпфировании в продольном направлении. Показано влияние вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей оболочку, окружающей упругой среды и конструкционного демпфирования на поведение продольных волн деформации в упругой цилиндрической оболочке.

Постановка задачи

Рассмотрим бесконечно длинную упругую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат r , Θ , x записываются, в случае осесимметричного течения, в виде [27]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границе с оболочкой выполняются условия прилипания жидкости согласно подходу Лагранжа

$$\frac{\partial U}{\partial t} = V_x + U \frac{\partial V_x}{\partial x} - W \frac{\partial V_x}{\partial r}, \quad -\frac{\partial W}{\partial t} = V_r + U \frac{\partial V_r}{\partial x} - W \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad (2)$$

где $r = R - W$, t - время; V_r , V_x - проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат; p - давление; ρ - плотность; ν - кинематический коэффициент вязкости; U - продольное упругое перемещение оболочки по оси x ; W - прогиб оболочки, положительный к центру кривизны; R_1 - внутренний радиус оболочки; R - радиус срединной поверхности оболочки; h_0 - толщина оболочки ($h_0 = 2(R - R_1)$) и $h_0 \ll R$.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа-Лява, рассмотрим материал с линейной зависимостью интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций e_i

$$\sigma_i = E e_i \quad (3)$$

здесь E - модуль Юнга.

Кроме того, учтем конструкционное демпфирование в материале оболочки, характеризуемое величиной пропорциональной $\partial U / \partial t$, добавляемой к Даламберовой силе инерции, в продольном направлении [28]

$$\varepsilon_1 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \rho_0 h_0 \frac{\partial U}{\partial t} \quad (4)$$

здесь ε_1 - коэффициент демпфирования; ρ_0 - плотность материала оболочки; μ_0 - коэффициент Пуассона; $\sqrt{E/[\rho_0(1-\mu_0^2)]} = c_0$ - скорость распространения продольных волн в оболочке; l - длина волны.

Уравнение динамики геометрически нелинейной оболочки с учетом (3), (4) записываются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{E h_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{h_0^2}{24} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0 \left(\frac{W}{R} - \frac{1}{2} \frac{W^2}{R^2} - \frac{h_0^2}{24} \frac{W^2}{R^4} \right) \right\} \right\rangle - \\ & - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \varepsilon_1 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \rho_0 h_0 \frac{\partial U}{\partial t} - \left[k_3 \frac{R^2 \rho_0 h_0 c_0^2}{l^4} U - k_2 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2} U^3 \right] = \\ & = -q_x - U \frac{\partial q_x}{\partial x} + W \frac{\partial q_x}{\partial r}; \quad (5) \\ & \frac{E h_0}{1-\mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left(1 + \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \mu_0 \frac{W}{R^2} \left(1 - \frac{W}{R} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{R} \left\{ \mu_0 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \mu_0 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] + \mu_0 \frac{h_0^2}{24} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 - \left(\frac{W}{R} - \frac{1}{2} \frac{W^2}{R^2} - \frac{h_0^2}{24} \frac{W^2}{R^4} \right) \right\} - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{h_0^2}{24} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 - \mu_0 \left(\frac{W}{R} - \frac{1}{2} \frac{W^2}{R^2} - \frac{h_0^2}{24} \frac{W^2}{R^4} \right) \right] \right\} +$$

$$+ \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \left[k_1 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2} W - 2t_1 \rho_0 h_0 c_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + m_0 \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right] = q_n + U \frac{\partial q_n}{\partial x} - W \frac{\partial q_n}{\partial r};$$

Здесь q_x , q_n - напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри оболочки. Выражения в квадратных скобках уравнениях системы (5)

$$-k_3 \frac{R^2 \rho_0 h_0 c_0^2}{l^4} U + k_2 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2} U^3,$$

$$k_1 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2} W - 2t_1 \rho_0 h_0 c_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + m_0 \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (6)$$

характеризуют реакцию упругой среды, в которой расположена труба кругового сечения Власова-Леонтьева [29, 30].

Выражение $-k_3 \frac{R^2 \rho_0 h_0 c_0^2}{l^4} U + k_2 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2} U^3$ - реакция на продольное

перемещение, а слагаемые $k_1 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{l^2} W$ - реакция на сдавливание (сжатие),

$-2t_1 \rho_0 h_0 c_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ - реакция на сдвиг,

$m_0 \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ - инерционная реакция.

Безмерные коэффициенты порядка единицы k_1, k_2, k_3, t_1, m_0 - введены в [30] в размерном виде.

Поверхностные напряжения со стороны жидкости, снесенные на невозмущенную срединную поверхность оболочки ($W = R$) определяются формулами

$$q_x = - \left[\rho v \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R}, \quad q_n = \left[-p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R} \quad (7)$$

Вывод уравнения динамики с учетом наличия жидкости в оболочке

Принимая за характерную длину l - длину волны, перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (5)

$$W = w_m u_3, \quad U = u_m u_1, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t. \quad (8)$$

Здесь w_m , u_m - характерные значения прогиба W и продольного перемещения U . Положим

$$\frac{h_0}{R} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{R^2}{l^2} = O(\varepsilon), \quad \frac{u_m R}{l h_0} = O(1), \quad \frac{w_m}{h_0} = O(1), \quad (9)$$

$$\varepsilon_1 = O(\varepsilon), k_1 = O(1), k_3 = O(1), k_2 = O(1), t_1 = O(1), m_0 = O(1),$$

где ε - малый параметр задачи (5).

Применим метод асимптотических разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (10)$$

где c - безразмерная неизвестная скорость волны, τ - быстрое время, а зависимые переменные в виде разложения по малому параметру ε

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \dots \quad (11)$$

Подставляя (8), (10), (11) в уравнения (5) с учетом оценок (9), получим в нулевом приближении по ε линейную систему уравнений

$$-\mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{30}}{\partial \xi} - c^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} = 0,$$

из которой следует связь

$$\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \quad (12)$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2 \quad (13)$$

Из следующего приближения по ε , учитывая (12) и (13), находится уравнение, являющееся разрешающим, для u_{10}

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m \sqrt{1 - \mu_0^2}}{l \varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} [1 + m_0] - \frac{\mu_0^2}{\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{t_1 R^2}{\varepsilon l^2} \right\} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} +$$

$$+ \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{k_1 R^2}{\varepsilon l^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \frac{k_3 R^2}{\varepsilon l^2} u_{10} + \frac{k_2}{\varepsilon} \frac{u_m^2}{R^2} u_{10}^3 + \quad (14)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = - \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \left[q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right]$$

В случае отсутствия жидкости правая часть уравнения (14), равна нулю и получается известное уравнение - модифицированное уравнение Гарднера-

Бюргерса-Островского для $\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = \frac{1}{\mu_0} \frac{w_m l}{u_m R} u_{30}$.

Определение напряжений, действующих со стороны жидкости

Для определения правой части уравнения (14) введем безразмерные переменные и параметр

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, V_x = w_m \frac{c_0}{R_1} v_x, r^* = \frac{r}{R}, p = \frac{\rho \nu c_0 l w_m}{R^3} P, \psi = \frac{R}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right). \quad (15)$$

Подставляя (15) в уравнение гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорости и давление в виде разложения по малому параметру ε

$$v_x = v_x^0 + \varepsilon v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \varepsilon v_r^1 + \dots, \quad P = P^0 + \varepsilon P^1 + \dots \quad (16)$$

В нулевом приближении по ψ ($\psi = 0$ - гидродинамическая теория смазки) и в нулевом приближении по ε , получаем уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right); \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (17)$$

и граничные условия вида

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3}{\partial t^*}; v_x^0 = \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*}, \text{ где } r^* = 1 \quad (18)$$

$$r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0; r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0, \text{ где } r^* = 0.$$

На первом шаге итерации полагаем $\psi \frac{R_1 c_0}{\nu} = 0$, опустим первое слагаемое в уравнении (19) и получим уравнения [30]

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right); \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (20)$$

Решение уравнений гидродинамики легко получить (это классические уравнения гидродинамической теории смазки). Из уравнений движения с учетом граничных условий имеем

$$P^0 = 16 \int \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - \int u_3 dx^* \right] dx^*, \quad (21)$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} = (r^{*2} - 1) 4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - \int u_3 dx^* \right] + \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}}$$

Подставляя найденные значения $\frac{\partial v_x^0}{\partial t^*}$ в уравнения динамики жидкости (22), на втором шаге итерации найдем [30]:

$$\begin{aligned}
 P^0 &= \frac{\partial}{\partial t^*} \int \left[16 \left(\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - \int u_3 dx^* \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{2}{3} \psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - 4 \int u_3 dx^* \right) \right] dx^*, \\
 \left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} &= \frac{\partial}{\partial t^*} \left[8 \left(\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - \int u_3 dx^* \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{3} \psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - \int u_3 dx^* \right) \right].
 \end{aligned} \tag{23}$$

Учитывая, что введены переменные $\xi = x^* - ct^*$ и $\tau = \varepsilon t^*$, $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$, найдем с точностью до ε

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P^0}{\partial \xi} &= \sqrt{1 - \mu_0^2} \left[8 \left(2u_3 - \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{3} \psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \left(8 \frac{\partial u_3}{\partial \xi} - \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} \right) \sqrt{1 - \mu_0^2} \right].
 \end{aligned} \tag{24}$$

При этом

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} &= \sqrt{1 - \mu_0^2} \left[4 \left(2u_3 - \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{6} \psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \left(2 \frac{\partial u_3}{\partial \xi} - \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} \right) \sqrt{1 - \mu_0^2} \right].
 \end{aligned} \tag{25}$$

Тогда учитывая, что $\frac{w_m l}{u_m R_1} u_{30} = \mu_0 u_{10\xi}^2$ при $R_1 = R$ в силу малости ψ, λ получаем

$$\begin{aligned}
 q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} &= \frac{\nu}{R c_0} \rho c_0^2 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} [1 - 2\mu_0]^2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \\
 &- \frac{R}{l} \rho c_0^2 \frac{1}{6} (1 - \mu_0^2) [(1 - 2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{u_m}{l} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Подставляя (26) в уравнение (14), окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} [1+m_0] - \frac{\mu_0^2}{\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{t_1 R^2}{\varepsilon l^2} \right\} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + \\ + \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{k_1 R^2}{\varepsilon l^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \frac{k_3 R^2}{\varepsilon l^2} u_{10} + \frac{k_2 u_m^2}{\varepsilon R^2} u_{10}^3 + \\ + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = -2(1-2\mu_0)^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon R c_0} \frac{\nu}{R c_0} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + \\ + \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \frac{R}{l} \frac{1}{12} \sqrt{1-\mu_0^2} [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (27)$$

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = c_1 \varphi, \quad \eta = c_2 \xi, \quad t = c_3 \tau \quad (28)$$

позволяет записать уравнение (27) в виде

$$\varphi_t + 6\varphi\varphi_\eta + \varphi_{\eta\eta\eta} + (s_2 - s_6)\varphi_\eta + (s_3 + s)\varphi - \int \varphi d\eta + s_5 (\int \varphi d\eta)^3 = 0 \quad (29)$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 определяются при подстановке (28) в (27) и имеют вид

$$c_1 = \sigma_0^{-1} \sigma_4^{1/2} \sigma_1^{1/2}, \quad c_2 = \sigma_4^{1/4} \sigma_1^{-1/4}, \quad c_3 = \sigma_4^{3/4} \sigma_1^{1/4},$$

при этом вводится обозначение

$$s_2 = \sigma_2 c_2 c_3^{-1}, \quad s_3 = \sigma_3 c_3^{-1}, \quad s = \sigma c_3^{-1}, \quad s_5 = \sigma_5 c_1^2 c_2^{-3} c_3^{-1}, \quad s_6 = \sigma_6 c_2 c_3^{-1},$$

где

$$\begin{aligned} 6\sigma_0 = \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{k_1 R^2}{\varepsilon l^2}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}, \quad \sigma_4 = \frac{k_3 R^2}{\varepsilon l^2}, \quad \sigma_5 = \frac{k_2 u_m^2}{\varepsilon R^2}, \\ \sigma_1 = \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} [1+m_0] - \frac{\mu_0^2}{\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{t_1 R^2}{\varepsilon l^2} \right\}, \quad \sigma = 2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\nu}{R c_0} (1-2\mu_0)^2, \\ \sigma_6 = \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \frac{R}{l} \frac{1}{12} \sqrt{1-\mu_0^2} [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \end{aligned}$$

Отметим, что при отсутствии конструкционного демпфирования имеем $s_3 = 0$; $s = 0$ при $\mu_0 = \frac{1}{2}$ для несжимаемого материала, такого как резина или при отсутствии жидкости.

При отсутствии конструкционного демпфирования и $\mu_0 = \frac{1}{2}$ ($s_3 = s = 0$) получим из (29) уравнение

$$\varphi_t + 6\varphi\varphi_\eta + \varphi_{\eta\eta\eta} + (s_2 - s_6)\varphi_\eta - \int \varphi d\eta + s_5 (\int \varphi d\eta)^3 = 0 \quad (30)$$

которое имеет точное решение

$$\varphi = \frac{1}{2s_5} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{s_5}} \left[\eta - \left(\frac{1}{s_5} + 2s_5 + s_2 - s_6 \right) t \right] \right\}. \quad (31)$$

Из вида решения (31) следует, что инерция движения жидкости (s_6) уменьшает скорость волны деформации.

В случае отсутствия окружающей упругой среды, конструкционного демпфирования и влияния жидкости уравнение (32) превращается в уравнение Кортевега - де Вриза с точным решением

$$\varphi = \frac{1}{2s_5} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{s_5}} \left[\eta - \left(\frac{1}{s_5} \right) t \right] \right\} \quad (33)$$

при произвольном значении s_5 . При наличии конструкционного демпфирования (s_3 отлично от нуля) и μ_0 отлично от $\frac{1}{2}$ (s отлично от нуля) численное исследование уравнения (27) при начальном условии

$$\varphi(\eta, 0) = \frac{1}{2s_5} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{s_5}} \eta \right\}, \quad (31)$$

позволит оценить влияние жидкости и конструкционного демпфирования.

Для численного моделирования рассмотрим разностную схему для уравнений (34), аналогичную схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + 3 \frac{(u_{j+1}^{2n+1} - u_{j-1}^{2n+1}) + (u_{j+1}^{2n} - u_{j-1}^{2n})}{4h} + \\ & + ((u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + \\ & + (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)) / 4h^3 + \\ & + (s_2 - s_6) \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} \\ & + (s_3 + s) \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} + \\ & - \frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2} + s_5 \frac{U_j^{3n+1} + U_j^{3n}}{2} = 0, \\ & \frac{U_{j+2}^n - 2U_{j+1}^n + U_j^n}{h^2} - \frac{u_{j+2}^n - u_j^n}{2h} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

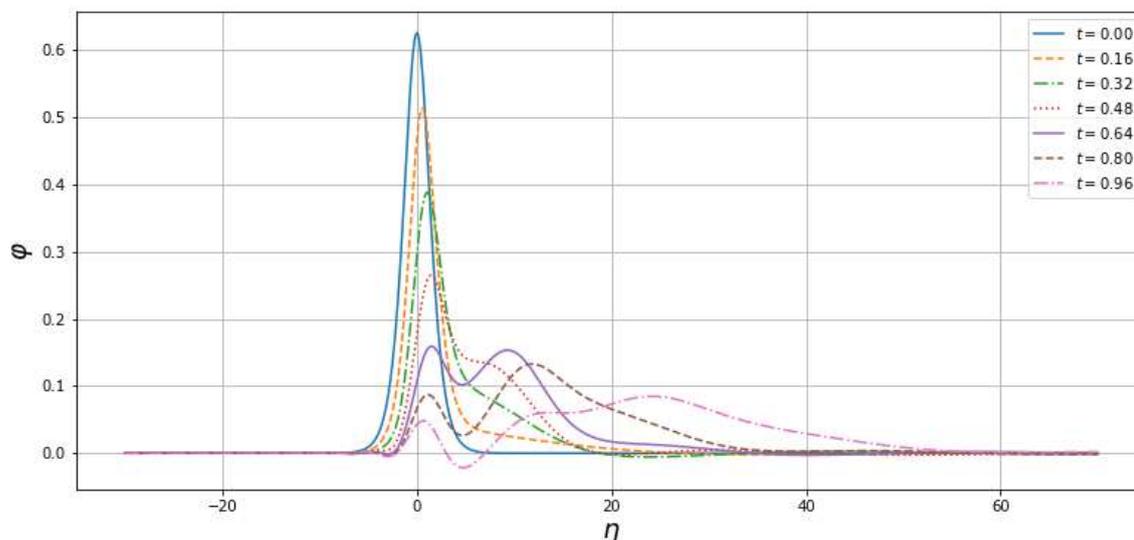


Рис.2. Численное решение уравнений (28) с начальными условиями (31) при $s_2 - s_6 = 1$, $s_3 + s = 1$ и $s_5 = 0.8$.

Заключение

Упругая окружающая среда увеличивает, а инерция движения жидкости уменьшает скорость волны деформации в оболочке. Продольное демпфирование и вязкое трение в жидкости уменьшают амплитуду волны.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-01-00014 и гранта Президента Российской Федерации МД-756.2018.8.

Литература

1. Клигман Е.П., Клигман И.Е., Матвеев В.П. Спектральная задача для оболочек с жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46, № 6. С. 128-135.
2. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Анализ устойчивости цилиндрических оболочек, содержащих жидкость с осевой и окружной компонентами скорости // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 5. С. 155-165.
3. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах / Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 296 с. С. 149-171.
4. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при отсутствии торцевого истечения в условиях вибрации // Вестник СГТУ. 2007. Т. 3, №2(27). С. 15-23.
5. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И. Исследование амплитудных частотных характеристик колебаний упругих стенок трубы кольцевого профиля при пульсирующем движении вязкой жидкости в

- условиях жесткого защемления по торцам // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. No 3. С. 15-21.
6. Païdoussis M.P., Nguyen V.B., Misra A.K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // J. Fluids Struct. 1991. vol. 5, iss. 2. pp. 127-164. DOI: 10.1016/0889-9746(91)90454-W
 7. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part III: Steady viscous effects on shells conveying fluid // J. Fluids Struct. 2002. vol. 16, iss. 6. pp. 795-809. DOI: 10.1006/jfls.2002.0446
 8. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. Cambridge University Press, 2008. 374 p. DOI: 10.1017/CBO9780511619694
 9. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // МТТ. 2004. No 5. С. 179-190.
 10. Бочкарев С.А. Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью // Вычисл. мех. сплош. сред. 2010. Т. 3, No 2. С. 24-33. DOI: 10.7242/1999-6691/2010.3.2.14
 11. Лекомцев С.В. Конечно-элементные алгоритмы расчета собственных колебаний трехмерных оболочек // Вычисл. мех. сплош. сред. 2012. Т. 5, No 2. С. 233-243. DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.2.28
 12. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. 2013. Т. 6, No 1. С. 94-102. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.1.12
 13. Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods // J. Math. Phys. Sci. 1970. vol. 4. pp. 64-73.
 14. Nariboli G.A., Sedov A. Burger's-Korteweg-De Vries equation for viscoelastic rods and plates // J. Math. Anal. and Appl. 1970. vol. 32. pp. 661--667.
 15. Ерофеев В.И., Кажяев В.В. Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в стержне // Вычисл. мех. сплош. сред. 2017. Т. 10, No 2. С. 127-137. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.11
 16. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, No 1. С. 52-58.
 17. Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. 2002. Т. 48, No 6. С. 725-740.
 18. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Шешенин С.Ф. Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стесненным вращением // Вычисл. мех. сплош. сред. 2009. Т. 2, No 4. С. 67-75. DOI: 10.7242/1999-6691/2009.2.4.32
 19. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит. 2009. 320 с.

20. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Павлов И.С. Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в зернистой среде // Вычисл. мех. сплош. сред. 2013. Т. 6, No 2. С. 140-150. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.2.17
21. Землянухин А.И., Бочкарёв А.В. Метод возмущений и точные решения уравнений нелинейной динамики сред с микроструктурой // Вычисл. мех. сплош. сред. 2016. Т. 9, No 2. С. 182-191. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.2.16
22. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Непрерывные дроби, метод возмущений и точное решение нелинейных эволюционных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2016. Т. 24, No 4. pp. 71–85. DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-71-85
23. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Метод Ньютона построения точных решений нелинейных дифференциальных и неинтегрируемых эволюционных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, No 1. pp. 64–83. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-64-83
24. Блинкова А.Ю., Блинков Ю.А., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними, с учетом рассеяния энергии // Вычисл. мех. сплош. сред. 2013. Т. 6, No 3. С. 336-345. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.38
25. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Ковалев А.Д., Могилевич Л.И. Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2012. Т. 12, No 2. С. 12-18. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197
26. Блинкова А.Ю., Блинков Ю.А., Иванов С.В., Могилевич Л.И. Нелинейные волны деформаций в геометрически и физически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, No 2. С. 193-202. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-193-202
27. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
28. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.
29. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. 490 с.
30. Агеев Р.В., Евдокимова Е.В., Ковалева И.А., Могилевич Л.И. Динамика осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубе кругового и кольцевого сечений // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2017. – № 3; URL: mathmod.esrae.ru/15-50