

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/24-95](http://mathmod.esrae.ru/24-95)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Блинков Ю.А., Месянжин А.В., Могилевич Л.И., Кондратов Д.В. Распространение волны в коаксиальных нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость с учетом инерции ее движения // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. №1

*Выполнено при поддержке гранта РФФИ 19-01-00014 и гранта Президента Российской Федерации МД-756.2018.8*

УДК 532.516:539.3

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ В КОАКСИАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ, СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

Блинков Ю.А.<sup>1</sup>, Месянжин А.В.<sup>2</sup>, Могилевич Л.И.<sup>3</sup>, Кондратов Д.В.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,  
Россия, Саратов, [BlinkovUA@info.sgu.ru](mailto:BlinkovUA@info.sgu.ru)

<sup>2</sup>Саратовский ОАО «Конструкторское бюро промышленной автоматики»,  
Россия, Саратов, [a.v.mesyanzhin@gmail.com](mailto:a.v.mesyanzhin@gmail.com)

<sup>3</sup>Саратовский государственный технический университет имени  
Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, [mogilevich@sgu.ru](mailto:mogilevich@sgu.ru)

<sup>4</sup>Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина – филиал  
Российской академии народного хозяйства и государственной службы  
при Президенте Российской Федерации, Россия, Саратов,  
[kondratovdv@yandex.ru](mailto:kondratovdv@yandex.ru)

## WAVE PROPAGATION IN COAXIAL NON-LINEAR ELASTIC CYLINDRICAL SHELLS, CONTAINING VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID WITH INERTIA OF ITS MOVEMENT

Blinkov Y.A.<sup>1</sup>, Mesyanzhin A.V.<sup>2</sup>, Mogilevich L.I.<sup>3</sup>, Kondratov D.V.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Russia, Saratov, [BlinkovUA@info.sgu.ru](mailto:BlinkovUA@info.sgu.ru)

<sup>2</sup>Industrial Automatics Design Bureau JSC, Russia, Saratov,  
[a.v.mesyanzhin@gmail.com](mailto:a.v.mesyanzhin@gmail.com)

<sup>3</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov,  
[mogilevich@sgu.ru](mailto:mogilevich@sgu.ru)

<sup>4</sup>Volga Management Institute named after P.A. Stolypin - a branch of Federal State-  
Funded Educational Institution of Higher Education Russian Presidential Academy of  
National Economy and Public Administration, Russia, Saratov,  
[kondratovdv@yandex.ru](mailto:kondratovdv@yandex.ru)

**Аннотация.** Существуют модели волновых движений в бесконечно длинных

геометрически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость без учета инерции ее движения, в виде обобщенных уравнений Кортевега де Вриза (КдВ). Также, получены математические модели волнового процесса в соосных цилиндрических упругих оболочках, с учетом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками без учета инерции ее движения, в виде системы обобщенных уравнений КдВ. В настоящей работе проведено исследование модели волновых явлений двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочек, содержащих вязкую несжимаемую жидкость с учетом инерции ее движения, как между ними, так и внутри. Для рассмотренных систем уравнений получены разностные схемы типа Кранка-Николсона. Создан комплекс программ, на основе разработанного вычислительного алгоритма, позволяющий получить численные решения задач Коши и построить их графики.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки.

**Abstract.** There exist models of wave motions in infinitely long geometrically non-linear shells, containing viscous incompressible liquid without inertia of its movement, in the form of generalized KdV equations. Also, mathematical models of the wave process in cylindrical elastic shells. These models differ from the known ones by the consideration of incompressible liquid presence between the shells, based on the related hydroelasticity problems. These problems are described by shells dynamics and viscous incompressible liquid equations without inertia of its movement in the form of generalized KdV equations system. The paper presents the investigation of wave occurrences of two geometrically non-linear elastic coaxial cylindrical shells, containing viscous incompressible liquid with inertia of its movement between them, as well as inside. The difference schemes of Crank-Nicholson type are obtained for the considered equations system. On the basis of computation algorithm the complex of programs, permitting to construct graphs and obtain numerical solutions, was made.

Keywords: nonlinear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylinder shell

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Широкое практическое применение упругих коаксиальных оболочек в технике диктует необходимость требует исследования волновых процессов, протекающих в них. Так в [1] были проведено исследование ламинарного движения вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического по времени перепада давления в абсолютно жесткой трубе кругового сечения. В [2-5] проведены исследования распространения волн для упругой цилиндрической оболочки, не содержащей жидкости.

В развитии исследований [2-5], в работе [6] проведено математическое моделирования распространения волн в бесконечно длинных геометрически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость. Полученные математические модели задач гидроупругости были записаны в виде обобщенных уравнений Кортевега де Вриза (КдВ). Исследование показало степень влияния наличия вязкой несжимаемой жидкости в системе на распространение волн. Так выявлен процесс быстрого затухания волны при наличии вязкой жидкости.

Следует отметить, что в [7], с помощью применения метода возмущений по малому параметру задачи, было описано распространение волн в

бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках, в виде системы обобщенных уравнений КдВ. Однако, в указанных работах не производился учет влияния инерции вязкой несжимаемой жидкости.

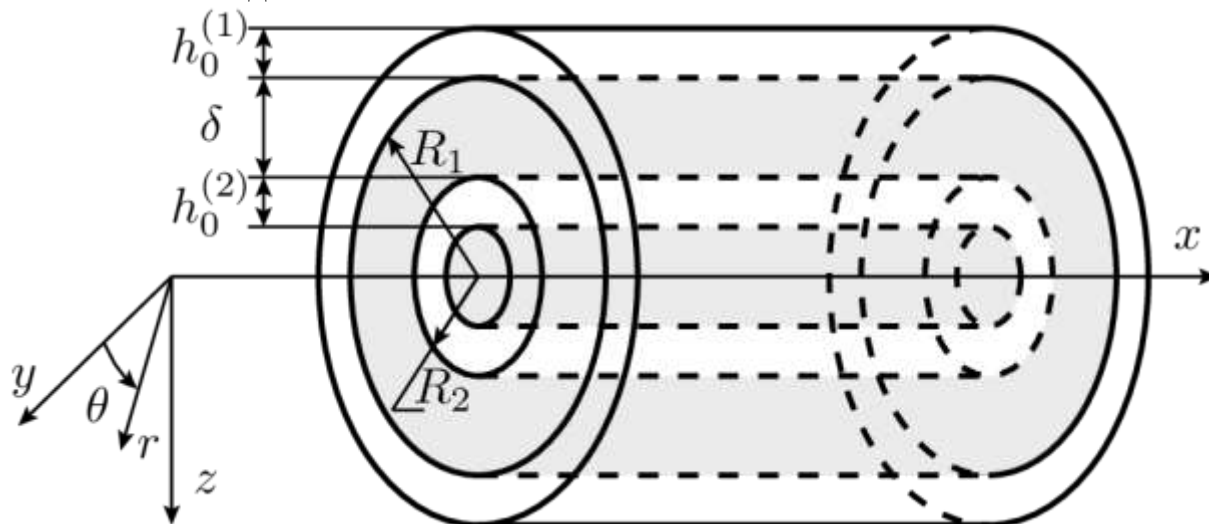


Рис.1. Исследуемая система

Рассмотрим две коаксиальные бесконечно длинные упругие оболочки на рисунке 1. Внутри оболочек находится вязкая несжимаемая жидкость. Ширина щели, занимаемой жидкостью  $\delta$ , радиус срединной поверхности оболочки  $R$ ;  $R_1 = R^{(1)} - \frac{h_0^{(1)}}{2}$  - внутренний радиус внешней оболочки;  $R_2 = R^{(2)} + \frac{h_0^{(2)}}{2}$  - внешний радиус внутренней оболочки;  $R_3 = R^{(2)} - \frac{h_0^{(2)}}{2}$  - внутренний радиус внутренней оболочки,  $R^{(1)}, R^{(2)}$  - радиусы срединных поверхностей внешней и внутренней оболочек;  $h_0^{(1)}, h_0^{(2)}$  - их толщины. Все механические перемещения внутренней оболочки обозначены индексом (2) сверху, а внешней - индексом (1). Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат  $(r, \Theta, x)$  в случае осесимметричного течения [8, 9] записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границе оболочек и жидкости на рис. 1 при  $r = R_i - W^{(i)}$  выполняются условия прилипания жидкости [9]

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}, \quad V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}. \quad (2)$$

здесь  $t$  - время;  $r, x$  - цилиндрические координаты;  $V_r, V_x$  - проекции на оси цилиндрической системы координат вектора скорости;  $U^{(i)}$  - продольное упругое перемещение оболочки по оси  $x$ ;  $W^{(i)}$  - прогиб оболочки, положительный к центру кривизны;  $R_1$  - внутренний радиус внешней оболочки;  $R_2$  - внешний радиус внутренней оболочки ( $R_1 = R_2 + \delta$ );  $\delta$  - толщина слоя жидкости при кольцевом сечении трубы,  $i=1$  относится к внешней, а  $i=2$  относится к внутренней оболочке;  $p$  - давление в жидкости;  $\rho$  - плотность жидкости;  $\nu$  - кинематический коэффициент вязкости.

Уравнения динамики оболочки записываются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \left[ U_x^{(i)} + \frac{1}{2} (U_x^{(i)})^2 + \frac{1}{2} (W_x^{(i)})^2 + \frac{(h_0^{(i)})^2}{24} (W_{xx}^{(i)})^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right]_x - \\ & - \rho_0 h_0^{(i)} U_{tt}^{(i)} + q_x^{(i)} + \tilde{q}_x (i-1) = 0 \\ & \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \left\langle \frac{(h_0^{(i)})^2}{12} (W_{xx}^{(i)} + U_x^{(i)} W_{xx}^{(i)})_{xx} - W_x^{(i)} \left( U_x^{(i)} + \frac{1}{2} (U_x^{(i)})^2 + \frac{1}{2} (W_x^{(i)})^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(h_0^{(i)})^2}{24} (W_{xx}^{(i)})^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right\rangle_x - \frac{1}{R} \left( \mu_0 U_x^{(i)} + \frac{1}{2} \mu_0 (U_x^{(i)})^2 + \frac{1}{2} \mu_0 (W_x^{(i)})^2 + \right. \\ & \left. + \frac{(h_0^{(i)})^2}{24} \mu_0 W_{xx}^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \rangle + \rho_0 h_0^{(i)} W_{tt}^{(i)} - (-1)^{i-1} q_n - \tilde{q}_n (i-1) \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $h_0^{(i)}$  - толщины оболочек;  $E$  - модуль Юнга;  $\mu_0$  - коэффициент Пуассона,  $\rho_0$  - плотность;  $U^{(i)}, W^{(i)}$  - продольное перемещение и прогиб, положительный к центру кривизны,  $x$  - продольная координата;  $t$  - время;  $q_x^i, q_n$  - напряжения со стороны жидкости, которая находится между оболочками;  $\tilde{q}_x, \tilde{q}_n$  - напряжения со стороны жидкости, которая находится во внутренней оболочке. Нижние индексы у перемещений обозначают соответствующие частные производные.

Напряжения со стороны слоя жидкости определяются формулами

$$\begin{aligned}
 q_n &= \left[ P_{rr} \cos \left( -\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r \right) + P_{rx} \cos \left( -\bar{n}^{(i)}, \bar{i} \right) \right]_{r=R_i - W^{(i)}} \\
 q_x &= - \left[ P_{rx} \cos \left( -\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r \right) + P_{xx} \cos \left( -\bar{n}^{(i)}, \bar{i} \right) \right]_{r=R_i - W^{(i)}} \quad (4) \\
 P_{rr} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}; P_{rx} = \rho\nu \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right); P_{xx} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_x}{\partial x}
 \end{aligned}$$

В подходе Эйлера здесь имеем

$$\begin{aligned}
 \cos \left( -\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r \right) &= \frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|}, \quad \cos \left( -\bar{n}^{(i)}, \bar{i} \right) = -\frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}, \\
 \cos \left( -\bar{n}, \bar{n}_r \right) &= \frac{1}{\left( 1 + \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos \left( -\bar{n}, \bar{i} \right) = -\frac{\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}}{\left( 1 + \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (5) \\
 |\bar{N}| &= (R_i - W^{(i)}) \left( 1 + \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{n}$  - нормаль к срединной поверхности  $i$ -ой оболочки,  $\bar{n}_r, \bar{i}$  - орты базиса  $(r, \Theta, x)$  цилиндрической системы координат, центр которой расположен на геометрической оси. Если снести напряжения на невозмущенную поверхность оболочки, то можно считать  $-\bar{n} = \bar{n}_r$  и  $\cos \left( -\bar{n}, \bar{n}_r \right) = 1$ ,

$\cos \left( -\bar{n}, \bar{i} \right) = 0$ . Напряжения  $\tilde{q}_x, \tilde{q}_n$  со стороны жидкости, которая находится во внутренней оболочке определяется теми же формулами (4), (5), в которых плотность жидкости  $\tilde{\rho}$ , коэффициент кинематической вязкости  $\tilde{\nu}$ .

## 2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ НАЛИЧИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ УПРУГИМИ ОБОЛОЧКАМИ И ВО ВНУТРЕННЕЙ ОБОЛОЧКЕ

Принимая длину волны  $l$  за характерный размер и обозначая амплитуду продольного перемещения  $u_m$  и прогиба  $w_m$ , переходим к безразмерным переменным.

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, t^* = \frac{c_0}{l} t, x^* = \frac{x}{l}, c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \quad (6)$$

Здесь  $c_0$  скорость звука в оболочке. Полагаем

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \frac{R^{(i)}}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon). \quad (7)$$

Введем полухарактеристические (бегущие) координаты и растянутое время

$$\xi = x^* - ct^*, \tau = \varepsilon t^* \quad (8)$$

где  $c$  - неизвестная безразмерная скорость волны. Тогда, разделив обе части 1-го уравнения (3) на

$$\frac{1}{l} \frac{E h_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} = \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \frac{1}{l} \quad (9)$$

получим

$$\left\langle \frac{u_m}{l} \left[ u_{1\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} + \frac{1}{2} \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)2} + \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi}^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{12l^2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{\xi\xi}^{(i)2} \right] \right\rangle_{\xi} - \quad (10)$$

$$- \frac{u_m}{l} (c^2 u_{1\xi\xi}^{(i)} - 2\varepsilon c u_{1\xi\tau}^{(i)} + \varepsilon^2 u_{1\tau\tau}^{(i)}) = - \frac{l(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}.$$

Разделив обе части 2-го уравнения (3) на

$$\frac{1}{R^{(i)}} \frac{E h_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} = \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{R^{(i)}} \quad (11)$$

получим

$$\frac{u_m}{l} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12l^2} \left[ \frac{w_m R^{(i)}}{u_m l} u_{3\xi\xi}^{(i)} \left( 1 + \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)} \right) \right]_{\xi\xi} + \left[ -\mu_0 u_{1\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} - \right. \right. \quad (12)$$

$$\left. \left. - \mu_0 \frac{1}{2} \frac{u_m}{l} u_{1\xi}^{(i)2} - \mu_0 \frac{1}{2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi}^{(i)2} - \mu_0 \frac{1}{2} \frac{h_0^{(i)2}}{24l^2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi\xi}^{(i)2} \right] + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{h_0^{(i)2}}{24l^2} \frac{w_m^2}{u_m l} u_{3\xi\xi}^{(i)2} \right\rangle_{\xi} + \frac{w_m R^{(i)}}{l^2} (c^2 u_{3\xi\xi}^{(i)} - 2\varepsilon c u_{3\xi\tau}^{(i)} + \varepsilon^2 u_{3\tau\tau}^{(i)}) =$$

$$= R^{(i)} \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}.$$

Разложим упругие перемещения по степеням  $\varepsilon = \frac{u_m}{l}$ :

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (12)$$

подставим их в уравнения, разделим обе части уравнений на  $\varepsilon = \frac{u_m}{l}$  и, оставляя

члены  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$ , получим

$$\begin{aligned} & \left( u_{10\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right)_{\xi} + \varepsilon \left\{ u_{11\xi\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} + \frac{1}{2} \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} \right\}_{\xi} - \\ & - c^2 u_{10\xi\xi}^{(i)} - \varepsilon c^2 u_{11\xi\xi}^{(i)} + 2\varepsilon c u_{10\xi\tau}^{(i)} = - \frac{l^2 (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}, \\ & - \mu_0 u_{10\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} + \varepsilon \left\langle - \mu_0 u_{11\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} \right\rangle + \\ & + \frac{w_m R^{(i)}}{u_m l} c^2 u_{30\xi\xi}^{(i)} = R^{(i)} l \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Приравниваем к нулю коэффициенты при  $\varepsilon^0$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} u_{10\xi\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30\xi}^{(i)} - c^2 u_{10\xi\xi}^{(i)} &= 0 \\ - \mu_0 u_{10\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Из этой системы следует

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_{10\xi}^{(i)}, \quad (1 - \mu_0^2 - c^2) u_{10\xi\xi}^{(i)} = 0 \quad (15)$$

Следовательно  $u_{10}$  - произвольная функция, а безразмерная скорость волны  $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$  т. к.  $c^2 = 1 - \mu_0^2$ . Приравниваем коэффициенты при  $\varepsilon$  в правых и левых частях уравнений и учитываем предыдущие результаты, тогда получаем

$$\begin{aligned} & \left[ \mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} \right]_{\xi} + \frac{1}{2} \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi\xi}^{(i)2} + 2\sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\tau\xi}^{(i)} = - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1)), \\ & - \mu_0 u_{11\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \mu_0 (1 - \mu_0^2) u_{10\xi\xi\xi}^{(i)} = \\ & = R^{(i)} l \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}. \end{aligned} \quad (16)$$



Умножим обе части второго уравнения на  $\mu_0$  и продифференцируем по  $\xi$ , получим систему

$$\left( \mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31\xi}^{(i)} \right)_\xi + \frac{1}{2} \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi\xi}^{(i)2} + 2\sqrt{1-\mu_0^2} u_{10\xi\tau}^{(i)} = -\frac{l^2 (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2},$$

$$\left( \mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31\xi}^{(i)} \right)_\xi + \left[ \frac{1}{2} \mu_0^2 \frac{u_m}{l \varepsilon} u_{10\xi}^{(i)2} \right]_\xi +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \mu_0^2 (1-\mu_0^2) u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(i)} = \frac{R^{(i)} l}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \mu_0 \left( (-1)^{i-1} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} + (i-1) \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} \right). \quad (17)$$

вычтем из первого уравнения второе и разделив обе части этого уравнения на  $2\sqrt{1-\mu_0^2}$ , получим систему уравнений

$$u_{10\xi\tau}^{(i)} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(i)} u_{10\xi\xi}^{(i)} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(i)} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[ q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1) - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \left( \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^{i-1} + (i-1) \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} \right) \right] \quad (17)$$

В случае, когда жидкость отсутствует, правая часть уравнений становится равна нулю, и получаются независимые уравнения КдВ. Надо определить правую часть, для чего необходимо решить уравнения гидродинамики для случая кольцевого и кругового сечения трубы.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ОБОЛОЧКИ СО СТОРОНЫ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

#### КОЛЬЦЕВОЕ СЕЧЕНИЕ

Введем безразмерные переменные и параметры

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x, r = R_2 + \delta r^*, t^* = \frac{c_0}{l} t, x^* = \frac{x}{l}$$

$$p = \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} P + p_0, \psi = \frac{\delta}{R_2} = o(1), \lambda = \frac{w_m}{\delta} = \frac{w_m R_2}{R_2 \delta} = o\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\right) \quad (18)$$

$$\frac{w_m}{R_2} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_2} = \lambda \psi, \frac{w_m}{l} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \lambda \psi \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \psi \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$



Во введенных безразмерных переменных получим уравнения гидродинамики

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \left\{ \frac{\delta c_0}{\nu} \frac{\delta}{l} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t^*} + \lambda \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right) \right] \right\} + \frac{\partial P}{\partial r^*} = \\ & = \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \frac{\psi}{(1+\psi r^*)} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} - \frac{\psi^2 v_r}{(1+\psi r^*)^2} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^{*2}} \right]; \\ & \frac{\delta c_0}{\nu} \frac{\delta}{l} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left( v_r \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \\ & = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{\psi}{(1+\psi r^*)} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^{*2}}; \\ & \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\psi v_r}{(1+\psi r^*)} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

и граничные условия

$$v_x = \frac{\delta}{l} \frac{u_m}{w_m} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t^*}; v_r = -\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t^*} \quad (20)$$

при  $r^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}$  и  $r^* = -\lambda u_3^{(2)}$ .

Полагая теперь  $\frac{\delta}{l} = 0$ ,  $\psi = \frac{\delta}{R_2} = 0$  (нулевое приближение по  $\frac{\delta}{l}$  -

гидродинамическая теория смазки), а также  $\frac{\delta \delta c_0}{l \nu} = 0$  -ползущие течения, получим уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial P}{\partial r^*} = 0, \tilde{\text{Re}} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left( v_r \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}}, \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0, \tilde{\text{Re}} = \frac{\delta \delta c_0}{l \nu} \quad (21)$$

и граничные условия:  $v_r = -\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t^*}$ ,  $v_x = 0$  при  $r^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}$  и  $r^* = -\lambda u_3^{(2)}$ .

Раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра  $\lambda$

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots \quad (22)$$

Для первых членов разложения получим уравнения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \tilde{\text{Re}} \frac{\partial V_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (23)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} v_r^0 &= -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}; v_x^0 = 0 \quad \text{где } r^* = 1 \\ v_r^0 &= -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}; v_x^0 = 0 \quad \text{где } r^* = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

С точностью до  $\psi$ ,  $\lambda$  получим

$$\cos\left(-\bar{n}, \bar{n}_r\right) \approx 1, \quad \cos\left(-\bar{n}, \bar{i}\right) \approx 0$$

$$q_x^i = -\rho\nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \left[ \frac{\partial v_{x^*}}{\partial r^*} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial v_r^*}{\partial x^*} \right] \Bigg|_{\substack{r_2^* = -\frac{w_m u_3^{(2)}}{\delta} \\ r_1^* = 1 - \frac{w_m}{\delta} u_3^{(1)}}} \approx -\rho\nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_{x^*}}{\partial r^*} \Bigg|_{\substack{r_2^* = -\lambda u_3^{(2)} \\ r_1^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}}} \quad (25)$$

$$q_n = -\frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} P - p_0 + 2\rho\nu \frac{w_m c_0}{l\delta} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} =$$

$$= -p_0 - \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} \left( P - 2 \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} \right) = \left\{ \left( \frac{\delta}{l} \right)^2 = \psi_i^2 \varepsilon_i \right\} \approx$$

$$\approx -p_0 - \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} P$$

На первом шаге итерации полагаем  $\tilde{\text{Re}} = 0$  (гидродинамическая теория смазки) [12]. Из уравнений движения жидкости получаем с учетом граничных условий

$$P^0 = 12 \int \left[ \int \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*,$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} = (r^{*2} - r^*) \int \left( \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) dx^*; \quad (26)$$

Подставляя найденные значения  $\frac{\partial v_x^0}{\partial t^*}$  в уравнения динамики жидкости (23), на втором шаге итерации найдем [12].

$$P^0 = \iint \left[ 12 \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \frac{6}{5} \tilde{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^* dx^*; \quad (27)$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = (2r^* - 1) \int \left[ 6 \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^*.$$

Учитывая, что введены переменные  $\xi = x^* - ct^*$  и  $\tau = \varepsilon t^*$ ,  $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$  найдем, с учетом того, что  $\varepsilon \ll 1$ .

$$\begin{aligned}
 P^0 &= \int \left[ 12\sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{6}{5} \tilde{\text{Re}}(1 - \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right] d\xi; \\
 \frac{\partial P^0}{\partial \xi} &= \left[ 12\sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{6}{5} \tilde{\text{Re}}(1 - \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right]; \\
 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} &= (2r^* - 1) \left[ 6\sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{\tilde{\text{Re}}}{10} (1 - \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right]; \\
 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} &= 6\sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{\tilde{\text{Re}}}{10} (1 - \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right); \\
 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} &= - \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

В уравнения входят выражения

$$q_x^{(i)} - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^{i-1}. \tag{29}$$

Следовательно, имеет

$$\begin{aligned}
 q_x^{(1)} - \mu_0 \frac{R^{(1)}}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} &= \mu_0 \frac{R^{(1)}}{l} \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} \left[ 12\sqrt{1 - \mu_0^2} [(u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) (1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R^{(1)}}) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi}) (1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R^{(1)}}) \right], \\
 q_x^{(2)} + \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} &= \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} \left[ 12\sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(2)} - u_{30}^{(1)}) (1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R^{(1)}}) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi}) (1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R^{(1)}}) \right]
 \end{aligned} \tag{30}$$

Найдем выражение, входящие в правую часть уравнений (17).

Учитывая, что  $w_m l u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_m R^{(i)} u_{10\xi}^{(i)}$  и полагая  $R^{(1)} = R^{(2)} = R$ ,  $h_0^{(1)} = h_0^{(2)} = h_0$  в силу малости  $\psi, \lambda$  для первого уравнения имеем

$$\begin{aligned}
 &- 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \left[ (\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}) (1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R}) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2}) (1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R}) \right]
 \end{aligned} \tag{31}$$

Для второго уравнения имеем

$$-6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[ \left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2}\right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right) \right] \quad (32)$$

## КРУГОВОЕ СЕЧЕНИЕ

Рассматривая круговое сечение, введем безразмерные переменные и параметры

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r; V_x = w_m \frac{c_0}{R_3} v_x; r^* = \frac{r}{R_3}; t^* = \frac{c_0}{l} t; x^* = \frac{1}{l} x \\ p = \frac{\tilde{\rho} \tilde{\nu} c_0 l w_m}{R_3^3} P + p_0; \frac{R_3}{l} = \psi = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right); \lambda = \frac{w_m}{R_3} = O(\varepsilon). \quad (33)$$

В этих переменных получим уравнения гидродинамики

$$\psi^2 \left\{ \psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t^*} + \lambda \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right) \right] \right\} + \frac{\partial P}{\partial r^*} = \\ = \psi^2 \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \psi^2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^{*2}} \right]; \\ \psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left( v_r \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \\ = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \psi^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^{*2}}; \\ \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{v_r}{r^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0. \quad (34)$$

и граничные условия

$$v_x = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*}; v_r = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \quad (35)$$

при  $r^* = 1 - \lambda u_3^{(2)}$ ;  $v_r, v_x$  - ограничены при  $r^* = 0$ :  $r^* \frac{\partial v_r}{\partial r^*} = 0$ ,  $r^* \frac{\partial v_x}{\partial r^*} = 0$ . Полагая теперь  $\psi = 0$  (нулевое приближение по  $\psi$  - гидродинамическая теория смазки [13]), получаем уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial P}{\partial r^*} = 0; \quad (36)$$

$$\psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left( v_r \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right); \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0$$

Раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра  $\lambda$

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots \quad (37)$$

для первых членов разложений получим уравнения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{v}} \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right); \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (38)$$

и граничные условия вида

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}; v_x^0 = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*} \quad \text{ïðè} \quad r^* = 1 \quad (39)$$

$$r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0; r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0 \quad \text{ïðè} \quad r^* = 0.$$

Определим теперь в этих переменных напряжения со стороны жидкости на оболочке. С точностью до  $\lambda, \psi$  имеем

$$\cos \left( \frac{\wedge}{\bar{n}, \bar{n}_r} \right) = \frac{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)})}{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)}) \left( 1 + \lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} \right)} \approx 1 \quad (40)$$

$$\cos \left( \frac{\wedge}{\bar{n}, \bar{i}} \right) = -\frac{\lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)})}{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)}) \left( 1 + \lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} \right)} \approx 0$$

$$\tilde{q}_x = -\tilde{\rho} \tilde{v} \frac{c_0 w_m}{R_3^2} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \psi^2 \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right] \Big|_{r^*=1-\lambda u_3^{(2)}} \approx -\frac{w_m}{R_3} \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}$$

$$\tilde{q}_n = \left[ -p_0 - \frac{\tilde{\rho} \tilde{v} c_0 w_m l}{R_3^3} P + 2 \tilde{\rho} \tilde{v} \frac{w_m c_0}{l R_3} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} \right] \Big|_{r^*=1-\lambda u_3^{(2)}} \approx \quad (41)$$

$$\approx -p_0 - \frac{w_m}{R_3} \left( \frac{l}{R} \right)^{(2)} \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 P.$$

Получаем

$$\tilde{q}_x = -\lambda \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}, \tilde{q}_n = -p_0 - \frac{\lambda}{\psi} \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 P \quad (42)$$

На первом шаге итерации полагаем  $\psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{v}} = 0$ , опустим первое слагаемое в уравнении (38) и получим уравнения [12]

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right); \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (43)$$

Решение уравнений гидродинамики легко получить (это классические уравнения гидродинамической теории смазки). Из уравнений движения с учетом граничных условий имеем

$$P^0 = 16 \int \frac{\partial}{\partial t^*} \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right] dx^* ,, \quad (44)$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} = (r^{*2} - 1) 4 \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right] + \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial t^{*2}}$$

Подставляя найденные значения  $\frac{\partial v_x^0}{\partial t^*}$  в уравнения динамики жидкости (38), на втором шаге итерации найдем [12].

Найдем

$$P^0 = \frac{\partial}{\partial t^*} \int \left[ 16 \left( \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \psi \frac{R_3 c_0}{\nu} \frac{\partial}{\partial t^*} \left( \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - 4 \int u_3^{(2)} dx^* \right) \right] dx^* , \quad (45)$$

$$\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \frac{\partial}{\partial t^*} \left[ 8 \left( \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \psi \frac{R_3 c_0}{\nu} \frac{\partial}{\partial t^*} \left( \frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right) \right].$$

Учитывая, что введены переменные  $\xi = x^* - ct^*$  и  $\tau = \varepsilon t^*$ ,  $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$ , найдем с точностью до  $\varepsilon$

$$\frac{\partial P^0}{\partial \xi} = \sqrt{1 - \mu_0^2} \left[ 8 \left( 2u_3^{(2)} - \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \xi} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \psi \frac{R_3 c_0}{\nu} \left( 8 \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \sqrt{1 - \mu_0^2} \right]. \quad (46)$$

При этом

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \sqrt{1-\mu_0^2} \left[ 4 \left( 2u_3^{(2)} - \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{6} \psi \frac{R_3 c_0}{\nu} \left( 2 \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \sqrt{1-\mu_0^2} \right]. \quad (47)$$

Тогда учитывая, что  $\frac{w_m l}{u_m R_3} u_{30}^{(2)} = \mu_0 u_{10\xi}^{(2)}$  при  $R_3 = R^{(2)} = R$  в силу малости  $\psi, \lambda$  получаем

$$\tilde{q}_x - \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} = \frac{\tilde{\nu}}{R c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4 \sqrt{1-\mu_0^2} [1-2\mu_0]^2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{R}{l} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{1}{6} (1-\mu_0^2) [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{u_m}{l} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2}. \quad (48)$$

## УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ОБОЛОЧКИ

Система уравнений становится такой с учетом найденной правой частью (38), (39), (60)

$$\begin{aligned} & u_{10\xi\tau}^{(1)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(1)} u_{10\xi\xi}^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(1)} + \\ & + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right] = 0; \\ & u_{10\xi\tau}^{(2)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(2)} u_{10\xi\xi}^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(2)} + \\ & + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^3 \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right] + 2(1-2\mu_0)^2 \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \frac{\tilde{\nu}}{R c_0} u_{10\xi}^{(2)} - \\ & - \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \frac{R}{l} \frac{1}{12} \sqrt{1-\mu_0^2} [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] u_{10\xi\xi}^{(2)} = 0. \quad (49) \end{aligned}$$



Можно также ввести обозначения  $u_{10\xi}^{(1)} = c_3\phi^{(1)}$ ,  $u_{10\xi}^{(2)} = c_3\phi^{(2)}$ ,  $\eta = c_1\xi$ ,  $t = c_2\tau$ ,  
где

$$c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \left[1 - \frac{\delta}{2\mu_0 R}\right] \frac{\nu}{\delta c_0}, c_1 = \left[ c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R}\right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (50)$$

$$c_3 = \frac{c_2 l \varepsilon}{c_1 u_m \sqrt{1-\mu^2}} 6.$$

ПОЛОЖИМ

$$\sigma_1 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \frac{\delta}{l} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{10} \frac{c_1}{c_2} \left(1 - \frac{\delta}{12\mu_0 R}\right),$$

$$\sigma_2 = \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{\tilde{\nu}}{\varepsilon R c_0} 2(1-2\mu_0)^2 \frac{1}{c_2}, \quad (51)$$

$$\sigma_3 = \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{R}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{12} \left[ (1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2 \right] \frac{c_1}{c_2}$$

и получаем систему уравнений

$$\phi_t^{(1)} + 6\phi^{(1)}\phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} - \sigma_1(\phi_\eta^{(1)} - \phi_\eta^{(2)}) = 0,$$

$$\phi_t^{(2)} + 6\phi^{(2)}\phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma_1(\phi_\eta^{(2)} - \phi_\eta^{(1)}) + \sigma_2\phi^{(2)} - \sigma_3\phi_\eta^{(2)} = 0. \quad (52)$$

Система уравнений (52) имеет в качестве точного решения при  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  (отсутствие жидкости во внутренней оболочке) следующее решение

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = \frac{2k^2}{\cosh^2(k\eta - 4k^3 t)}. \quad (53)$$

При наличии жидкости внутри второй оболочки требуется численное решение систем уравнений (52) при начальном условии, например

$$\phi^{(1)} = 2k^2 \cosh^{-2}(k\eta), \phi^{(2)} = 0, \quad (54)$$

или

$$\phi^{(1)} = 0, \phi^{(2)} = 2k^2 \cosh^{-2}(k\eta). \quad (55)$$

Для численного моделирования рассмотрим разностную схему для уравнений (52), аналогичную схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned}
 & \frac{u^{(1)n+1}_j - u^{(1)n}_j}{\tau} + 3 \frac{(u^{(1)2n+1}_{j+1} - u^{(1)2n+1}_{j-1}) + (u^{(1)2n}_{j+1} - u^{(1)2n}_{j-1})}{4h} + \\
 & + \frac{(u^{(1)n+1}_{j+2} - 2u^{(1)n+1}_{j+1} + 2u^{(1)n+1}_{j-1} - u^{(1)n+1}_{j-2}) + (u^{(1)n}_{j+2} - 2u^{(1)n}_{j+1} + 2u^{(1)n}_{j-1} - u^{(1)n}_{j-2})}{4h^3} + \\
 & + \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} - \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \\
 & - \sigma_1 \left( \frac{(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1})}{4h} - \frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{u^{(2)n+1}_j - u^{(2)n}_j}{\tau} + 3 \frac{(u^{(2)2n+1}_{j+1} - u^{(2)2n+1}_{j-1}) + (u^{(2)2n}_{j+1} - u^{(2)2n}_{j-1})}{4h} + \\
 & + \frac{(u^{(2)n+1}_{j+2} - 2u^{(2)n+1}_{j+1} + 2u^{(2)n+1}_{j-1} - u^{(2)n+1}_{j-2}) + (u^{(2)n}_{j+2} - 2u^{(2)n}_{j+1} + 2u^{(2)n}_{j-1} - u^{(2)n}_{j-2})}{4h^3} - \\
 & + \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} - \\
 & - \sigma_1 \left( \frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} - \frac{(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1})}{4h} \right) + \\
 & + \sigma_2 \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \sigma_3 \frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} = 0.
 \end{aligned}$$

Графики численного решения уравнений (52) представлены на рисунках 2 и 3. Выполненные вычислительные эксперименты позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости во внутренней оболочке и внешней оболочке с учетом инерции жидкости на поведение нелинейной волны деформации. Сначала происходит выравнивание амплитуд с их дальнейшим падением и размыванием. При этом не наблюдается, как показано в [7], что угол наклона амплитуды волны больше во внутренней оболочке. Очевидно к этому приводит учет инерции жидкости.

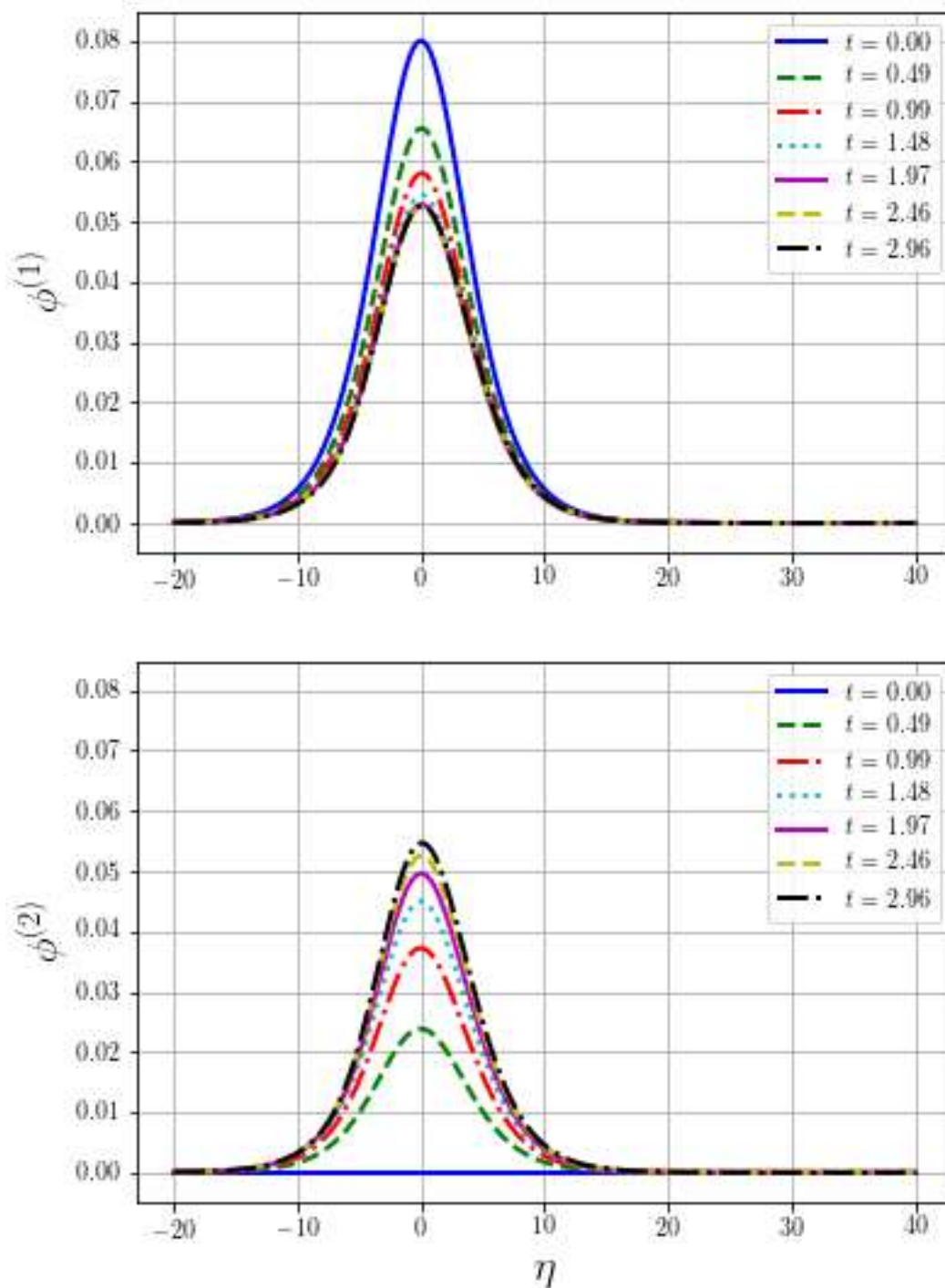


Рис.2. Численное решение уравнений (53) с начальными условиями (55) при  $k = 0.2$ ,  $\sigma_1 = 0.1$ ,  $\sigma_2 = 0.5$  и  $\sigma_3 = 0.4$ .

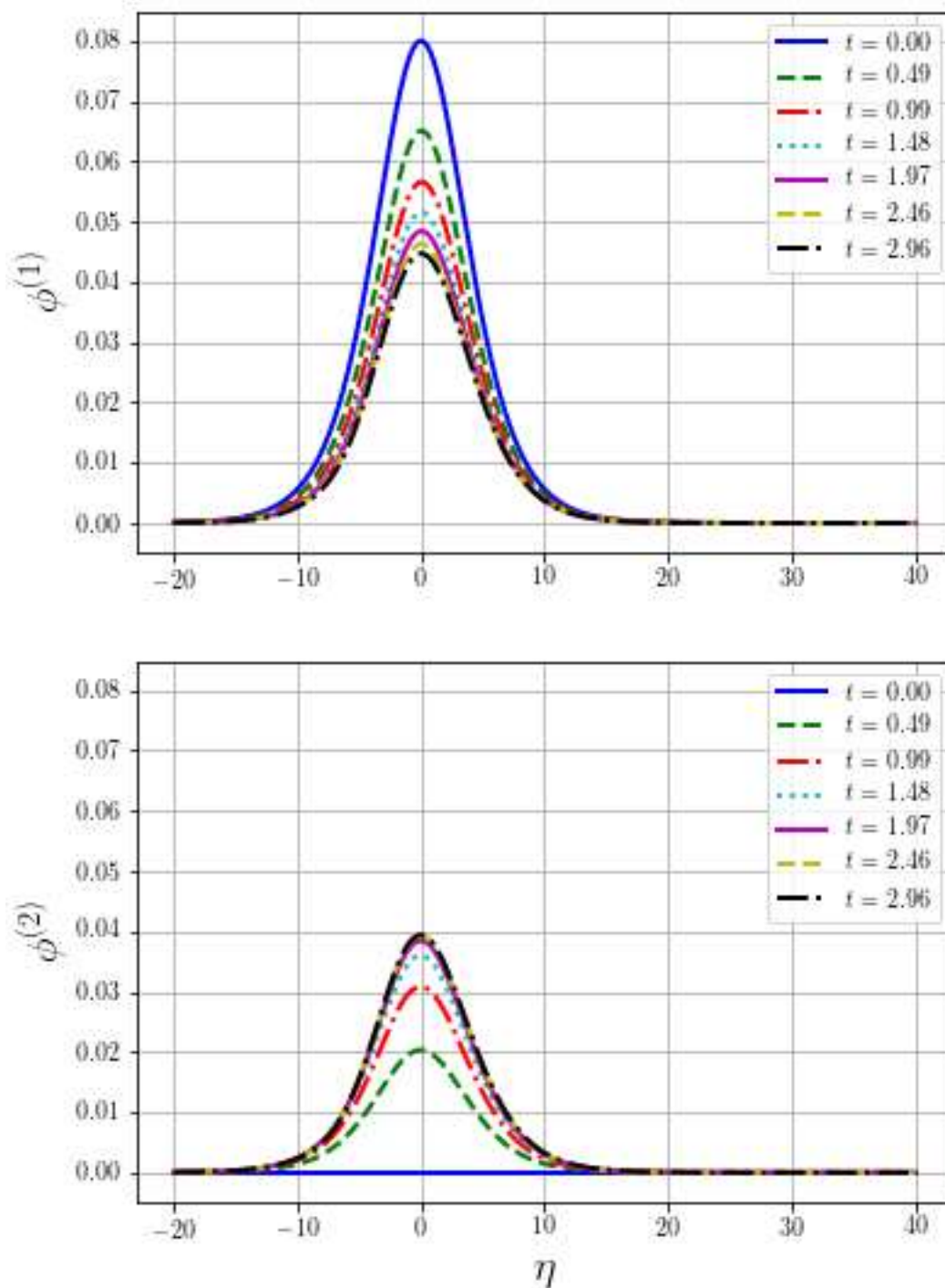


Рис.3. Численное решение уравнений (53) с начальными условиями (56) при  $k = 0.2$ ,  $\sigma_1 = 0.1$ ,  $\sigma_2 = 0.5$  и  $\sigma_3 = 0.4$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При наличии жидкости между оболочками происходит перекачка энергии. Амплитуда во второй оболочке падает, а в первой – растет пока они не выровняются (Рис. 2, 3). При наличии жидкости внутри второй оболочки на втором этапе происходит падение амплитуд волн в обеих оболочках за счет вязкости жидкости и уменьшении скорости волн за счет инерции движения жидкости.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-01-00014 и гранта Президента Российской Федерации МД-756.2018.8.*

## Литература

1. Громека И. С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах // Собр.соч. М. : Изд-во АН СССР, 1952. С. 149-171.
2. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. Т. 3, № 1. 1995. С. 52-58.
3. Ерофеев В. И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. Т. 48, № 6. 2002. С. 725-740.
4. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение // Акустический журнал. Т. 47, № 3. 2001. С. 359-363.
5. Аршинов Г. А., Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // Акустический журнал. Т. 46, № 1. 2000. С. 116-117.
6. Блинкова А. Ю., Иванов С. В., Ковалев А. Д., Могилевич Л. И. Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Известия Саратовского университета. Новая серия. Физика. Т. 12, № 2. 2012. С. 12-18.
7. Блинков Ю. А., Ковалева И. А., Могилевич Л. И. Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Вестник российского университета дружбы народов. серия: математика, информатика, физика. Т. 3. 2013. С. 42-51.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа : М.: Дрофа, 2003. 840 с.
9. Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике : Л., Изд. ЛГУ, 1978. 296 с.
10. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек : М.: Наука, 1972. 432 с.
11. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости : М.: Наука, 1979. 320 с.

12. Агеев Р.В., Евдокимова Е.В., Ковалева И.А., Могилевич Л.И. Динамика осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубе кругового и кольцевого сечений // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2017. – № 3; URL: [mathmod.esrae.ru/15-50](http://mathmod.esrae.ru/15-50)
13. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.