Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/25-88
Ссылка для цитирования этой статьи:
Коломоец А.А., Ким А.А., Тарасов Р.С. Методы обращения преобразования Лапласа // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. №2

УДК 519.65

МЕТОДЫ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Коломоец А.А.[1], Ким А.А.[2], Тарасов Р.С.[3]
[1] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, kolomoetsaa@bk.ru
[2] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, kim_a.a@bk.ru
[3] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, pv.pwp.roma@yandex.ru

METHODS OF INVERSION OF THE LAPLACE TRANSFORM

Kolomoets A.A.[1], Kim A.A.[2], Tarasov R.S.[3]
[1]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, kolomoetsaa@bk.ru
[2]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, kim_a.a@bk.ru
[3]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, pv.pwp.roma@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются методы численного обращения преобразования Лапласа: Gaver-Stehfest, ускоренный метод Виддера и метод численного построения прообраза, основанный на использовании значений образа F(p) при вещественных значениях p (разложение в ряд Фурье). Приведено использование перечисленных методов на примерах. Численно исследована сходимость методов, а также указан наиболее оптимальный метод решения рассмотренных задач.

Ключевые слова: метод Gaver-Stehfest, метод Виддера, ряды Фурье, численное обращение преобразования Лапласа.

Abstract. The article considers methods of Gaver-Stehfest, Widder, Fourier-series expansion of numerical Inversion of the Laplace Transform. These techniques have been used on practical examples. The article numerically investigates convergence of methods and indicates the most optimal method for solving considered problems.

Keywords: Gaver-Stehfest algorithm, Widder’s method, Fourier series, the Numerical Inversion of the Laplace Transform.

ISSN 2541-9269

Обратное преобразование Лапласа широко используется в научных и инженерных расчетах. Методы численного обращения [1,2,3,4]: метод Виддера, Gaver-Stehfest, разложение в ряд Фурье и другие имеют свои преимущества и недостатки. Поэтому при практическом применении выбор подходящего метода зависит от различных условий.

1. Метод Gaver-Stehfest

В 1966 году Gaver[2] ввел следующую последовательность аппроксимации прообраза

$$\widetilde{f}_k(x) = ln(2)x^{-1}\frac{(2k)!}{k!(k-1)!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i F((k+i)ln(2)x^{-1}), \qquad k \ge 1, x > 0. \quad (1.1)$$

В 1970 для ускорения сходимости Stehfest определил приближение

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(n)\widetilde{f}_k(x), \quad (1.2)$$

где коэффициенты $c_k(n)$ выбираются так:

$$c_k(n) = (-1)^{n+k}\frac{k^n}{k!(n-k)!}, \qquad n \ge 1, 1 \le k \le n.$$

Объединение вышеприведенной формулы с (1.1) и (1.2) дает приближение Gaver-Stehfest.

Положим

$$f(t) \approx \widetilde{f}(t) = \frac{ln2}{t}\sum_{n=1}^{N} K_n F\left(\frac{nln2}{t}\right), \quad (1.3)$$

$$K_n = (-1)^{n+\frac{N}{2}} \sum_{k=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{\min\left(n,\frac{N}{2}\right)} \frac{k^{\frac{N}{2}}(2k)!}{\left(\frac{N}{2}-k\right)!k!(k-1)!(n-k)!(2k-n)!},$$

где N – произвольное целое четное число, примем N = 20.

Таблица 1

N	K_n
1	-0,000005511
2	0,152386464
3	-117,46547619
4	17342,449338624
5	-922806,928902116
6	23774087,7871032
7	-349421166,19537
8	3241369852,23188
9	-20276948307,2378
10	89464829823,7972
11	-287020921147,103

ISSN 2541-9269

12	682992010281,511
13	-1219082330054,37
14	1637573800842,01
15	-1647177486836,12
16	1221924554444,23
17	-648806558817,533
18	233316653213,706
19	-50913800705,4674
20	5091380070,54674

Подставив полученные коэффициенты в (1.3), получим приближенную к оригиналу функцию.

2. Метод Виддера с ускорением

Введем оператор Виддера[5]

$$W_n(f,t) = (-1)^n \frac{p^{n+1}}{n!} F^{(n)}(p)\Big|_{p=\frac{n}{t}}, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{2.1}$$

где $F^{(n)}(p)$ – это производная $F(p)$ *n-го* порядка.

Будем использовать метод Виддера с ускорением сходимости.

Выберем k различных натуральных чисел $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$, такие что nd_j, $j = 1,2,\ldots,k, k \geq 1,$ – целые числа. Составим линейную комбинацию

$$f(t) \approx \tilde{f}(t) = W_n(k,f,t) = \sum_{j=1}^{k} c_{kj} W_{nd_j}(f,t) \tag{2.2}$$

с коэффициентами c_{kj}, определяемыми так: $c_{kj} = \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \frac{d_j}{d_j - d_i}, j = 1,2,\ldots,k.$

3. Метод разложения в ряд Фурье

Положим

$$b_n = F((2n+1)q), \qquad (n = 0,1,\ldots), \tag{3.1}$$

где q > 0 – произвольное вещественное число.

Совершим в функции $f(t)$ замену переменной

$$t = -\frac{1}{q}\ln\cos(\theta), \qquad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}),$$

и обозначим $f(t) = f(-\frac{1}{q}\ln\cos(\theta)) = \tilde{f}(\theta)$.

Воспользуемся формулой

$$qb_n = \int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^{2n} \sin(\theta) \tilde{f}(\theta) d\theta, \tag{3.2}$$

будем считать функцию $\tilde{f}(\theta)$ продолженной нечётным образом через точку $\theta = 0$ и чётным – через точку $\theta = \frac{\pi}{2}$. Тогда эта функция будет 2π-периодичной, и её можно разложить в ряд Фурье:

$$\tilde{f}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin((2n+1)\theta) \tag{3.3}$$

Подставив (3.3) в (3.2) получим треугольную систему уравнений для коэффициентов c_n:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{4}{\pi} q b_0, \\ c_0 + c_1 = \frac{4^2}{\pi} q b_1, \\ 2c_0 + 3c_1 + c_2 = \frac{4^3}{\pi} q b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2n+1} C_{2n+1}^{n-k} c_k = \frac{4^{n+1}}{\pi} q b_n. \end{cases}$$

Вычислив эти коэффициенты и подставив их в (3.3), найдём $\tilde{f}(\theta)$.

Вернувшись к прежним обозначениям $(\theta = \arccos e^{-qt})$ получим

$$f(t) \approx \tilde{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin((2n+1)\arccos e^{-qt}) \tag{3.4}$$

Пример 1. Найти приближенные представления прообраза $f(t)$ для заданного образа $F(p) = e^{-\sqrt{p}}$ и сравнить его с известным: $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-3/2} e^{-1/4t}$.

Решение

1. Метод Gaver-Stehfest

Подставим коэффициенты из таблицы 1 в (1.3) для заданного *F(p)*:

$$\tilde{f}(t) = \frac{\ln 2}{t}\Big(-0.000005511e^{\left(-\sqrt{\frac{\ln 2}{t}}\right)} + 0.152386464 \cdot e^{-\sqrt{\frac{2\ln 2}{t}}} - 117.465476 \cdot e^{-\sqrt{\frac{3\ln 2}{t}}} + 17342.449 \cdot e^{-\sqrt{\frac{4\ln 2}{t}}} -$$
$$-922806.9289 \cdot e^{-\sqrt{\frac{5\ln 2}{t}}} + 23774087.7871e^{-\sqrt{\frac{6\ln 2}{t}}} - 349421166.1954e^{-\sqrt{\frac{7\ln 2}{t}}} + 3241369852.23188e^{-\sqrt{\frac{8\ln 2}{t}}} -$$
$$-20276948307.238e^{-\sqrt{\frac{9\ln 2}{t}}} + 89464829823.797e^{-\sqrt{\frac{10\ln 2}{t}}} - 287020921147.103e^{-\sqrt{\frac{11\ln 2}{t}}} +$$
$$+682992010281.5e^{-\sqrt{\frac{12\ln 2}{t}}} - 1219082330054.37e^{-\sqrt{\frac{13\ln 2}{t}}} + 1637573800842.01e^{-\sqrt{\frac{14\ln 2}{t}}} -$$
$$-1647177486836.12e^{-\sqrt{\frac{15\ln 2}{t}}} + 1221924554444.23e^{-\sqrt{\frac{16\ln 2}{t}}} - 648806558817.533e^{-\sqrt{\frac{17\ln 2}{t}}} +$$
$$+233316653213.706e^{-\sqrt{\frac{18\ln 2}{t}}} - 50913800705.4674e^{-\sqrt{\frac{19\ln 2}{t}}} + 5091380070.54674e^{-\sqrt{\frac{20\ln 2}{t}}}\Big)$$

ISSN 2541-9269

Параметр N = 20 обеспечивает сходимость, при которой приближающая функция $\tilde{f}(t)$ совпадает с оригиналом $f(t)$.

Построим график $\tilde{f}(t)$ и данной функции

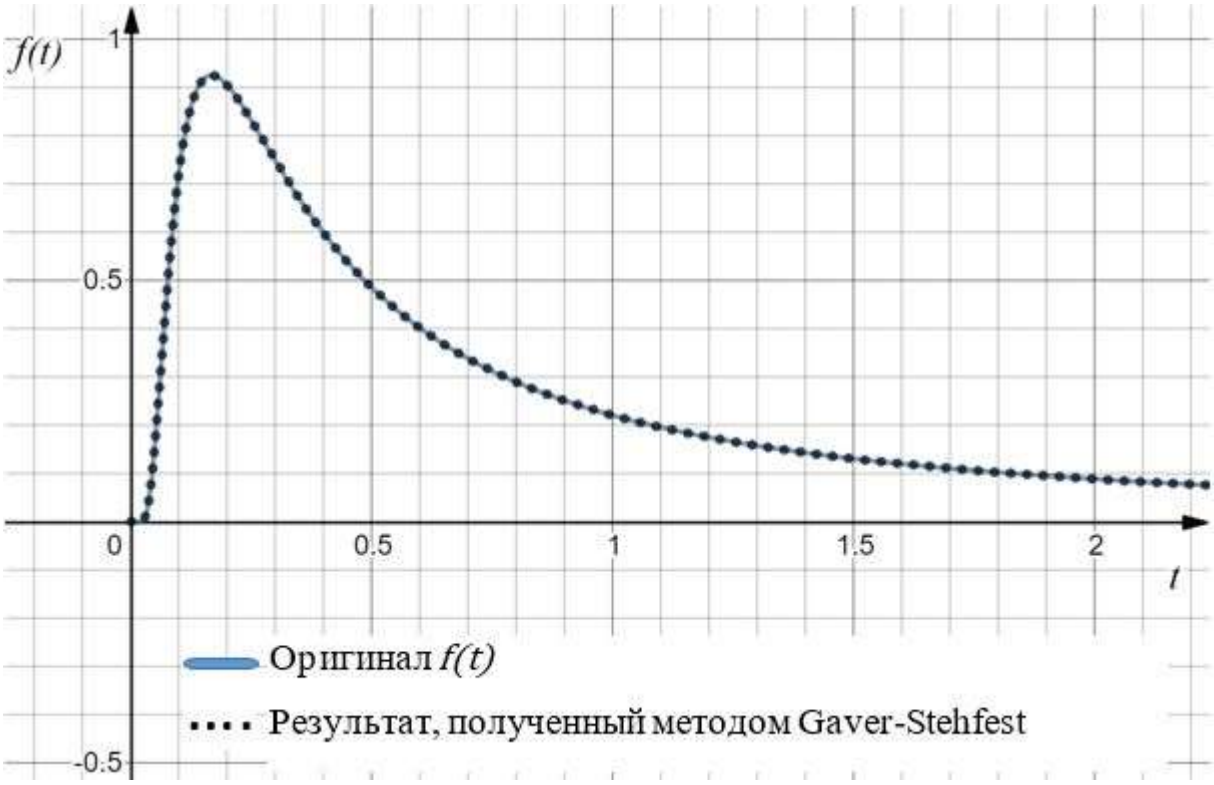

Рис. 1

2. Метод Виддера с ускорением

Примем n = 1, $d_j = 2^j$, j = 1,2,…,k, k = 4, 5, 7.

Вычислим коэффициенты c_{kj} для данных значений d_j, а также функции $W_{nd_j}(f,t)$ для k = 5.

Таблица 2

j	d_j	c_{4j}	c_{5j}	c_{7j}
1	2	-0,0476190476190476	0,00317460317460317	0,0000016255008574517
2	4	0,666666666666667	-0,0952380952380952	-0,000204813108038914
3	8	-2,66666666666667	0,888888888888889	0,00846560846560846
4	16	3,04761904761905	-3,04761904761905	-0,145124716553288
5	32		3,25079365079365	1,08359788359788
6	64			-3,35565796210958
7	128			3,40892237420655

$$W_2(f,t) = \frac{2^3 e^{-\sqrt{2/t}}}{t^3 \cdot 2! \cdot 4}\left(\frac{1}{(2/t)} + \frac{1}{(2/t)^{3/2}}\right).$$

ISSN 2541-9269

$$W_4(f,t)=\frac{4^5 e^{-\sqrt{4/t}}}{t^5\cdot 4!\cdot 16}\left(\frac{1}{(4/t)^2}+\frac{15}{(4/t)^3}+\frac{6}{(4/t)^{5/2}}+\frac{15}{(4/t)^{7/2}}\right).$$

$$W_8(f,t)=\frac{8^9 e^{-\sqrt{8/t}}}{t^9\cdot 8!\cdot 256}\left(\frac{1}{(8/t)^4}+\frac{378}{(8/t)^5}+\frac{17325}{(8/t)^6}+\frac{135135}{(8/t)^7}+\frac{28}{(8/t)^{9/2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{3150}{(8/t)^{11/2}}+\frac{62370}{(8/t)^{13/2}}+\frac{135135}{(8/t)^{15/2}}\right).$$

Функции W_{16} и W_{32} не приводятся в данной статье в виду их громоздкости.

Подставим полученные коэффициенты и выражения в (2.2), получим

$$\tilde{f}(t)=W_1(5,f,t)=0{,}0031746W_2(f,t)-0{,}095238W_4(f,t)+0{,}888889W_8(f,t)-$$
$$-3{,}047619W_{16}(f,t)+3{,}2507936W_{32}(f,t).$$

Сходимость метода рассматривалась в работах [6,7].

Построим график $\tilde{f}(t)$ и данной функции

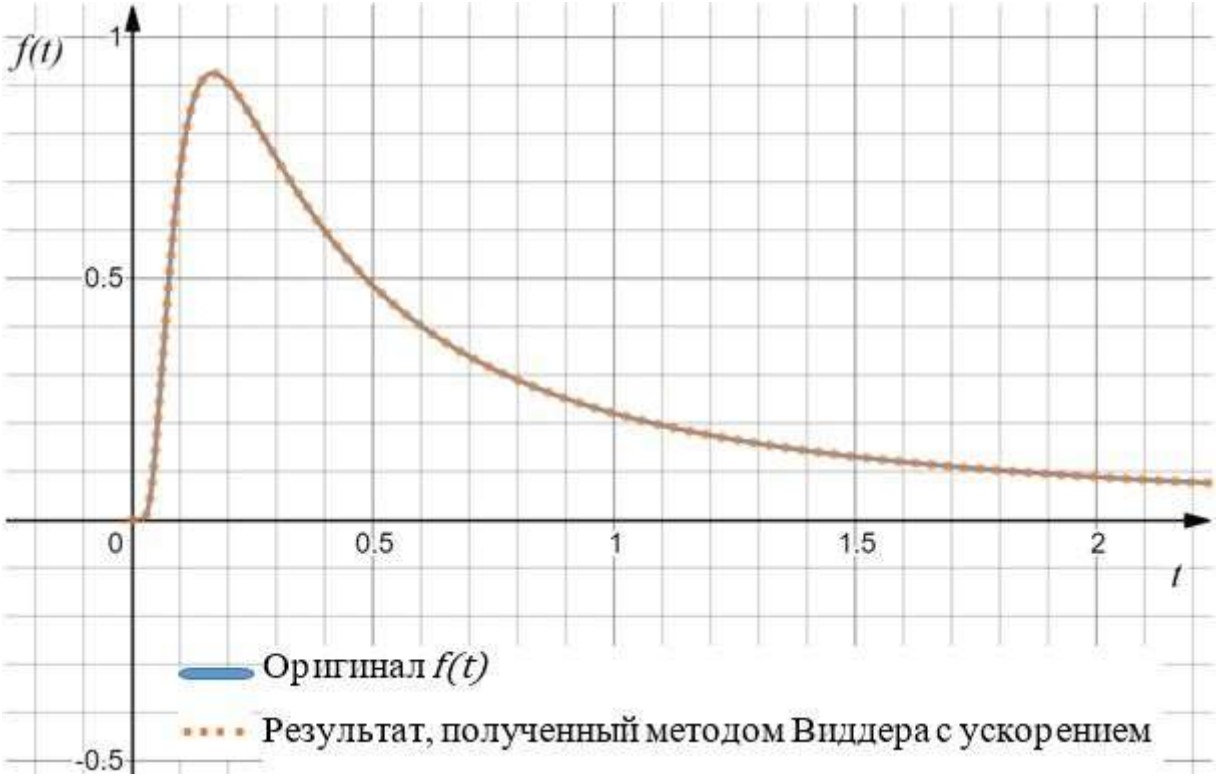

Рис. 2

3. Метод разложения в ряд Фурье

Вычислим (3.1) для первых 10 значений (примем q = 0.2):

$$b_0=e^{-\sqrt{0{,}2}}=0{,}6394,$$

$$b_1=e^{-\sqrt{3*0{,}2}}=0{,}4609,$$

$$b_2=e^{-\sqrt{5*0{,}2}}=0{,}3679,$$

$$b_3=e^{-\sqrt{7*0{,}2}}=0{,}3063,$$

$$b_4=e^{-\sqrt{9*0{,}2}}=0{,}2614,$$

ISSN 2541-9269

$$b_5 = e^{-\sqrt{11*0,2}} = 0,2269,$$
$$b_6 = e^{-\sqrt{13*0,2}} = 0,1994,$$
$$b_7 = e^{-\sqrt{15*0,2}} = 0,1769,$$
$$b_8 = e^{-\sqrt{17*0,2}} = 0,1582,$$
$$b_9 = e^{-\sqrt{19*0,2}} = 0,1424.$$

Подставив (3.3) в (3.2) для данного примера получим треугольную систему уравнений для коэффициентов c_n:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{4}{\pi} q b_0, \\ c_0 + c_1 = \frac{4^2}{\pi} q b_1, \\ 2c_0 + 3c_1 + c_2 = \frac{4^3}{\pi} q b_2, \\ 5c_0 + 9c_1 + 5c_2 + c_3 = \frac{4^4}{\pi} q b_3, \\ 14c_0 + 28c_1 + 20c_2 + 7c_3 + c_4 = \frac{4^5}{\pi} q b_4, \\ 42c_0 + 90c_1 + 75c_2 + 35c_3 + 9c_4 + c_5 = \frac{4^6}{\pi} q b_5, \\ 132c_0 + 297c_1 + 275c_2 + 154c_3 + 54c_4 + 11c_5 + c_6 = \frac{4^7}{\pi} q b_6, \\ 429c_0 + 1001c_1 + 1001c_2 + 637c_3 + 273c_4 + 77c_5 + 13c_6 + c_7 = \frac{4^8}{\pi} q b_7, \\ 1430c_0 + 3432c_1 + 3640c_2 + 2548c_3 + 1260c_4 + 440c_5 + 104c_6 + 15c_7 + c_8 = \frac{4^9}{\pi} q b_8, \\ 4862c_0 + 11934c_1 + 13260c_2 + 9996c_3 + 5508c_4 + 2244c_5 + 663c_6 + 135c_7 + 17c_8 + c_9 = \frac{4^{10}}{\pi} q b_9 \end{cases} \quad (3.5)$$

Вычислим эти коэффициенты:

$$c_0 = 0,1628,$$
$$c_1 = 0,3066,$$
$$c_2 = 0,2533,$$
$$c_3 = 0,1513,$$
$$c_4 = 0,0506,$$
$$c_5 = -0,0202,$$
$$c_6 = -0,0618,$$
$$c_7 = -0,0762,$$
$$c_8 = -0,0738,$$
$$c_9 = -0,0602.$$

Подставив их в (3.3), найдём $\tilde{f}(\theta)$:

ISSN 2541-9269

$$\tilde{f}(\theta) = 0{,}1628\,sin(\theta) + 0{,}3066\,sin(3\theta) + 0{,}2533\,sin(5\theta) + 0{,}1513\,sin(7\theta) +$$
$$+ 0{,}0506\,sin(9\theta) - 0{,}0202\,sin(11\theta) - 0{,}0618\,sin(13\theta) - 0{,}0762\,sin(15\theta) -$$
$$- 0{,}0738\,sin(17\theta) - 0{,}0602\,sin(19\theta).$$

Теперь вернёмся к прежним обозначениям $(\theta = arccos\, e^{-qt})$:

$$\tilde{f}(t) = 0{,}1628\,sin(arccos(e^{-0{,}2t})) + 0{,}3066\,sin(3\,arccos(e^{-0{,}2t})) +$$
$$+ 0{,}2533\,sin(5\,arccos(e^{-0{,}2t})) + 0{,}1513\,sin(7\,arccos(e^{-0{,}2t})) +$$
$$+ 0{,}0506\,sin(9\,arccos(e^{-0{,}2t})) - 0{,}0202\,sin(11\,arccos(e^{-0{,}2t})) -$$
$$- 0{,}0618\,sin(13\,arccos(e^{-0{,}2t})) - 0{,}0762\,sin(15\,arccos(e^{-0{,}2t})) -$$
$$- 0{,}0738\,sin(17\,arccos(e^{-0{,}2t})) - 0{,}0602\,sin(19\,arccos(e^{-0{,}2t})).$$

Построим график $\tilde{f}(t)$ и данной функции

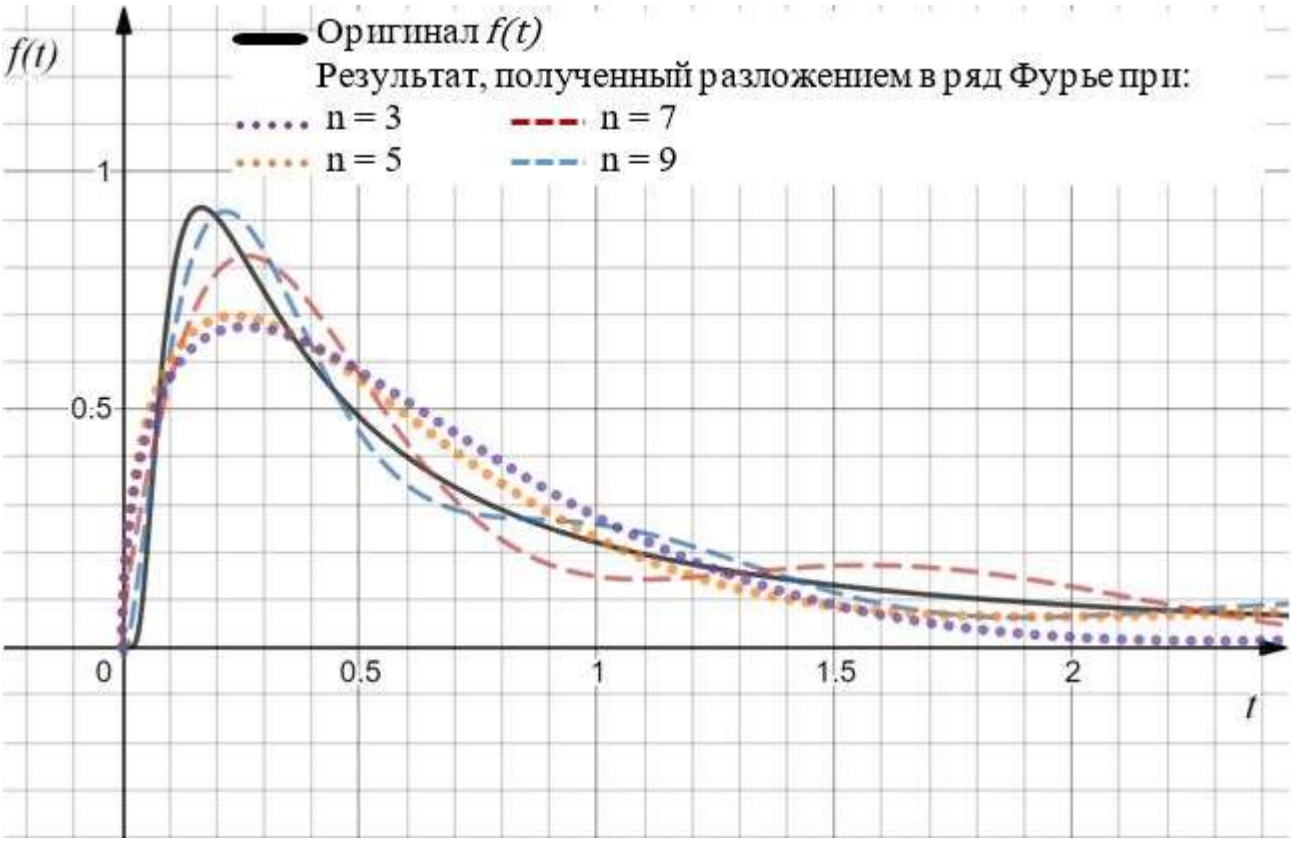

Рис. 3

Пример 2. Найти приближенные представления прообраза *f(t)* для заданного образа $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}}$ и сравнить его с известным: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-1/4t}$.

Решение

1. Метод Gaver-Stehfest

Подставим коэффициенты из таблицы 1 в (1.3) для заданного *F(p)*:

ISSN 2541-9269

$$\tilde{f} = \frac{\ln 2}{t}\left(-\frac{0.000005511}{\sqrt{\frac{\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{\ln 2}{t}}} + \frac{0.152386464}{\sqrt{\frac{2\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{2\ln 2}{t}}} - \frac{117.46547619}{\sqrt{\frac{3\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{3\ln 2}{t}}} + \frac{17342.449338624}{\sqrt{\frac{4\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{4\ln 2}{t}}} - \right.$$

$$-\frac{922806.928902116}{\sqrt{\frac{5\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{5\ln 2}{t}}} + \frac{23774087.7871032}{\sqrt{\frac{6\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{6\ln 2}{t}}} - \frac{349421166.19537}{\sqrt{\frac{7\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{7\ln 2}{t}}} + \frac{3241369852.23188}{\sqrt{\frac{8\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{8\ln 2}{t}}} -$$

$$-\frac{20276948307.238}{\sqrt{\frac{9\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{9\ln 2}{t}}} + \frac{89464829823.797}{\sqrt{\frac{10\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{10\ln 2}{t}}} - \frac{287020921147.103}{\sqrt{\frac{11\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{11\ln 2}{t}}} + \frac{682992010281.51}{\sqrt{\frac{12\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{12\ln 2}{t}}} -$$

$$-\frac{1219082330054.4}{\sqrt{\frac{13\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{13\ln 2}{t}}} + \frac{1637573800842}{\sqrt{\frac{14\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{14\ln 2}{t}}} - \frac{1647177486836.12}{\sqrt{\frac{15\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{15\ln 2}{t}}} + \frac{1221924554444.23}{\sqrt{\frac{16\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{16\ln 2}{t}}} -$$

$$\left. -\frac{648806558817.53}{\sqrt{\frac{17\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{17\ln 2}{t}}} + \frac{233316653213.71}{\sqrt{\frac{18\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{18\ln 2}{t}}} - \frac{50913800705.4674}{\sqrt{\frac{19\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{19\ln 2}{t}}} + \frac{5091380070.54674}{\sqrt{\frac{20\ln 2}{t}}} e^{-\sqrt{\frac{20\ln 2}{t}}} \right)$$

Построим график $\tilde{f}(t)$ и данной функции

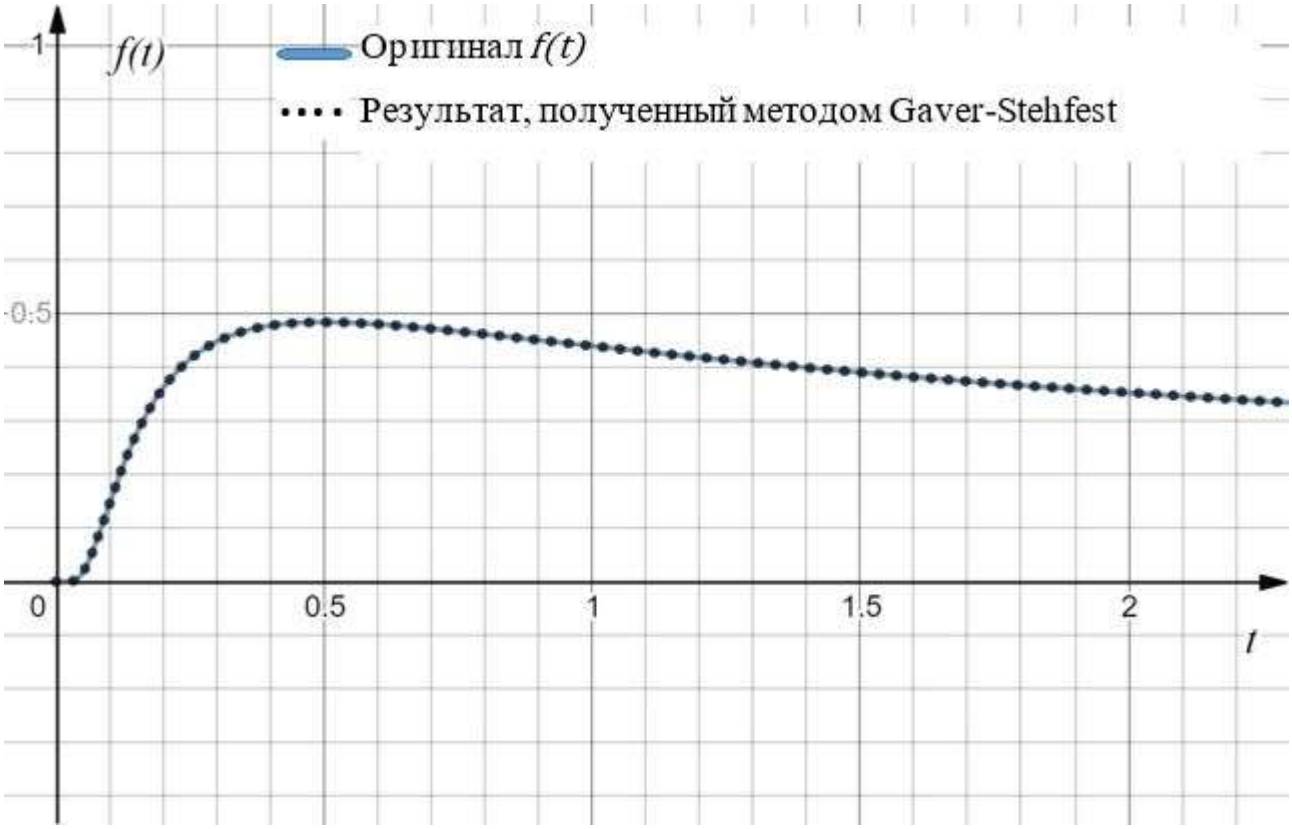

Рис. 4

2. Метод Виддера с ускорением

Примем n = 1, $d_j = 2^j$, j = 1,2,…,k, k = 4.

Вычислим функции $W_{nd_j}(f,t)$ при выбранных параметрах.

ISSN 2541-9269

$$W_2 = \frac{8\left(\frac{2}{(2/t)^2} + \frac{\frac{1}{2/t} + \frac{1}{(2/t)^{3/2}}}{\sqrt{2/t}} + \frac{3}{(2/t)^{5/2}}\right)e^{-\sqrt{2/t}}}{t^3 2!\cdot 4}.$$

$$W_4 = \frac{4^5}{t^5 4!\cdot 16}\left(\frac{60}{(4/t)^2} + \frac{\frac{1}{(4/t)^2} + \frac{15}{(4/t)^3} + \frac{6}{(4/t)^{5/2}} + \frac{15}{(4/t)^{7/2}}}{\sqrt{4/t}} + \frac{4}{(4/t)^{3/2}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{3}{(4/t)^2} + \frac{1}{(4/t)^{3/2}} + \frac{3}{(4/t)^{5/2}}\right) + \frac{18\left(\frac{1}{4/t} + \frac{1}{(4/t)^{3/2}}\right)}{(4/t)^{5/2}} + \frac{105}{(4/t)^{9/2}}\right)e^{-\sqrt{4/t}}.$$

Функции W_8 и W_{16} не приводятся в виду их громоздкости.

Подставим полученные выражения и коэффициенты из таблицы 2 в (2.2), получим

$$\tilde{f}(t) = W_1(4, f, t) = -0{,}04762W_2(f,t) + 0{,}6667W_4(f,t) - 2{,}6667W_8(f,t) + \\ + 3{,}047619W_{16}(f,t).$$

Построим график $\tilde{f}(t)$ и данной функции

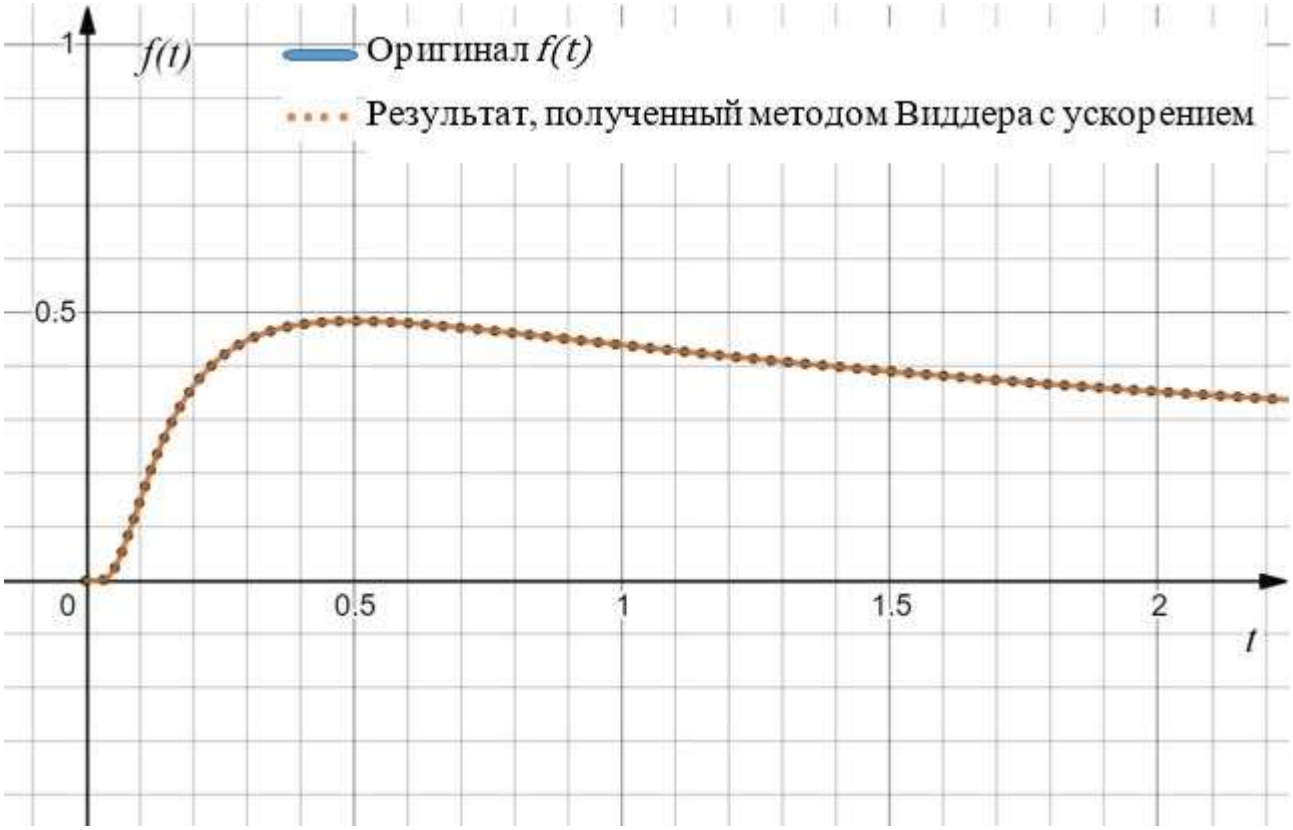

Рис. 5

ISSN 2541-9269

3. Метод разложения в ряд Фурье

Вычислим (3.1) для первых 10 значений (примем q = 0.2):

$$b_0 = \frac{1}{\sqrt{0,2}} e^{-\sqrt{0,2}} = 1,4297,$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3*0,2}} e^{-\sqrt{3*0,2}} = 0,5950,$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{5*0,2}} e^{-\sqrt{5*0,2}} = 0,3678,$$

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{7*0,2}} e^{-\sqrt{7*0,2}} = 0,2588,$$

$$b_4 = \frac{1}{\sqrt{9*0,2}} e^{-\sqrt{9*0,2}} = 0,1948,$$

$$b_5 = \frac{1}{\sqrt{11*0,2}} e^{-\sqrt{11*0,2}} = 0,1529,$$

$$b_6 = \frac{1}{\sqrt{13*0,2}} e^{-\sqrt{13*0,2}} = 0,1236,$$

$$b_7 = \frac{1}{\sqrt{15*0,2}} e^{-\sqrt{15*0,2}} = 0,1021,$$

$$b_8 = \frac{1}{\sqrt{17*0,2}} e^{-\sqrt{17*0,2}} = 0,0857,$$

$$b_9 = \frac{1}{\sqrt{19*0,2}} e^{-\sqrt{19*0,2}} = 0,0730.$$

Подставив (3.3) в (3.2) для данного примера, получим треугольную систему уравнений (3.5) для коэффициентов c_n.

Вычислим эти коэффициенты:

$$c_0 = 0,3640,$$
$$c_1 = 0,2419,$$
$$c_2 = 0,0447,$$
$$c_3 = -0,0032,$$
$$c_4 = -0,0431,$$
$$c_5 = -0,0355,$$
$$c_6 = -0,0359,$$
$$c_7 = -0,0195,$$
$$c_8 = -0,0150,$$
$$c_9 = -0,0031.$$

Подставив их в (3.3), найдём $\tilde{f}(\theta)$:

ISSN 2541-9269

$$\tilde{f}(\theta) = 0{,}3640\,sin(\theta) + 0{,}2419\,sin(3\theta) + 0{,}0447\,sin(5\theta) - 0{,}0032\,sin(7\theta) - \\ - 0{,}0431\,sin(9\theta) - 0{,}0355\,sin(11\theta) - 0{,}0359\,sin(13\theta) - 0{,}0195\,sin(15\theta) - \\ - 0{,}0150\,sin(17\theta) - 0{,}0031\,sin(19\theta).$$

Теперь вернёмся к прежним обозначениям $(\theta = arccos\, e^{-qt})$:

$$\tilde{f}(t) = 0{,}3640\,sin(arccos(e^{-0{,}2t})) + 0{,}2419\,sin(3\,arccos(e^{-0{,}2t})) + \\ + 0{,}0447\,sin(5\,arccos(e^{-0{,}2t})) - 0{,}0032\,sin(7\,arccos(e^{-0{,}2t})) - \\ - 0{,}0431\,sin(9\,arccos(e^{-0{,}2t})) - 0{,}0355\,sin(11\,arccos(e^{-0{,}2t})) - \\ - 0{,}0359\,sin(13\,arccos(e^{-0{,}2t})) - 0{,}0195\,sin(15\,arccos(e^{-0{,}2t})) - \\ - 0{,}0150\,sin(17\,arccos(e^{-0{,}2t})) - 0{,}0031\,sin(19\,arccos(e^{-0{,}2t})).$$

Построим график $\tilde{f}(t)$ и данной функции

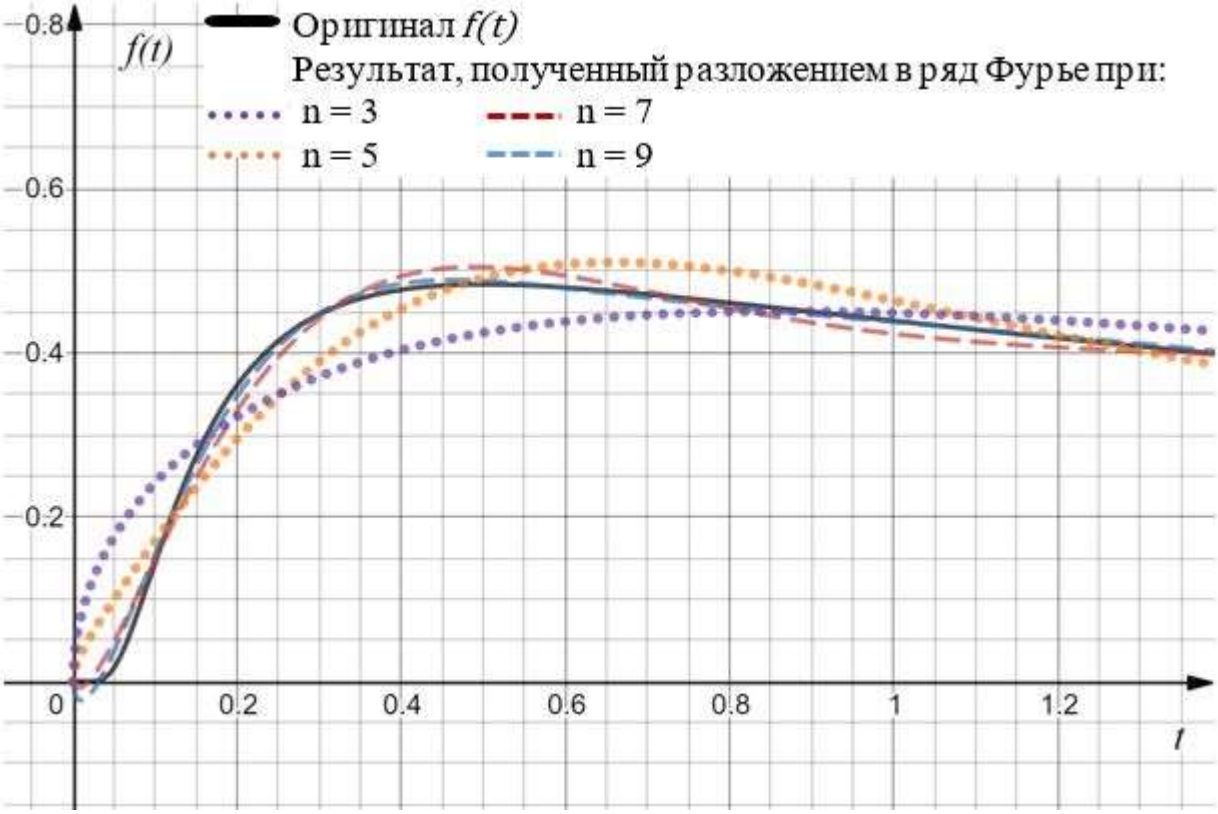

Рис. 6

Как видно из примеров, метод Gaver-Stehfest и ускоренный метод Виддера дают наиболее точные результаты приближения к оригиналу. Численный метод обращения преобразования Лапласа разложением в ряд Фурье для повышения точности требует большего числа слагаемых.

Наименьших вычислительных ресурсов из трех представленных методов требует алгоритм Gaver-Stehfest, так как имеет постоянные коэффициенты и не требует выбора дополнительных параметров для их вычисления.

Литература

1. Davies B., Martin B. Numerical Inversion of the Laplace Transform: a Survey and Comparison of Methods // *Journal* of *Computational Physics.* 1979. v.33. №1. P.1-32.
2. Kuznetsov A. On the convergence of the Gaver-Stehfest algorithm // SIAM J. Numer. Anal. 2013. № 51(6). P. 2984–2998.
3. Андрейченко Д.К. Эффективный алгоритм численного обращения интегрального преобразования Лапласа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Том 40. №7. С. 1030-1044.
4. Мышкис А.Д. Математика для ВТУЗов. Специальные курсы. М.: Наука, 1971. 632 с.
5. Рябов В. М. Численное обращение преобразования Лапласа. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2013. 187 с.
6. Ким А. А., Коломоец А. А. Численные методы обращения преобразования Лапласа [Текст] // Наукоемкие проекты и технологии в машино- и приборостроении, медицине: сб. материалов Всерос. молодеж. науч. конф. Саратов, 3-5 декабря 2018 г. Саратов. гос. техн. ун-т, 2018. С. 297-300.
7. Коломоец А. А., Ким А. А. Сравнение численных методов обращения преобразования Лапласа [Текст] // Евразийский Союз Ученых. 2018. № 10. (55). С. 70-76.