

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/25-91

Ссылка для цитирования этой статьи:

Кожанов В.С., Попова Е.В. Моделирование нестационарного пограничного слоя на плоской полубесконечной пластине в начальной стадии ее движения в неньютоновской жидкости // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. №2

УДК 532.517.2:539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛОСКОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ В НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ В НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Кожанов В.С.¹, Попова Е.В.²

¹ Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, kozhanovvs@mail.ru

² Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, elizaveta.popova.97@bk.ru

MODELING OF A NON-STATIONARY BOUNDARY LAYER ON A PLANE SEMI-INFINITE PLATE AT THE INITIAL STAGE OF ITS MOTION IN A NON-NEWTONIAN LIQUID

Kozhanov V.S.¹, Popova E.V.²,

¹Saratov State University, Russia, Saratov, kozhanovvs@mail.ru

²Saratov State University, Russia, Saratov, elizaveta.popova.97@bk.ru

Аннотация. В работе решается задача о движении неньютоновской жидкости под действием пластины, начинающей свое движение с постоянным ускорением. Разработана математическая модель для случая неньютоновской среды. В частности, представлено уравнение, описывающее течение в пограничном слое, и определены соответствующие ему начальные и граничные условия. Выполнен переход к автомодельным переменным в полученной краевой задаче и сформулирована автомодельная задача. Рассмотрен алгоритм численного решения и предложена блок-схема, реализованная в виде программы на языке Python. Приведены результаты численного моделирования зависимости распределения скорости движения жидкости от закона движения пластины для дилатантной и псевдопластической жидкости.

Ключевые слова: пограничный слой, неньютоновская жидкость, нестационарное движение

Abstract. The paper deals with the non-Newtonian fluid motion problem under the action of a plate beginning its motion with constant acceleration. A mathematical model is developed for the case of a non-Newtonian medium. In particular, the equation describing the flow in the boundary layer is presented and the corresponding initial and boundary conditions are determined. The

transition to self-similar variables in the resulting boundary value problem is performed and the self-similar problem is formulated. The algorithm of the numerical solution is considered and the block diagram realized in the form of the program in Python language is offered. The numerical simulation results of the fluid velocity distribution dependence on the plate motion law for dilatant and pseudoplastic fluids are presented.

Keywords: boundary layer, non-Newtonian fluid, unsteady motion

Процессы и явления, связанные с изучением особенностей течения жидкости и газа имеют важное теоретическое и прикладное значение [1-3]. Одним из основных разделов механики жидкости является теория пограничного слоя [1,4]. Вязкость жидкости может иметь существенное влияние на характер ее течения, а, следовательно, и на гидродинамические параметры потока. На данную особенность было указано ещё в гидродинамике Д. Бернулли. В работах Навье, Пуассона и Стокса также имеются указания на то, что в связи с учётом вязкости жидкости должны измениться граничные условия вблизи стенок. Идея о преобладающем влиянии вязкости жидкости только вблизи стенок была высказана Д. И. Менделеевым, а затем в работах Н. Е. Жуковского [5]. Л. Прандтлем она была оформлена в виде уравнений пограничного слоя [6]. Введение пограничного слоя позволяет существенно упростить уравнения, моделирующие обтекание тела жидкостью, путём разделения потока на две области: очень тонкого слоя вблизи тела (пограничный слой), где трение играет существенную роль, и область вне этого слоя, где трение несущественно. Эта гипотеза, с одной стороны, позволила получить физически очень наглядное объяснение важной роли вязкости в проблеме сопротивления, а с другой стороны, дала возможность преодолеть математические трудности и тем самым открыла путь теоретическому исследованию течений жидкости с трением. Среди работ по теории пограничного слоя можно выделить не только фундаментальные труды Шлихтинга [1] и Лойцянского [4], но и работы Тарга С.М., Аржаникова Н.С. и Мальцева В.Н. [7, 8].

Среди методов решения задач теории пограничного слоя можно выделить как аналитические, так и численные методы. К числу аналитических методов исследования можно отнести методы возмущений, например, метод сращиваемых асимптотических разложений или метод многих масштабов, а также методы построения автомодельных приближений [3, 9, 10].

Для построения точных решений нелинейных уравнений математической физики разработан ряд методов, основанных на переходе к новым переменным (зависимым и независимым) [10]. При этом обычно ставится цель: найти новые переменные, число которых меньше, чем число исходных. Переход к таким переменным приводит к более простым уравнениям [3, 11]. В частности, поиск точных решений уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными сводится к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений (или систем таких уравнений). Естественно, при указанной редукции решения обыкновенных дифференциальных уравнений дают не все решения

исходного уравнения с частными производными, а лишь класс решений, обладающих некоторыми свойствами [12]. Наиболее простыми классами точных решений, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, являются решения типа бегущей волны и автомодельные решения. Существование этих решений обычно (но не всегда) обусловлено инвариантностью рассматриваемых уравнений относительно сдвига и растяжения–сжатия [13, 14]. Явление, развивающееся во времени, называется автомодельным, если распределения его характеристик в разные моменты времени получаются одно из другого преобразованием подобия [15]. Таким образом, автомодельность позволяет во многих случаях свести задачу математической физики к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, т.е. упростить исходную задачу, а затем при помощи автомодельных решений исследовать характерные ее свойства. Кроме того, автомодельные решения часто используются как эталоны при оценке приближенных методов решения более сложных задач.

Проблема разработки математических моделей движения ньютоновских и неньютоновских жидкостей является актуальной в настоящее время. Например, моделирование взаимодействия слоя вязкой ньютоновской жидкости в узких каналах с упругими и подвижными стенками, образованными пластинами, дисками или цилиндрами рассмотрено в работах [16-18]. В работе [19] проведено исследование локального теплообмена и особенностей течения в пограничном слое при вынужденной конвекции неньютоновских жидкостей около изотермической поверхности, охлажденной по отношению к омывающей ее среде, с учетом зависимости вязкости последней от температуры. В настоящей работе предлагается математическое моделирование течения типа Куэтта в нестационарном пограничном слое неньютоновской жидкости, ограниченной полубесконечной пластиной, возникающем в начальной стадии движения последней.

Рассмотрим плоскую задачу для полупространства, занятого неподвижной неньютоновской жидкостью с постоянным давлением. Считаем, что это верхнее полупространство, отделено от нижнего полупространства абсолютно жесткой пластиной. В начальный момент времени скорость пластины равна нулю, и она приходит в движение в своей собственной плоскости с постоянным ускорением A , т.е. возникает равноускоренное движение пластины со скоростью $u = At^\alpha$ в соответствии с рис 1. Полагаем, что на границе контакта жидкости и пластины выполняются условия прилипания, другими словами, скорости движения пластины и жидкости на линии контакта совпадают. Введем декартову систему, центр которой в невозмущенном состоянии совпадает с пластиной, ось x направим в плоскости пластины, ось y – перпендикулярно к пластине. Компоненту скорости вдоль оси x обозначим U , а компоненту скорости вдоль оси y обозначим v . Далее будем рассматривать несжимаемую жидкость и пренебрегать изменением ее температуры, т.е. полагать ее плотность и температуру постоянными.

Рассматривая движение жидкости в пограничном слое, будем считать, что возникает разгонное нестационарное слоистое движение типа Куэтта. В этом случае движение характеризуется только продольными компонентами скорости, параллельными направлению движения пластины. Другими словами считаем, что компоненты скорости вдоль оси y тождественно равны нулю. Градиентом давления пренебрегаем, т.е. $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$. В этом случае можно

выделить две характерные граничные скорости: это скорость на линии контакта жидкости и пластины и скорость жидкости на бесконечно удаленном расстоянии от пластины. Во введенной системе координат скорость на границе контакта равна скорости пластины, а на бесконечности она стремится к нулю.

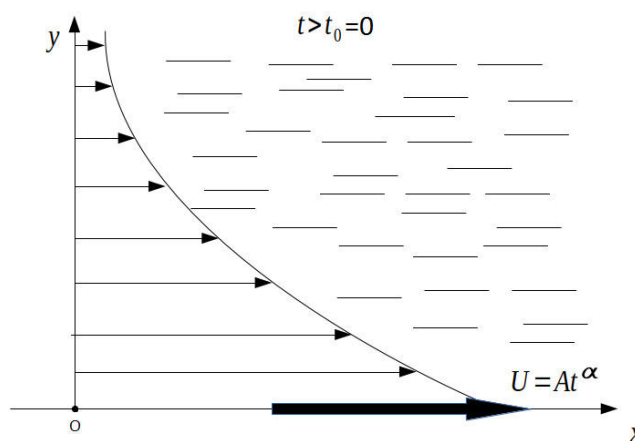


Рис. 1. Схема течения типа Куэтта в нестационарном пограничном слое неньютоновской жидкости, ограниченной полубесконечной пластиной в начальной стадии движения последней

С учетом сделанных предположений движение неньютоновской жидкости описывается уравнением:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu_* n \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

где u – продольная составляющая скорости жидкости, t – время, n – реологический индекс, ρ – плотность жидкости, μ_* – реологический параметр, характеризующий неньютоновскую жидкость. Заметим, что случай $n = 1$ соответствует случаю вязкой ньютоновской жидкости, случай $n < 1$ – псевдопластической неньютоновской жидкости, случай $n > 1$ – дилатантной неньютоновской жидкости [20].

Граничные условия на поверхности пластины соответствуют условиям ее прилипания к ней, т.е. имеют вид:

$$\text{при } t > 0, y = 0 : u = At^\alpha. \quad (2)$$

Граничные условия вдали от пластины («на бесконечности») имеют вид:

$$\text{при } t > 0, y \rightarrow \infty : u \rightarrow 0. \quad (3)$$

Начальные условия:

$$\text{при } t = 0, y \geq 0: u = 0. \quad (4)$$

Введем масштабные величины. Обозначим через T – масштаб времени, через U – масштаб скорости в направлении оси x , через Y – масштаб длины в направлении оси y :

$$t = T\bar{t}, \quad u = U\bar{u}, \quad y = Y\bar{y}. \quad (5)$$

Учитывая, что движение равноускоренное, то масштаб скорости может быть принят как:

$$u = AT^\alpha \bar{u}. \quad (6)$$

Подставляя (5) в (1) получим:

$$\rho \frac{AT^\alpha}{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \mu_* n \frac{AT^\alpha}{Y^2} \left| \frac{AT^\alpha}{Y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial^2 \bar{y}^2}. \quad (7)$$

Так как масштабы в уравнении (7) слева и справа должны совпадать, то приравнивая коэффициенты при производных получаем:

$$\rho = \mu_* n \frac{A^{n-1} T^{\alpha n}}{Y^{n+1}} \Rightarrow Y = \sqrt[n+1]{\mu_* n \frac{A^{n-1} T^{\alpha n}}{\rho}}. \quad (8)$$

Учитывая (8) и осуществляя переход к безразмерным переменным будем иметь:

$$u = At^\alpha \bar{u} \left(\frac{t}{T}, y / \sqrt[n+1]{\mu_* n \frac{A^{n-1} T^{\alpha n}}{\rho}} \right). \quad (9)$$

Поскольку решение задачи для функции u не должно зависеть от T , то это значит, что функция \bar{u} не зависит от 1-ого аргумента, т.е. соотношение (9) можно переписать так

$$u = At^\alpha f(\eta), \quad \eta = y \left(\frac{\rho}{\mu_* n A^{n-1} t^{\alpha n}} \right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad (10)$$

где f – автомодельный представитель функции u , η – независимая автомодельная переменная.

Покажем, что данный выбор может свести задачу к автомодельной, т.е. к обыкновенному дифференциальному уравнению. Для этого найдем производные:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{y}{\left(\frac{\mu_* n}{\rho} A^{n-1} \right)^{\frac{1}{n+1}}} \frac{\alpha(n-1)+1}{n+1} \frac{1}{t^{\frac{\alpha(n-1)+1}{n+1}} t} = -\eta \frac{\alpha(n-1)+1}{(n+1)t}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \left(\frac{\mu_* n}{\rho} A^{n-1} t^{\alpha(n-1)+1} \right)^{\frac{1}{n+1}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\alpha t^{\alpha-1} f(\eta) + At^\alpha f'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} = A\alpha t^{\alpha-1} f(\eta) + At^\alpha f'(\eta) \left(-\eta \frac{\alpha(n-1)+1}{(n+1)t} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = At^\alpha f'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = At^\alpha f'(\eta) \left(\frac{\mu_* n}{\rho} A^{n-1} t^{\alpha(n-1)+1} \right)^{-\frac{1}{n+1}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = At^\alpha f''(\eta) \left(\frac{\mu_* n}{\rho} A^{n-1} t^{\alpha(n-1)+1} \right)^{-\frac{1}{n+1}} \frac{\partial \eta}{\partial y} =$$

$$= At^\alpha f''(\eta) \left(\frac{\mu_* n}{\rho} A^{n-1} t^{\alpha(n-1)+1} \right)^{-\frac{2}{n+1}}.$$

Подставляем (11) в (1), получаем:

$$A\alpha t^{\alpha-1} f(\eta) - At^{\alpha-1} f'(\eta) \eta \left(\frac{\alpha(n-1)+1}{n+1} \right) = \tag{12}$$

$$= \frac{\mu_* n}{\rho} \left| At^\alpha f'(\eta) \frac{1}{\left(\frac{\mu_* n}{\rho} A^{n-1} t^{\alpha(n-1)+1} \right)^{\frac{1}{n+1}}} \right|^{n-1} \left| At^\alpha f''(\eta) \frac{1}{\left(\frac{\mu_* n}{\rho} A^{n-1} t^{\alpha(n-1)+1} \right)^{\frac{2}{n+1}}} \right|.$$

После ряда преобразований (12) окончательно получим следующее автомодельное дифференциальное уравнение:

$$f''(\eta) |f'(\eta)|^{n-1} + \eta \left(\frac{\alpha(n-1)+1}{n+1} \right) f'(\eta) - \alpha f(\eta) = 0. \tag{13}$$

Далее представим граничные условия (2)-(3) для уравнения (13) с учетом соотношения (10) и введенной автомодельной переменной.

Граничное условие на поверхности пластины принимает вид:

$$\text{при } \eta = 0: f(0) = 1. \tag{14}$$

Граничное условие «на бесконечности» принимает вид:

$$\text{при } \eta \rightarrow \infty: f|_{\eta \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \tag{15}$$

Таким образом, в автомодельных переменных решение задачи о движении жидкости под действием пластины, начинающей равноускоренное движение, сводится к решению задачи (13) с граничными условиями (14), (15).

Заметим, что в полученной задаче при $n = 1$ осуществляется переход к обычной ньютоновской вязкой жидкости.

Для решения данной задачи применяем метод пристрелки, который представляет собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге-Кутты 4-го порядка [21]. Обсудим его реализацию для решения краевой задачи (13), (14), (15). Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) (13) является ОДУ 2-го порядка относительно искомой функции $f(\eta)$. Для численного интегрирования этого уравнения на полуинтервале $[0, \infty)$ необходимо наличие двух начальных условий, а именно при $\eta = 0$ необходимо знать

$$f(0) = y_{00} = 1, \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=0} = y_{01}.$$

В этом случае для ОДУ (13) имели бы задачу Коши. Однако известно только одно условие y_{00} . Значение y_{01} необходимо определить. Оно должно быть таким, чтобы при $\eta \rightarrow \infty$ выполнялось условие (15). Поэтому при реализации численного интегрирования вместо полуинтервала $[0, \infty)$ будем рассматривать интервал $[0, \eta_k]$, где η_k – достаточно большое число [21]. Условие (15) при этом заменяется эквивалентным условием:

$$\text{при } \eta = \eta_k : f(\eta_k) = y_{10} = 0. \quad (16)$$

Блок-схема реализованного численного метода решения на рис. 2.

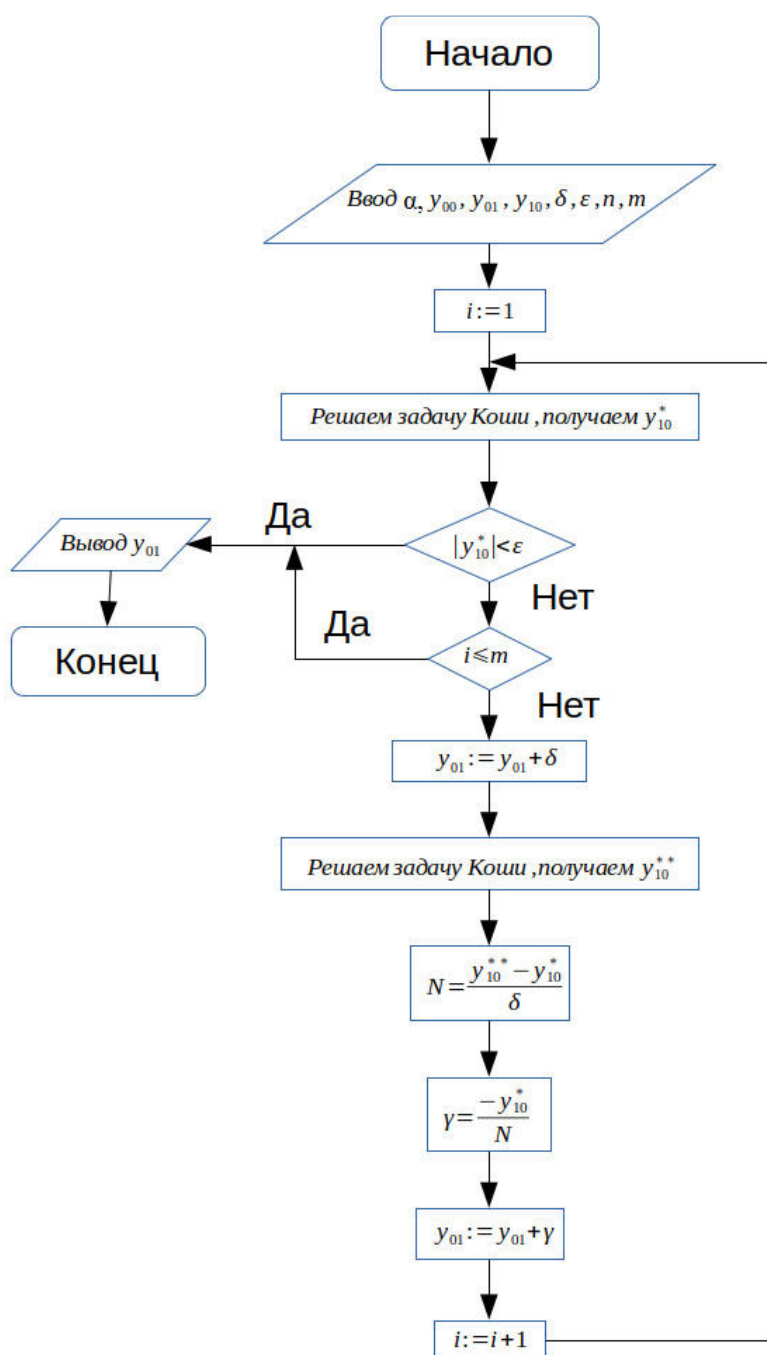


Рис. 2. Блок-схема алгоритма решения автомодельной задачи

На основе данной блок-схемы написана программа на языке Python [22, 23], выполняющая представленный алгоритм.

Дальнейшее изучение полученной автомодельной задачи проводилось численно. В ходе расчетов исследовали поведение безразмерной скорости $\frac{u}{At^\alpha} = f(\eta)$ на отрезке $[0,10]$ автомодельной переменной η . Результаты вычислительных экспериментов приведены на рис.3-8. В частности, графики зависимости безразмерной скорости $\frac{u}{At^\alpha} = f(\eta)$ от автомодельной переменной при различных значениях α и n представлены на рис. 3-5. Графики зависимости неизвестного начального условия y_{10} от показателя α при различных значения n представлены на рис. 6-8.

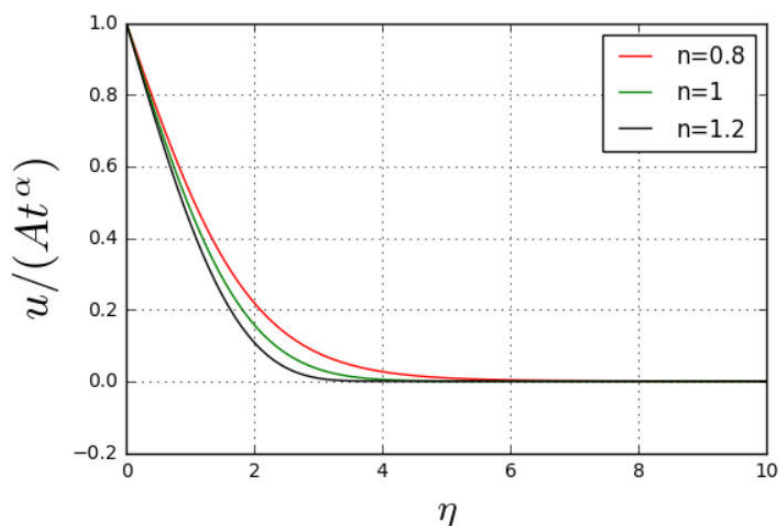


Рис. 3. Распределение безразмерных скоростей в жидкости при $\alpha = 0$

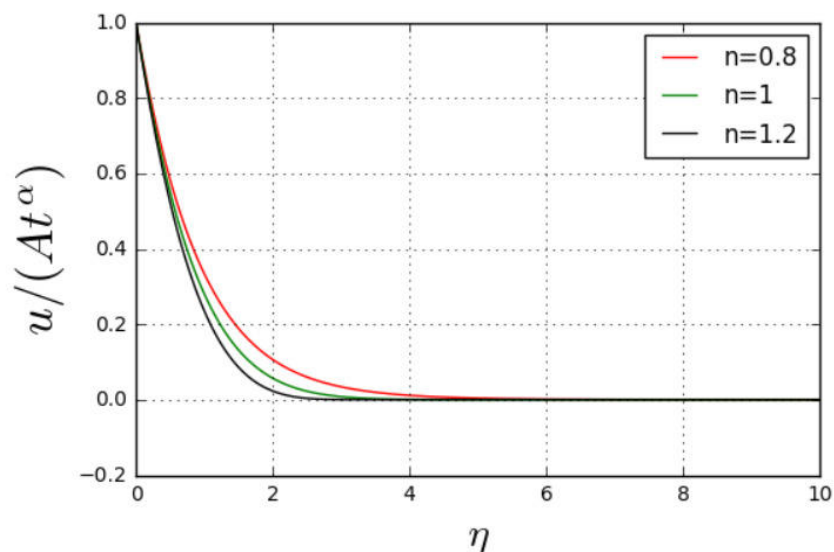


Рис. 4. Распределение безразмерных скоростей в жидкости при $\alpha = 1$

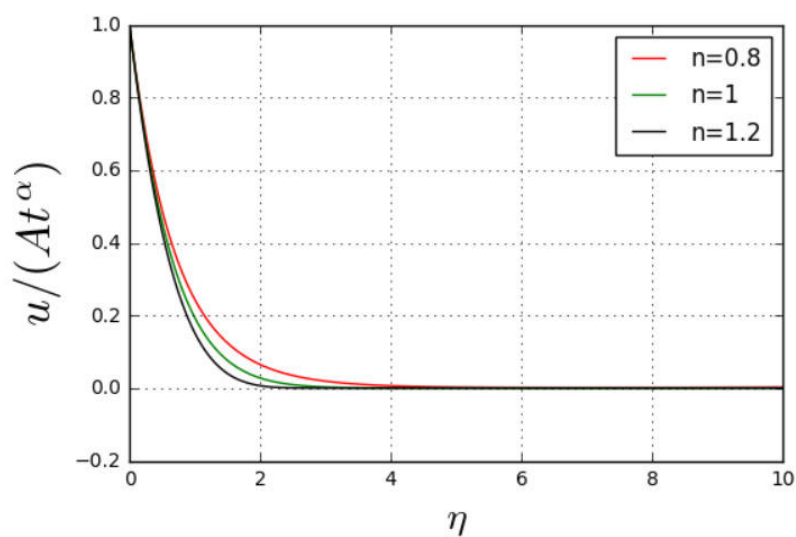


Рис. 5. Распределение безразмерных скоростей в жидкости при $\alpha = 2$

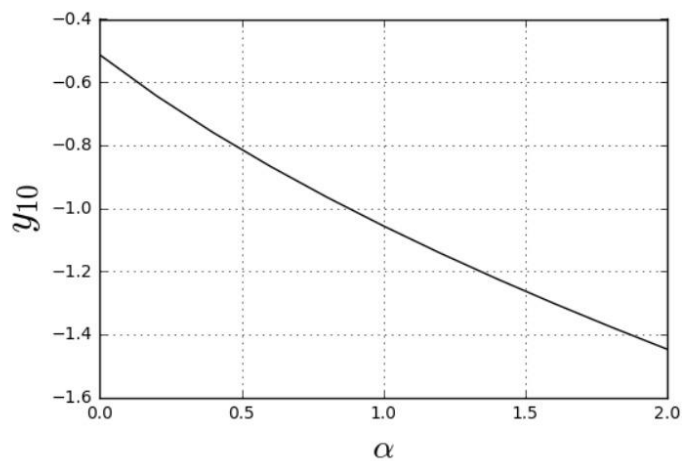


Рис. 6. График зависимости y_{10} от α при $n = 0.8$

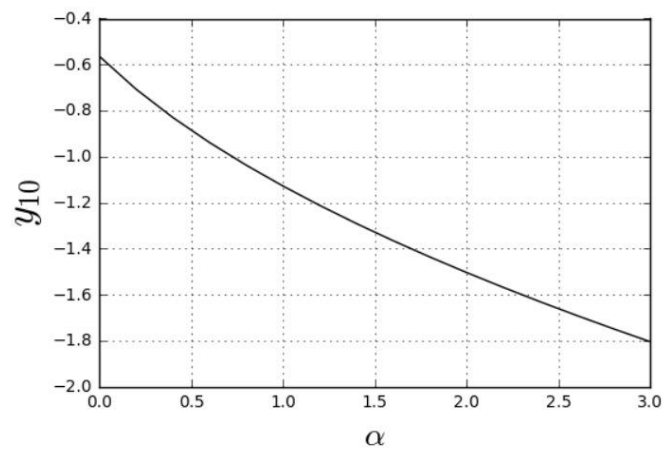


Рис. 7. График зависимости y_{10} от α при $n = 1$

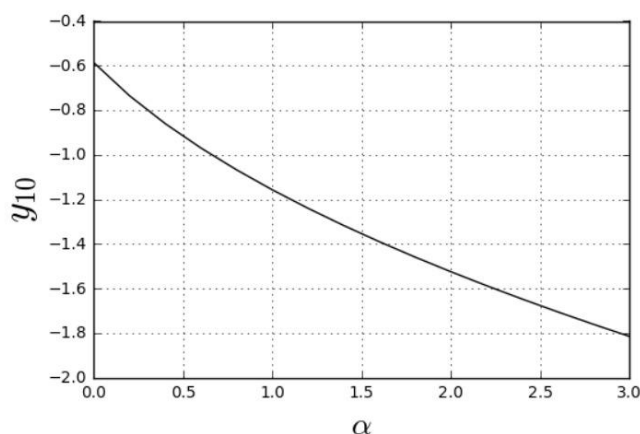


Рис. 6: График зависимости y_{10} от α при $n = 1.1$

Из представленных выше графиков, видно что чем быстрее ускоряется пластина и чем больше значение n , тем меньше толщина пограничного слоя, то есть того слоя жидкости, который вовлекается в движение. Это объясняется тем, что чем выше скорость пластины, тем меньше время на распространение возмущений от нижних слоев к верхним. Приведенные данные расчетов показывают, что y_{10} монотонно убывает при увеличении α .

Таким образом, разработана математическая модель задачи для исследования движения неньютоновской жидкости под действием пластины, приведенной в движение с ускорением. Проведенное численное исследование данной модели показало, что толщина пограничного слоя уменьшается вместе с увеличением показателя α . Полученная модель и разработанная программа могут применяться для исследования течений типа Куэтта, вызванных ускоренным движением пластины как в псевдопластической (при $n < 1$), так и дилатантной (при $n > 1$) неньютоновских жидкостях.

Литература

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. М.: Наука. 1974. 712 с.
2. Коробейников В.П., Мельникова Н.С., Рязанов Е.В. Теория точечного взрыва. М.: Физматгиз. 1961. 332 с.
3. Волосевич П.П., Леванов Е.И. Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. М.: МФТИ. 1997. 240 с.
4. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматлит. 1962. 480 с.
5. Жуковский Н.Е. Полное собрание сочинений. Гидродинамика. М.:ГРАЛ. 1935. 365 с.
6. Прандтль Л., Титъенс О. Гидро- и аэромеханика. М.: Высшая школа. 1935. 285 с.
7. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарного течения. М.: ГИТТЛ. 1951. 420с.

8. Аржаников Н.С., Мальцев В.Н. Аэродинамика. М.: Оборонгиз. 1956. 485 с.
9. Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Мир. 1984. 535 с.
10. Дерендяев Н.В. Методы возмущений. Нижний Новгород. 2007. 78 с.
11. Бретшнайдер С. Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчёта. М. 1966. 536 с.
12. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МЭИ. 2003. 596 с.
13. Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. 1997. 508 с.
14. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука. 1970. 166 с.
15. Ломов С.А. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Издательство МГУ. 2011. 456 с.
16. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдвигаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №4. С. 23-32.
17. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и поперечные колебания упругозакрепленной стенки клиновидного канала, установленного на вибрирующем основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 3. С. 28-36.
18. Kondratov D.V., Popov V.S., Popova A.A. Longitudinal Walls Oscillations of an Annular Channel Filled with Pulsating Viscous Fluid // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2019. Vol. 272. 032253
19. Селиванов Н.В., Кузьмин С.И. Численное моделирование вынужденного течения в пограничном слое и теплообмена неньютоновской жидкости с учетом зависимости вязкости от температуры // ТВТ. 2009. Т.47. №6. С. 921-926.
20. Берковский Б.М. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск: Наука и техника. 1966. 239 с.
21. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука. 1989. 432 с.
22. Лутц М. Программирование на Python. СПб.: Символ-Плюс. 2011. 256 с.
23. Хахаев И.А. Практикум по алгоритмизации и программированию на Python. М.: Альт Линукс. 2010. 512 с.