

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/25-94](http://mathmod.esrae.ru/25-94)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И., Кондратов Д.В. Моделирование волновых процессов в двух соосных оболочках заполненных вязкой жидкостью с учетом инерции ее движения и окруженных упругой средой // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. №2

*Выполнено при поддержке гранта РФФИ 19-01-00014 и гранта Президента Российской Федерации МД-756.2018.8*

УДК 532.516:539.3

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ДВУХ СООСНЫХ ОБОЛОЧКАХ ЗАПОЛНЕННЫХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ И ОКРУЖЕННЫХ УПРУГОЙ СРЕДОЙ**

Блинков Ю.А.<sup>1</sup>, Евдокимова Е.В.<sup>2</sup>, Могилевич Л.И.<sup>3</sup>, Кондратов Д.В.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,  
Россия, Саратов, [BlinkovUA@info.sgu.ru](mailto:BlinkovUA@info.sgu.ru)

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Россия, Саратов, [eev2106@mail.ru](mailto:eev2106@mail.ru)

<sup>3</sup>Саратовский государственный технический университет имени  
Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, [mogilevich@sgu.ru](mailto:mogilevich@sgu.ru)

<sup>4</sup>Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина – филиал  
Российской академии народного хозяйства и государственной службы  
при Президенте Российской Федерации, Россия, Саратов,  
[kondratovdv@yandex.ru](mailto:kondratovdv@yandex.ru)

## **NONLINEAR WAVES IN TWO COAXIAL CYLINDER SHELLS CONTAINING A VISCOUS LIQUID WITH INERTIA OF ITS MOVEMENT, UNDER THE IMPACT OF THE SURROUNDING ELASTIC MEDIUM AND STRUCTURAL DAMPING IN THE LONGITUDINAL DIRECTION**

Blinkov Y.A.<sup>1</sup>, Evdokimova E.V.<sup>2</sup>, Mogilevich L.I.<sup>3</sup>, Kondratov D.V.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Russia, Saratov, [BlinkovUA@info.sgu.ru](mailto:BlinkovUA@info.sgu.ru)

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov,  
[eev2106@mail.ru](mailto:eev2106@mail.ru)

<sup>3</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov,  
[mogilevich@sgu.ru](mailto:mogilevich@sgu.ru)

<sup>4</sup>Volga Management Institute named after P.A. Stolypin - a branch of Federal State-Funded Educational Institution of Higher Education Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Russia, Saratov,  
[kondratovdv@yandex.ru](mailto:kondratovdv@yandex.ru)

**Аннотация.** Известны математические модели волновых движений в бесконечно

длинных геометрически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в виде обобщенных уравнений Кортвега де Вриза (КдВ). Также методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках, отличающиеся от известных учетом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками, в виде системы обобщенных уравнений КдВ. В представленной статье проведено исследование модели волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, как между ними, так и внутри и окруженных упругой средой, действующей, как в нормальном, так и в продольном направлении. Для рассмотренных систем уравнений с учетом влияния жидкости с помощью построения базиса Грёбнера получены разностные схемы типа Кранка-Николсона. Для генерации этих разностных схем использованы базовые интегральные разностные соотношения, которые аппроксимируют исходную систему уравнений.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки.

**Abstract.** The present article deals with further developing of perturbation method for deformation non-linear waves in an elastic cylinder shell, filled with viscous incompressible liquid without inertia of its movement, surrounded by an elastic media and under construction damping in longitudinal direction. Surrounding medium presence leads to integral-differential equation, to generalizing Korteweg-de Vries ones and possessing the same soliton in the form of a solitary wave - a soliton. It does not contain an arbitrary constant number unlike Korteweg-de Vries equation solution. The viscous incompressible liquid presence inside the shell behavior is described by means of dynamics and continuity equation, is solved together with boundary conditions liquid adhesion to a shell wall. The solution is presented by direct expansion of unknown function by small parameter of hydroelasticity problem and reduced to the problem for hydrodynamics lubrication theory equations. The equations solution defines the tensions on the part of the liquid, the tensions influence the shell longitudinal and normal directions. The liquid presence in the shell adds to longitudinal deformation waves equations one more equation member, which does not allow to find exact solution. Construction damping in a longitudinal direction adds the same equation member, like liquid presence does. They possess opposite signs in the case of shell Poisson coefficient being smaller than 1/2. In contrary case signs coincide. Liquid presence in the shell and construction damping demand for numerical research. The liquid presence leads to the equation, generalizing Korteweg-de Vries equation, lacking the exact solution and demanding numerical investigation. The numerical investigation is carried out with the use of the modern approach, relying on the universal algorithm of commutative algebra for integro-interpolation method. As a result of difference Gröbner basis construction, the difference Crank-Nicolson type schemes are generalized. The schemes were obtained due to the use of basic integral difference correlations, approximating the initial equations system. Computational experiment showed that in the case of construction damping and liquid impact have opposite signs but coincide in value, their influence does not case and a soliton propagates without changing its direction and its amplitude, which coincide analytical solution. If constructive damping exceeds liquid impact, the wave amplitude decreases; in the opposite case the wave amplitude grows.

Keywords: nonlinear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylinder shell

## Введение

В работе рассматривается задача взаимодействия вязкой несжимаемой жидкостью с двумя соосными геометрически и физически нелинейными оболочками с учетом влияния упругой среды на внешнюю оболочку. Аналогичная задача без влияния упругой среды была рассмотрена в работе [1]. Решение этой задачи имеет важное значение для акустической диагностики и неразрушающего контроля материалов. Во многом интерес к подобным задачам инициирован необходимостью анализа упругих и динамических свойств нанообъектов, в частности, карбоновых нанотрубок.

В современной волновой динамике одним из важных направлений является изучение поведения волн деформаций в упругих оболочках. В условиях вибрации взаимодействие вязкой несжимаемой жидкости с упругими оболочками исследовалось в [2-4], а с учётом вращения жидкости - в [5]. Проблемы распространения волн в упругих и вязкоупругих тонкостенных конструкциях, в том числе в бесконечно длинных цилиндрических оболочках без взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью, рассматривались в [6] с позиции теории солитонов [5,6].

Известны математические модели, учитывающие влияние вязкой несжимаемой жидкости на волновые процессы в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных оболочках [7, 8]. При этом найдены эффекты влияния вязкой несжимаемой жидкости на поведение волны деформации в оболочке в зависимости от коэффициента Пуассона материала оболочки. В частности, при наличии жидкости в оболочке из неорганических материалов (различные трубопроводы в технологических сооружениях) выявлен экспоненциальный рост амплитуды волны. В случае органического материала (кровеносные сосуды) волна в жидкости быстро затухает.

Методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках [8], которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости, находящейся между ними, с соответствующими краевыми условиями, в виде системы обобщенных уравнений Кортвега де Вриза (КдВ). Показано, что волна деформаций во внешней оболочке приводит во внутренней оболочке к возникновению волны деформаций, которой в начальный момент времени не было. Происходит «перекачка энергии» (через слой жидкости) от внешней оболочки к внутренней, в результате этого во внешней оболочке имеет место немонотонное падение амплитуды волны, и, как следствие, немонотонное снижение скорости её распространения. При этом во внутренней оболочке амплитуда немонотонно увеличивается. С течением времени значения скоростей и амплитуд волн в оболочках выравниваются.

## **Постановка задачи**

Рассмотрим, окруженные упругой средой, две соосные бесконечно длинные упругие оболочки на рисунке 1, между которыми находится вязкая несжимаемая жидкость. Ширина щели, занимаемой жидкостью  $\delta$ , радиус срединной поверхности оболочки  $R$ ;  $R_1 = R^{(1)} - \frac{h_0^{(1)}}{2}$  - внутренний радиус внешней оболочки;  $R_2 = R^{(2)} + \frac{h_0^{(2)}}{2}$  - внешний радиус внутренней оболочки;  $R_3 = R^{(2)} - \frac{h_0^{(2)}}{2}$  - внутренний радиус внутренней оболочки,  $R^{(1)}$ ,  $R^{(2)}$  - радиусы срединных поверхностей внешней и внутренней оболочек;  $h_0^{(1)}$ ,  $h_0^{(2)}$  - их толщины. Все механические перемещения внутренней оболочки обозначены индексом (2) сверху, а внешней - индексом (1).

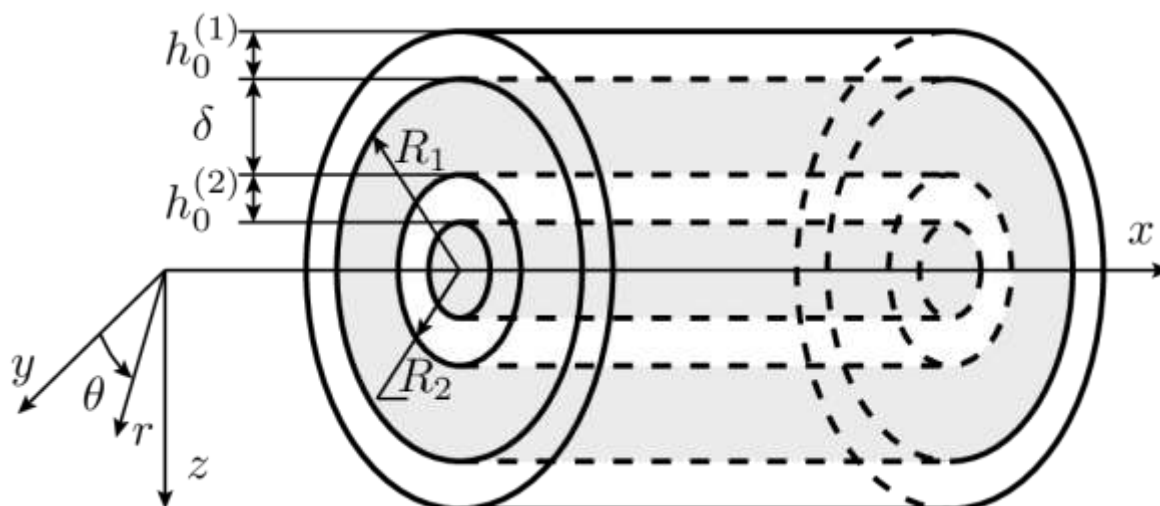


Рис.1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки

Записывая уравнение движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Киргофа-Лява, считаем материал линейно-упругим с линейной зависимостью интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от интенсивности деформаций  $e_i$  [9]

$$\sigma_i = E e_i,$$

где  $E$  - модуль Юнга.

Запишем уравнение Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат в случае осесимметричного течения [10, 11]

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right],$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right], \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$$

На границе оболочек и жидкости на рисунке 1 при  $r = R_i - W^{(i)}$  выполняются условия прилипания жидкости [11]

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} \quad V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}. \quad (2)$$

Здесь  $U^{(i)}$  - продольное упругое перемещение оболочки по оси  $x$ ;  $W^{(i)}$  - прогиб оболочки, положительный к центру кривизны;  $t$  - время;  $p$  - давление,  $\rho$  - плотность,  $\nu$  - кинематический коэффициент вязкости жидкости;  $V_x, V_r$  - проекции на оси цилиндрической системы координат вектора скорости жидкости;  $x, r$  - цилиндрические координаты. Уравнения динамики оболочки записываются в виде [12, 13]

$$\begin{aligned} & \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \left[ U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \right. \\ & \left. - \mu_0 \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{1}{2} \frac{(W^{(i)})^2}{(R^{(i)})^2} - \frac{(h_0^{(i)})^2}{24} \frac{(W^{(i)})^2}{(R^{(i)})^4} \right) \right]_x \\ & - \rho_0 h_0^{(i)} U_{tt}^{(i)} - \left[ k_3 R^{(i)2} \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^4} U^{(i)} - k_4 \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^2 R^{(i)2}} U^{(i)3} \right] (2-i) = -q_x^{(i)} - \tilde{q}_x(i-1), \\ & \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left[ W_{xx}^{(i)} \left( 1 + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right) + \mu_0 \frac{W^{(i)}}{(R^{(i)})^2} \left( 1 - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right] \right\rangle_{xx} \quad (3) \\ & \left\{ W_x^{(i)} \left( U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{1}{2} \frac{(W^{(i)})^2}{(R^{(i)})^2} - \frac{(h_0^{(i)})^2}{24} \frac{(W^{(i)})^2}{(R^{(i)})^4} \right) \right) \right\}_x \\ & - \frac{1}{R} \left( \mu_0 U_x^{(i)} + \frac{1}{2} \mu_0 U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} \mu_0 W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \mu_0 W_{xx}^{(i)2} - \right. \\ & \left. - \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{1}{2} \frac{(W^{(i)})^2}{(R^{(i)})^2} - \frac{(h_0^{(i)})^2}{24} \frac{(W^{(i)})^2}{(R^{(i)})^4} \right) \right) \Bigg\rangle + \\ & + k_1 \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{l^2} W^{(i)} (2-i) + \rho_0 h_0^{(i)} W_{tt}^{(i)} = (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1) \end{aligned}$$

Здесь индекс  $i=1$  соответствует внешней оболочке, а  $i=2$  соответствует внутренней;  $h_0^{(i)}$  - толщины оболочек;  $\mu_0$  - коэффициент Пуассона,  $\rho_0$  -

плотность;  $U^{(i)}$ ,  $W^{(i)}$  - продольное перемещение и прогиб, положительный к центру кривизны,  $x$  - продольная координата;  $t$  - время;  $q_x^i$ ,  $q_n$  - напряжения со стороны жидкости, которая находится между оболочками;  $\tilde{q}_x$ ,  $\tilde{q}_n$  - напряжения со стороны жидкости, заполняющая внутреннюю оболочку;  $k_1 \frac{\rho_0 h_0^{(1)} c_0^2}{l^2} W^{(1)}$ ,  $k_3 \frac{R^{(i)2} \rho_0 h_0^{(1)} c_0^2}{l^4} U^{(1)}$  -  $k_4 \frac{\rho_0 h_0^{(1)} c_0^2}{l^2 R^{(1)2}} U^{(1)3}$  - реакция упругой среды в

нормальном и продольном направлениях [14-20];  $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}}$  - скорость звука в оболочке. Нижние индексы у перемещений обозначают соответствующие частные производные.

Напряжения со стороны слоя жидкости определяются формулами

$$q_n = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad q_x = -\rho\nu \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right). \quad (4)$$

#### Уравнения динамики оболочек

Принимая длину волны  $l$  за характерный размер и обозначая амплитуду продольного перемещения  $u_m$  и прогиба  $w_m$ , переходим к безразмерным переменным:

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, t^* = \frac{c_0}{l} t, x^* = \frac{x}{l}. \quad (5)$$

Полагаем

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \frac{R^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon). \quad (6)$$

Введем полухарактеристические (бегущие) координаты и растянутое время:

$$\xi = x^* - ct^*, \tau = \varepsilon t^*, \quad (7)$$

где  $c$  - неизвестная безразмерная скорость волны.

Записываем систему уравнений (3) в безразмерных переменных с использованием формул (5)-(7) и разложим упругие перемещения по степеням

$$\varepsilon = \frac{u_m}{l} :$$

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (8)$$

Подставим разложение (8) в полученные уравнения из (3) и после некоторых преобразований этих уравнений, приравняем нулю коэффициенты при  $\varepsilon^0$ , получим

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30,xi}^{(i)} = \mu_0 u_{10,\xi}^{(i)}, \quad (1 - \mu_0^2 - c^2) u_{10,\xi\xi}^{(i)} = 0.$$



Следовательно,  $u_{10}$  - произвольная функция, а безразмерная скорость волны  $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$ , так как  $c^2 = 1 - \mu_0^2$ .

Приравниваем коэффициенты при  $\varepsilon$  в правых и левых частях уравнений и учтем предыдущие результаты, получаем:

$$\begin{aligned} & u_{10\xi\tau}^{(i)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(i)} u_{10\xi\xi}^{(i)} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(i)} + \\ & + \frac{2-i}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \left( \mu_0^2 k_1 \frac{R^{(i)2}}{l^2 \varepsilon} u_{10\xi\xi} - k_3 \frac{R^{(i)2}}{l^2 \varepsilon} u_{10} + k_4 \frac{u_m^2}{R^{(i)2} \varepsilon} u_{10}^3 \right) = \quad (9) \\ & = - \frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[ q_x^{(i)} + \tilde{q}_x (i-1) - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \left( \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^{i-1} + (i-1) \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} \right) \right] \end{aligned}$$

В представлениях (8) взято два первых члена разложения по  $\varepsilon$  для учета нелинейности исходной системы уравнений(3), как следует из системы (9).

В случае, когда жидкость отсутствует, правая часть уравнений становится равна нулю и получаются независимые уравнения, каждое из которых имеет свое точное решения. Надо определить правую часть, для чего необходимо решить уравнение гидродинамики для случая кольцевого и кругового сечений трубы. Для этого можно воспользоваться результатами работы [21]

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} - \mu_0 \frac{R^{(1)}}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} &= \mu_0 \frac{R^{(1)}}{l} \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} \left[ 12\sqrt{1-\mu_0^2} [(u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) (1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R^{(1)}}) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1-\mu_0^2} (\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi}) (1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R^{(1)}}) \right], \\ q_x^{(2)} + \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} &= \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} \left[ 12\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(2)} - u_{30}^{(1)}) (1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R^{(1)}}) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1-\mu_0^2} (\frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi}) (1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R^{(1)}}) \right], \\ \tilde{q}_x - \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} &= \frac{\tilde{v}}{R c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4\sqrt{1-\mu_0^2} [1 - 2\mu_0]^2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \\ & - \frac{R}{l} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{1}{6} (1 - \mu_0^2) [(1 - 2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{u_m}{l} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь с принятой точностью  $h_0/R \approx O(\varepsilon)$ ,  $\delta R_2 = \psi \ll 1$ , обозначено  $R^{(1)} \approx R^{(2)} = R$  при этом положено  $h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} \approx h_0$  и  $\tilde{\text{Re}} = \frac{\delta}{l} \frac{\delta c_0}{v}$ .

Система уравнений (9) становится такой с учетом найденной правой части (10)

$$\begin{aligned}
 & u_{10\xi\tau}^{(1)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(1)} u_{10\xi\xi}^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l}\right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(1)} + \\
 & + \frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \left[ k_1 \mu_0^2 \frac{R^{(1)2}}{l^2 \varepsilon} u_{10\xi\xi}^{(1)} - k_3 \frac{R^{(2)2}}{l^2 \varepsilon} u_{10}^{(1)} + k_4 \frac{u_m^2}{R^{(1)2} \varepsilon} u_{10}^{(1)3} \right] + \\
 & + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[ \left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1-\mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2}\right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right) \right] = 0; \\
 & u_{10\xi\tau}^{(2)} + \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi}^{(2)} u_{10\xi\xi}^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l}\right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(2)} + \\
 & + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[ \left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1-\mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2}\right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right) \right] + 2(1-2\mu_0)^2 \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0 \varepsilon R c_0} u_{10\xi}^{(2)} - \\
 & - \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \frac{R}{l} \frac{1}{12} \sqrt{1-\mu_0^2} \left[ (1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2 \right] u_{10\xi\xi}^{(2)} = 0.
 \end{aligned}$$

Можно также ввести обозначения  $u_{10\xi}^{(1)} = c_3 \phi^{(1)}$ ,  $u_{10\xi}^{(2)} = c_3 \phi^{(2)}$ ,  $\eta = c_1 \xi$ ,  $t = c_2 \tau$ ,

где

$$\begin{aligned}
 c_2 &= 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \left[ 1 - \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \frac{v}{\delta c_0}, \quad c_1 = \left[ c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R}\right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}} \right]^{\frac{1}{3}}, \\
 c_3 &= \frac{c_2}{c_1} \frac{l \varepsilon}{u_m} \frac{12}{\sqrt{1-\mu_0^2}}, \quad \sigma_1 = \frac{c_1}{c_2} \frac{k_1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \mu_0^2 \frac{R^2}{l^2 \varepsilon}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{c_1 c_2} \frac{k_3}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{R^2}{l^2 \varepsilon}, \\
 \sigma_4 &= \frac{c_3^2}{c_2 c_1^3} \frac{k_4}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{u_m^2}{R^2 \varepsilon}, \quad \sigma = \frac{(1-2\mu_0)^2}{3\mu_0^2} \left(\frac{\delta}{R}\right)^3 \frac{\tilde{\rho} \tilde{v}}{\rho v} \left[ 1 - \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right]^{-1}, \quad (11) \\
 \sigma_2 &= \frac{c_1}{c_2} \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \frac{R}{l} \frac{1}{12} \sqrt{1-\mu_0^2} \left[ (1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2 \right], \\
 \sigma_5 &= c_1 \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1-\mu_0^2} \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \left[ 1 - \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right]^{-1}
 \end{aligned}$$

В результате получим



$$\begin{aligned} & \phi_t^{(1)} + 6\phi^{(1)}\phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \sigma_1\phi_\eta^{(1)} - \\ & - \sigma_3\int\phi^{(1)}d\eta + \sigma_4\left(\int\phi^{(1)}d\eta\right)^3 + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} - \sigma_5\left(\phi_\eta^{(1)} - \phi_\eta^{(2)}\right) = 0, \\ & \phi_t^{(2)} + 6\phi^{(2)}\phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma_5\left(\phi_\eta^{(2)} - \phi_\eta^{(1)}\right) + \sigma\phi^{(2)} - \sigma_2\phi_\eta^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений (12) при отсутствии жидкости распадается на два независимых уравнения, для  $\phi^{(1)}$

$$\phi_t^{(1)} + 6\phi^{(1)}\phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \sigma_1\phi_\eta^{(1)} - \sigma_3\int\phi^{(1)}d\eta + \sigma_4\left(\int\phi^{(1)}d\eta\right)^3 = 0$$

с точным решением

$$\phi^{(1)} = \frac{\sigma_3}{2\sigma_4} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}} \left[ \eta - \left( \frac{\sigma_3}{\sigma_4} + 2\sigma_4 + \sigma_1 \right) t \right] \right\} \quad (13)$$

и для  $\phi^{(2)}$

$$\phi_t^{(2)} + 6\phi^{(2)}\phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} = 0$$

с точным решением

$$\phi^{(2)} = \frac{\sigma_3}{2\sigma_4} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}} \left[ \eta - \frac{\sigma_3}{\sigma_4} t \right] \right\}, \quad (14)$$

где  $\sigma_3/\sigma_4$  - произвольная величина.

Как следует из (13) и (14) скорость солитона  $\phi^{(1)}$  больше, чем скорость солитона  $\phi^{(2)}$  при одинаковых амплитудах. При наличии жидкости во внутренней оболочке и окружающей упругой среды для внешней оболочки численное исследование системы уравнений (12) при начальном условии

$$\phi^{(1)}(\eta, 0) = 0, \quad \phi^{(2)}(\eta, 0) = \frac{\sigma_3}{2\sigma_4} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_4}} \eta \right\} \quad (15)$$

позволить оценить их влияния на волновые процессы в соосных оболочках.

В результате получим следующую разностную схему для уравнения (12), аналогичную схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}
 & \frac{u^{(1)n+1}_j - u^{(1)n}_j}{\tau} + 3 \frac{(u^{(1)2n+1}_{j+1} - u^{(1)2n+1}_{j-1}) + (u^{(1)2n}_{j+1} - u^{(1)2n}_{j-1})}{4h} + \\
 & + \frac{(u^{(1)n+1}_{j+2} - 2u^{(1)n+1}_{j+1} + 2u^{(1)n+1}_{j-1} - u^{(1)n+1}_{j-2}) + (u^{(1)n}_{j+2} - 2u^{(1)n}_{j+1} + 2u^{(1)n}_{j-1} - u^{(1)n}_{j-2})}{4h^3} + \\
 & + \sigma_1 \frac{(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1})}{4h} - \sigma_3 \frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2} + \\
 & + \sigma_4 \frac{U_j^{3n+1} + U_j^{3n}}{2} + \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} - \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \\
 & - \sigma_5 \left( \frac{(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1})}{4h} - \frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} \right) = 0, \\
 & \left( u^{(1)n}_{j+1} + 4u^{(1)n}_j + u^{(1)n}_{j-1} \right) \frac{h}{3} - (U_{j+1} - U_{j-1}) = 0, \tag{16} \\
 & \frac{u^{(2)n+1}_j - u^{(2)n}_j}{\tau} + 3 \frac{(u^{(2)2n+1}_{j+1} - u^{(2)2n+1}_{j-1}) + (u^{(2)2n}_{j+1} - u^{(2)2n}_{j-1})}{4h} + \\
 & + \frac{(u^{(2)n+1}_{j+2} - 2u^{(2)n+1}_{j+1} + 2u^{(2)n+1}_{j-1} - u^{(2)n+1}_{j-2}) + (u^{(2)n}_{j+2} - 2u^{(2)n}_{j+1} + 2u^{(2)n}_{j-1} - u^{(2)n}_{j-2})}{4h^3} + \\
 & + \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} - \\
 & - \sigma_5 \left( \frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} - \frac{(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1})}{4h} \right) + \\
 & + \sigma \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \sigma_2 \frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} = 0.
 \end{aligned}$$

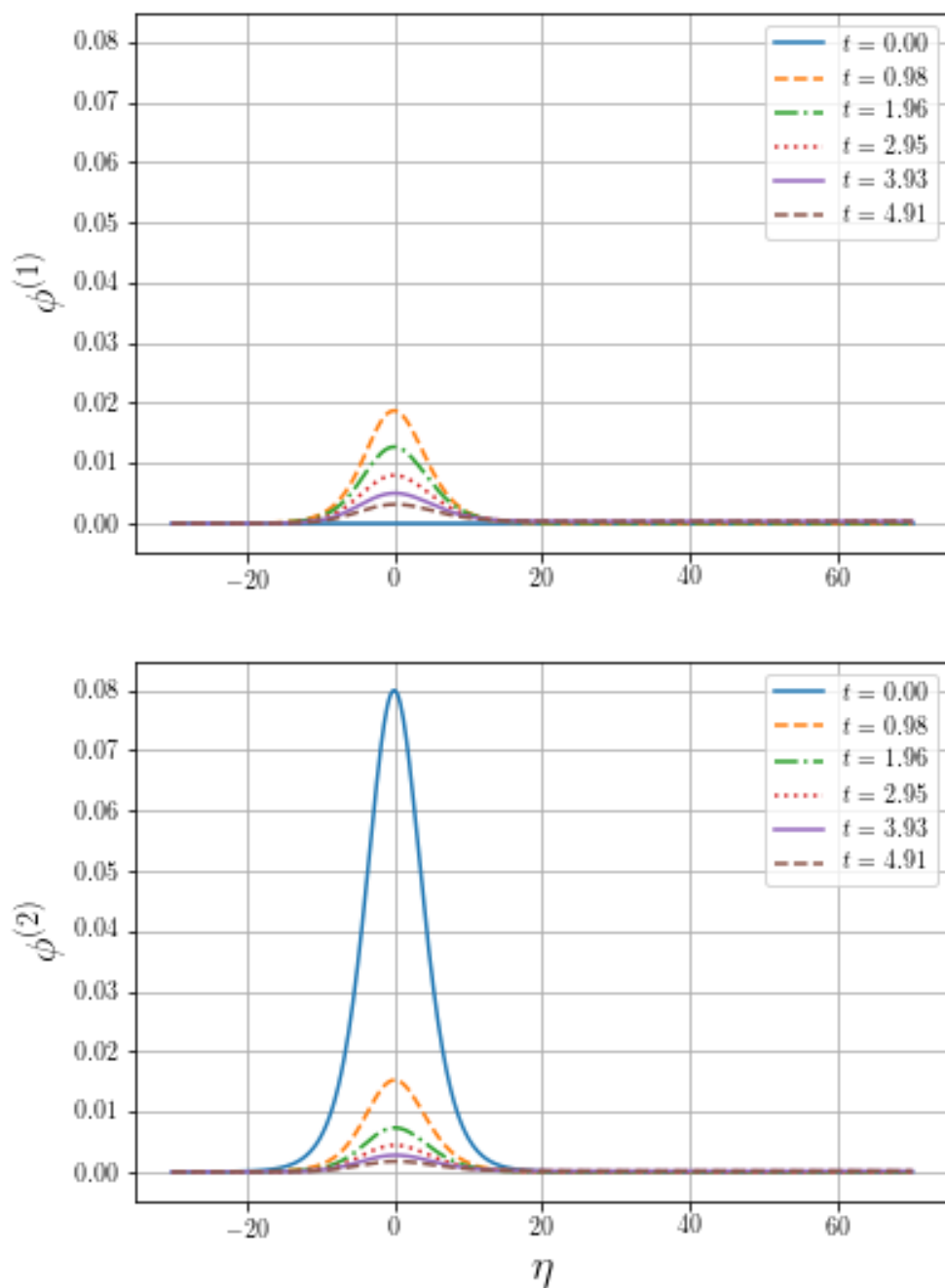


Рис.2. Численное решение уравнений (12) с начальными условиями (15) при  $\sigma_1 = 0.1$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = 0.004$ ,  $\sigma_4 = 0.1$ ,  $\sigma_5 = 1$  и  $\sigma = 0$ .

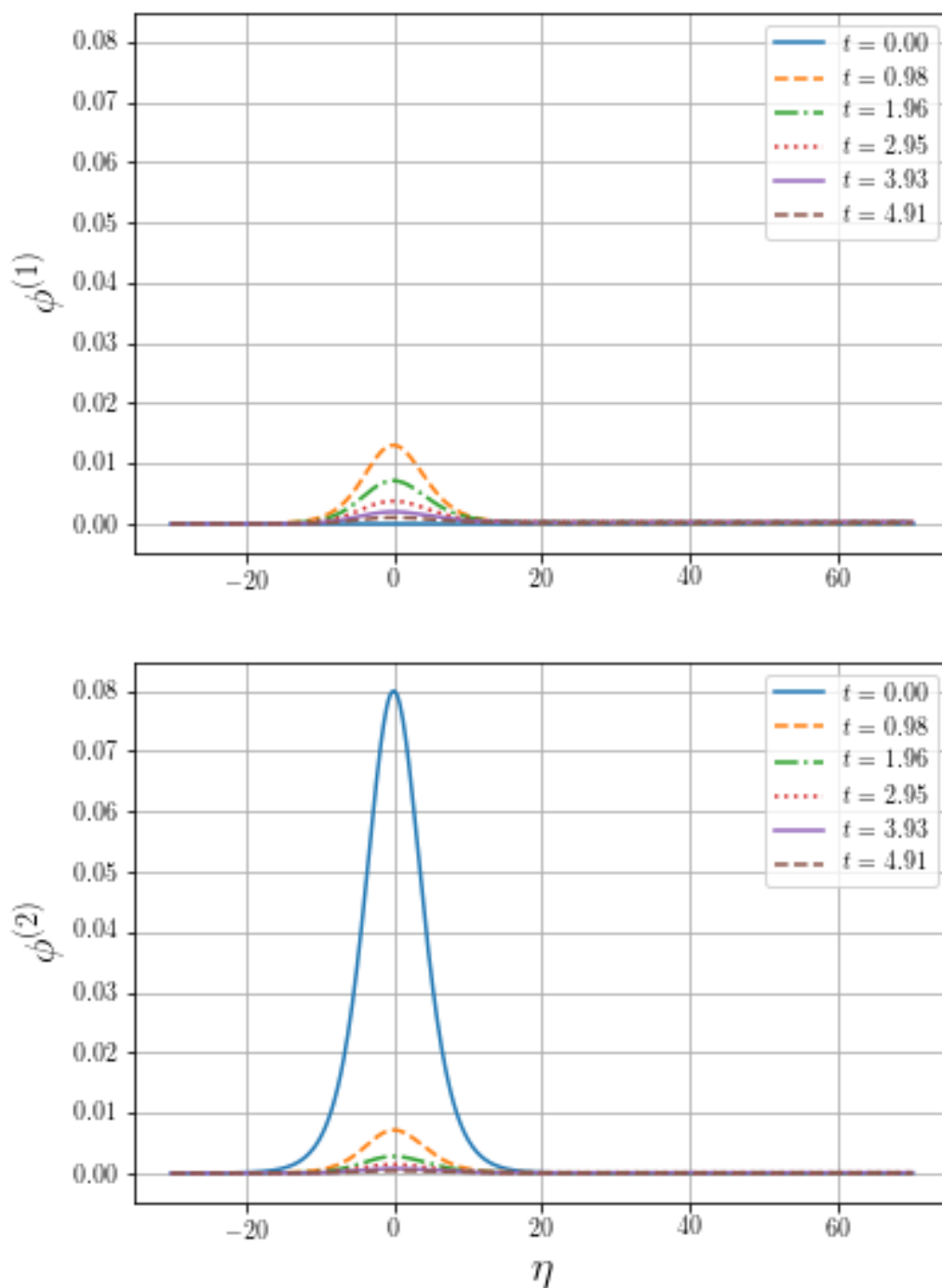


Рис.3. Численное решение уравнений (12) с начальными условиями (15) при  $\sigma_1 = 0.1$ ,  $\sigma_2 = 0.5$ ,  $\sigma_3 = 0.004$ ,  $\sigma_4 = 0.1$ ,  $\sigma_5 = 1$  и  $\sigma = 1.0$ .

### Заключение

При наличии жидкости между оболочками происходит перекачка энергии. Амплитуда во второй оболочке падает, а в первой – растет пока они не выровняются (Рис. 2). При наличии жидкости внутри второй оболочки на втором этапе происходит падение амплитуд волн в обеих оболочках за счет вязкости жидкости и уменьшении скорости волн за счет инерции движения жидкости (Рис. 3). Волновое число и, следовательно, длина волны определяются наличием влияния окружающей упругой среды в продольном направлении, в то время как ее влияние в нормальном направлении сказывается на скорости волны.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-01-00014 и гранта Президента Российской Федерации МД-756.2018.8.*

### Литература

1. Блинков Ю.А., Месянжин А.В., Могилевич Л.И. Распространение нелинейных волн в соосных физически нелинейных цилиндрических оболочках, заполненных вязкой жидкостью // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. 2017. Т. 25, № 1. С. 19–35.
2. Païdoussis M.P., Nguyen V.B., Misra A.K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // J. Fluids Struct. 1991. Vol. 5, № 2. P. 127–164.
3. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. Cambridge University Press, 2008. P. 374.
4. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 5. С. 179–190.
5. Бочкарёв С.А., Матвеев В.П. Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. 2013. Т. 6, № 1. С. 94–102.
6. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Метод возмущений и точные решения уравнений нелинейной динамики сред с микроструктурой // Вычисл. мех. сплош. сред. 2016. Т. 9, № 2. С. 182–191.
7. Блинков Ю.А., Иванов С.В., Могилевич Л.И. Математическое и компьютерное моделирование нелинейных волн деформаций в оболочке, содержащей вязкую жидкость // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. 2012. Т. 3. С. 52–60.
8. Блинков Ю.А., Ковалева И.А., Могилевич Л.И. Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. 2013. Т. 3. С. 42–51.
9. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Иностранная литература, 1961. С. 778.

10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа — М.: Дрофа, 2003. С. 840.
11. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. — Л.: Изд. ЛГУ, 1978. С. 296.
12. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. С. 432.
13. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. С. 320.
14. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. С. 490.
15. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. №3. С. 30–36.
16. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шешенин С.Ф. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. С. 318.
17. Михасев Г.И., Шейко А.Н. О влиянии параметра упругой нелокальности на собственные частоты колебаний углеродной нанотрубки в упругой среде // Труды БГТУ. - Минск : БГТУ. 2012. № 6 (153). С. 41–44.
18. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Павлов И.С. Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в зернистой среде // Вычисл. мех. сплош. сред. 2013. Т. 6, № 2. С. 140–150.
19. Бочкарев А.В., Землянхун А.И., Могилевич Л.И. Уединенные волны в неоднородной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с упругой средой // Акустический журнал. 2017. Т. 63, № 2. С. 145–151.
20. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Ковалев А.Д., Могилевич Л. И. Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2012. Т. 12, №2. С. 12–18.
21. Агеев Р.В., Евдокимова Е.В., Ковалева И.А., Могилевич Л.И. Динамика осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубе кругового и кольцевого сечений // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. № 3; URL: [mathmod.esrae.ru/15-50](http://mathmod.esrae.ru/15-50)