

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/26-97

Ссылка для цитирования этой статьи:

Быкова Т.В., Иванов С.В., Могилевич Л.И., Ридель В.В. Исследование распространения нелинейных волн в оболочке заполненной вязкой жидкостью с учетом инерции ее движения // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. №3

Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00014а

УДК 539.3;517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ОБОЛОЧКЕ ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

Быкова Т.В.¹, Иванов С.В.², Могилевич Л.И.³, Ридель В.В.⁴

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, tbykova69@mail.ru

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского Россия, Саратов, evilgraywolf@gmail.com

³Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, mogilevichli@gmail.com

⁴Российский университет транспорта (МИИТ), Россия, Москва,
riedelvv@yandex.ru

THE STUDY OF THE PROPAGATION OF NONLINEAR WAVES IN THE SHELL FILLED WITH A VISCOUS FLUID, TAKING INTO ACCOUNT THE INERTIA OF ITS MOVEMENT

Bykova T.V.¹, Ivanov S.V.², Mogilevich L.I.³, Riedel V.V.⁴

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov,
tbykova69@mail.ru

²Saratov State University, Russia, Saratov, evilgraywolf@gmail.com

³Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov,
mogilevichli@gmail.com

⁴Russian University of Transport (MIIT), Russia, Moscow, riedelvv@yandex.ru

Аннотация. В данной статье исследуются продольные волны деформации в физически нелинейных упругих оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость. Учтено наличие вязкой несжимаемой жидкости внутри оболочки, а также влияние инерции движения жидкости на амплитуду и скорость волны. Невозможно исследовать модели волн деформаций, методами качественного анализа в случае заполнения оболочки вязкой несжимаемой жидкостью. Это приводит к необходимости применения численных методов.

Численное исследование модели, построенной в ходе данной работы проводится с использованием разностной схемы для уравнения аналогичной схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности. При отсутствии влияния жидкости, скорость и амплитуда волны не меняется. Движение происходит в отрицательном направлении. Это означает что скорость движения дозвуковая. Результат вычислительного эксперимента совпадает с точным решением, следовательно, разностная схема и модифицированное уравнение Картевега-де Вриза адекватны. Наличие влияния инерции движения жидкости приводит к уменьшению скорости волны деформации, при этом вязкостное напряжение жидкости на оболочку приводит к падению амплитуды волны.

Ключевые слова: нелинейные волны, упругие цилиндрические оболочки, вязкая несжимаемая жидкость, разностная схема Кранка-Николсона.

Abstract. The article is devoted to studying longitudinal deformation waves in physically non-linear elastic shells with viscous incompressible liquid inside them. Viscous incompressible liquid presence inside the shell and liquid movement inertia impact on the wave velocity and amplitude are taken into consideration. It is impossible to study deformation waves models, in case of the shell filling with viscous incompressible liquid, by means of qualitative analysis methods. Then the necessity of numerical methods application arises. The numerical study of the constructed model is carried out by means of difference scheme, analogous to Crank-Nickolson one for the Heat conducting equation. The amplitude and velocity do not change under absence of liquid impact movement. The movement occurs in the negative direction, which means that movement velocity is subsonic. The numerical experiment result consider with exact solution, therefore, difference scheme and modified Korteweg–de Vries equation are adequate. The presence of liquid movement inertia impact leads to deformation wave velocity reducing, while liquid viscous tension on the shell leads to wave amplitude falling.

Keywords: non-linear waves, elastic cylinder shell, viscous incompressible liquid, Crank-Nickolson difference scheme.

1. Введение

Исследование волновых и колебательных процессов в упругих оболочках имеет широкое применение в различных технических областях. Исследование колебательных процессов упругих оболочках рассмотрено в [1–6]. Распространение волн деформации в упругих, вязкоупругих и нелинейных вязкоупругих оболочках и рассмотрены в [7–10]. В этих работах не рассматривается случай взаимодействия оболочек с вязкой несжимаемой жидкостью. В [11–13] рассмотрено взаимодействие оболочки с вязкой несжимаемой жидкостью, без учета волновых явлений, также не исследовано влияние локальных членов инерции.

Для решения связанных и несвязанных задач используются различные

методы. При решении несвязанных задач рассматривается взаимодействие жидкости, взаимодействующей с твердым телом. Определяют трение и давление, действующее со стороны жидкости на твердое тело. Таким образом предполагается отсутствие влияния деформации оболочки на движение жидкости [14]. Полученные параметры подставляются в уравнения динамики упругого тела, затем находятся продольные и нормальные (прогиб) перемещения. Таким образом определяется напряженно деформированное состояние упругой конструкции, что является целью в несвязанной задаче.

В случае связанной задачи уравнения динамики жидкости и уравнения динамики упругого тела и решаются одновременно, с учетом граничных условий. Этот подход применен, для исследования колебаний упругих тел [15], а также в данной статье при исследовании волн деформации нелинейных упругих оболочек, содержащих вязкую жидкость постоянной плотности с учетом инерции ее движения.

Невозможно исследовать модели волн деформаций, методами качественного анализа в случае заполнения оболочки вязкой несжимаемой жидкостью [16-19]. Это приводит к необходимости применения численных методов [20,21].

В данной статье исследуется влияние конструкционного демпфирования в продольном и нормальном направлении и наличие влияния окружающей упругой среды и вязкой несжимаемой жидкости внутри оболочки, а также инерции движения жидкости на амплитуду и скорость волны.

Численное исследование модели, построенной в ходе данной работы проводится с использованием разностной схемы аналогичной схеме Кранка-Николсона в случае уравнения теплопроводности [22].

2. Определяющие и разрешающие соотношения физически нелинейной теории оболочек

Деформационная теория пластичности А. А. Илюшина [23,24] связывает компоненты тензора напряжений σ_x , σ_Θ с компонентами тензора деформаций ε_x , ε_Θ и квадратом интенсивности деформаций ε_δ [25,26].

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu_0^2} (\varepsilon_x + \mu_0 \varepsilon_\Theta) \left(1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^2 \right); \quad \sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu_0^2} (\varepsilon_\Theta + \mu_0 \varepsilon_x) \left(1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^2 \right); \quad (1)$$

$$\varepsilon_u^2 = \frac{4}{3} (\mu_1 (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\Theta^2) - \mu_2 \varepsilon_x \varepsilon_\Theta), \quad \mu_1 = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\mu_0}{(1-\mu_0)^2} \right], \quad \mu_2 = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{2\mu_0}{(1-\mu_0)^2} \right]$$

где E – модуль Юнга; m – константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие; μ_0 – коэффициент Пуассона материала оболочки.

Рассмотрим осесимметричную цилиндрическую оболочку. Обозначим:

h_0 – толщина оболочки;

R – радиус срединной поверхности;

R_I – радиус внутренней поверхности;
 U - продольное упругое перемещение;
 W - прогиб, направленный к центру кривизны.

Запишем связь компонент деформаций с упругими перемещениями в виде [27]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_\Theta = -\frac{W}{R} - z \frac{W}{R^2} \quad (2)$$

где

x – продольная координата вдоль срединной поверхности;

z – нормальная координата в оболочке $\left(-\frac{h_0}{2} \leq z \leq \frac{h_0}{2}\right)$.

Квадрат интенсивности деформаций с учетом (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_u^2 = \frac{4}{3} \left\langle \mu_1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left(-\frac{W}{R} - z \frac{W}{R^2} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \mu_2 \left(\frac{W}{R} + z \frac{W}{R^2} \right) \left[\frac{\partial U}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \right\rangle \quad (3) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_u^2 = \frac{4}{3} \left\langle \mu_1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W}{R} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{W}{R} \frac{\partial U}{\partial x} - \right. \\ \left. - z \left[2\mu_1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{W^2}{R^3} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu_2 \left(\frac{W}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + z^2 \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{W^2}{R^4} \right] - \mu_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{W}{R^2} \right] \right\rangle \quad (4) \end{aligned}$$

Определим усилия в срединной поверхности оболочки и момент по следующим формулам

$$N_x = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x dz, \quad N_\Theta = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_\Theta dz, \quad M_x = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x z dz \quad (5)$$

При этом

$$\int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \left[1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^2 \right] dz = h_0 \left\langle 1 - \frac{m}{E} \frac{4}{3} \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W}{R} \right)^2 \right] + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu_2 \frac{W}{R} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{h_0^2}{12} \left\{ \mu_1 \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{W^2}{R^4} \right] - \mu_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{W}{R^2} \right\} \Bigg\rangle \\
 \frac{h_0}{2} \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} z \left[1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^2 \right] dz &= \frac{h_0^3}{12} \frac{m}{E} \frac{4}{3} \left\{ 2\mu_1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{W^2}{R^3} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu_2 \left(\frac{W}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R^2} \right) \right\} \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{h_0}{2} \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} z^2 \left[1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^2 \right] dz &= \frac{h_0^3}{12} \left\langle 1 - \frac{m}{E} \frac{4}{3} \left\{ \mu_1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W}{R} \right)^2 \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mu_2 \frac{W}{R} \frac{\partial U}{\partial x} + 3 \frac{h_0^2}{20} \left(\mu_1 \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{W^2}{R^4} \right] - \mu_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{W}{R^2} \right) \right\} \right\rangle
 \end{aligned}$$

Подставляя (6) в (5) находим

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} \left\langle \frac{\partial U}{\partial x} - \mu_0 \frac{W}{R} - \frac{m}{E} \frac{4}{3} \left[\frac{\partial U}{\partial x} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \mu_0 \frac{W}{R} \right] \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W}{R} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{h_0^2}{12} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \left[3\mu_1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{W}{R} \right] \right\rangle \\
 N_\Theta &= \frac{Eh_0}{1 - \mu_0^2} \left\langle \mu_0 \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{W}{R} - \frac{m}{E} \frac{4}{3} \left[\mu_0 \frac{\partial U}{\partial x} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{W}{R} \right] \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W}{R} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{h_0^2}{12} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \left[3\mu_1 \mu_0 \frac{\partial U}{\partial x} - (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \frac{W}{R} \right] \right\rangle \\
 M_x &= -\frac{Eh_0^3}{12(1 - \mu_0^2)} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left\langle 1 - \frac{m}{E} \frac{4}{3} \left\{ 3\mu_1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2(\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R} + (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \left(\frac{W}{R} \right)^2 + 3 \frac{h_0^2}{20} \mu_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \right\rangle
 \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения динамики для оболочек запишем так же как и в физически линейной теории

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left[q_x - W \frac{\partial q_x}{\partial r} + U \frac{\partial q_x}{\partial x} \right]_R, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x} N_x \right) + \frac{1}{R} N_\Theta = \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \left[q_n - W \frac{\partial q_n}{\partial r} + U \frac{\partial q_n}{\partial x} \right]_R$$

где t – время; ρ_0 – плотность материала оболочки; q_x, q_n – напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кругового сечения; r, x – цилиндрические координаты.

Подставляя (1), (2), (5) в (8) найдем уравнения динамики в перемещениях

$$\begin{aligned} & \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial U}{\partial x} - \mu_0 \frac{W}{R} - \frac{m}{E} \frac{4}{3} \left[\left[\frac{\partial U}{\partial x} - \mu_0 \frac{W}{R} \right] \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W}{R} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R} \right] + \frac{h_0^2}{12} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \left[3\mu_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{W}{R} \right] \right\} = \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left[q_x - W \frac{\partial q_x}{\partial r} + U \frac{\partial q_x}{\partial x} \right]_R \\ & - \frac{Eh_0^3}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\langle \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \left[1 - \frac{m}{E} \frac{4}{3} \left[3\mu_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 2(\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R} + (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \left(\frac{W}{R} \right)^2 + 3 \frac{h_0^2}{20} \mu_1 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right\} + \quad (9) \\ & + \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial W}{\partial x} \left[\frac{\partial U}{\partial x} - \mu_0 \frac{W}{R} - \frac{m}{E} \frac{4}{3} \left[\left[\frac{\partial U}{\partial x} - \mu_0 \frac{W}{R} \right] \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W}{R} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R} \right] + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{h_0^2}{12} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 \left[3\mu_1 \frac{\partial U}{\partial x} + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{W}{R} \right] \right] \right\} + \\ & + \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{1}{R} \left\langle \mu_0 \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{W}{R} - \frac{m}{E} \frac{4}{3} \left[\mu_0 \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{W}{R} \right] \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \mu_2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{w_m}{R} u_3 \Big] = \frac{R^2}{l^2} \frac{w_m}{R} \left[c^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon c \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi \partial \tau} \right] - \frac{R}{\rho_0 h_0 c_0^2} q_n.$$

Зависимые переменные представим в виде асимптотического разложения

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \dots \quad (15)$$

Получим систему уравнений, подставив (15) в (14), оставляя члены порядка ε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \right\rangle &= c^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} & (16) \\ \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} &= 0 \end{aligned}$$

Из этой системы получаем

$$\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}, \quad c^2 = 1 - \mu_0^2 \quad (17)$$

Таким образом u_{10} – является произвольной функцией, а безразмерная скорость волны $c = (1 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}}$ и следовательно скорость волны равна $\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$ - скорости волны в стержне. Поскольку оболочка имеет бесконечную длину, то

$$\xi = \frac{1}{l} \left(x - \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} t \right).$$

Получим систему уравнений в приближении ε^2

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} u_{31} - \frac{m}{E} \frac{4}{3} \left[\mu_1 \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^3 + (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \left(\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 - \mu_1 \mu_0 \left(\frac{w_m l}{u_m R} \right)^3 u_{30}^3 \right] \right\rangle = \\ = -2c \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + c^2 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \xi^2} - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} q_x; & (18) \\ \mu_0 \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{31} - \frac{m}{E} \frac{4}{3} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \left(\mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \right) \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{w_m l}{u_m R} \right)^2 u_{30}^2 \right] + \right. \\ \left. + \mu_2 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} u_{30} \right] = \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{w_m l}{u_m R} c^2 \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial \xi^2} - \frac{Rl}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} q_n \end{aligned}$$

Подставим соотношение (17) в уравнения (18) и получим систему

$$\mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{31}}{\partial \xi} = \frac{m}{E} \frac{4}{3} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0^2) (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \beta \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - 2\sqrt{1 - \mu_0^2} - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} q_x, \quad (19)$$

$$\mu_0 \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{31} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} (1 - \mu_0^2) \mu_0 \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} - \frac{Rl}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} q_n;$$

Продифференцируем почленно по ξ и умножим обе части второго уравнения на μ_0 и получим следующее уравнение

$$\mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{31}}{\partial \xi} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \mu_0^2 (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} - \mu_0 \frac{Rl}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi}; \quad (20)$$

Левые части уравнений (19) и (20) совпадают. Вычтем, почленно, из уравнения (20) первое уравнение системы (19) и в результате получим разрешающее уравнение

$$2\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E\varepsilon} 4 \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0^2) (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \mu_0^2 (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} = - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \left[q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right]$$

Разделим обе части полученного уравнения на $2\sqrt{1 - \mu_0^2}$ и получим

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} - 2 \frac{m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} = - \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \left[q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right]$$

Полученное уравнение есть обобщенное модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза (МКдВ) для $\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}$.

В случае отсутствия жидкости правая часть уравнения равна нулю и получается модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза (МКдВ). Надо определить правую часть, решая уравнения гидродинамики.

4. Исследование напряжений, действующих на оболочку со стороны находящейся внутри жидкости

Напряжения со стороны слоя жидкости определяются формулами [29]

$$q_n = P_{rr} \cos\left(\hat{n}, \hat{n}_r\right) + P_{rx} \cos\left(\hat{n}, \hat{i}\right) \quad q_x = -\left[P_{rx} \cos\left(\hat{n}, \hat{n}_r\right) + P_{xx} \cos\left(\hat{n}, \hat{i}\right) \right]$$

$$P_{rr} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}; P_{rx} = \rho\nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right); P_{xx} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

Если снести напряжения на невозмущенную поверхность оболочки, то можно считать $\hat{n} = \hat{n}_r$ и $\cos\left(\hat{n}, \hat{n}_r\right) = 1$, $\cos\left(\hat{n}, \hat{i}\right) = 0$.

Уравнение изменения количества движения вязкой несжимаемой жидкости (Навье-Стокса) и уравнение сохранения ее массы (неразрывности) в цилиндрической системе координат (r, Θ, x) в случае осесимметричного течения записываются в виде [30]

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right);$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right); \quad (22)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$$

где V_r, V_x - проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат; p - давление в жидкости; ρ - плотность жидкости; ν - кинематический коэффициент вязкости; \hat{n} - нормаль к срединной поверхности оболочки; \hat{n}_r, \hat{i} - орты базиса (r, Θ, x) цилиндрической системы координат, центр которой расположен на геометрической оси

На границе с оболочкой выполняются условия прилипания жидкости в подходе Лагранжа.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = V_x + U \frac{\partial V_x}{\partial x} - W \frac{\partial V_x}{\partial r}, \quad -\frac{\partial W}{\partial t} = V_r + U \frac{\partial V_r}{\partial x} - W \frac{\partial V_r}{\partial r}. \quad \text{при } r=R_1-W \quad (23)$$

где V_r, V_x - ограничены при $r=0$.

Введем безразмерные переменные и параметры

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r; V_x = w_m \frac{c_0}{R_1} v_x; p = \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{R_1^3} P + p_0;$$

$$\frac{R_1}{l} = \psi = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right); \lambda = \frac{w_m}{R_1} = O(\varepsilon); \text{Re} = \psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \quad (24)$$

Подставляя (24) в уравнение (22) и граничное условие (23) получаем уравнения и граничные условия для безразмерных компонент скорости жидкости и давления. Представляя давление и компоненты скорости жидкости в виде асимптотического разложения малому параметру λ

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots$$

для первых членов разложений получим

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \operatorname{Re} \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right); \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0; \quad (25)$$

и граничные условия вида

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3}{\partial t^*}; v_x^0 = \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} \text{ при } r^* = 1; r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0; r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0 \text{ при } r^* = 0.$$

Определим напряжения со стороны жидкости на оболочке в этих переменных. Получим с точностью до λ , ψ

$$q_x = -\lambda \frac{\nu}{R_1 c_0} \rho c_0^2 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}, q_n = -p_0 - \frac{\lambda}{\psi} \frac{\nu}{R_1 c_0} \rho c_0^2 P^0 \quad (26)$$

При отсутствии гармоничности по времени параметров течения, что имеет место в рассматриваемой задаче, применим метод итерации к задаче (25) На первом шаге итерации отбросим локальный член инерции ($Re \ll 1$) и получим

$$P^0 = 16 \int \left(\frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right) dx^*$$

$$v_x^0 = \frac{1}{4} (r^{*2} - 1) 16 \left(\frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right) + \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial u_1}{\partial t^*}$$

На втором шаге итерации, подставляя найденное решение в локальный член инерции, будем иметь

$$P^0 = \int \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{6} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}} - \frac{4}{3} \int \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^{*2}} dx^* \right] + 16 \left[\frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right] \right\} dx^*$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} = \operatorname{Re} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}} - \int \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^{*2}} dx^* \right) + 8 \left(\frac{1}{2} \frac{u_m \psi}{w_m} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right) \quad (27)$$

Следует отметить, что в [15] доказана сходимость метода итерации.

Учитывая, что введены переменные (13), найдем с точностью до ε и с учетом связи $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$,

$$P^0 = \sqrt{1 - \mu_0^2} \left\{ 8 \left(2 \int u_{30} d\xi - \frac{u_m R_1}{w_m l} u_{10} \right) - \frac{1}{3} \operatorname{Re} \left(8 u_{30} - \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right) \sqrt{1 - \mu_0^2} \right\}$$

При этом

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} = \sqrt{1 - \mu_0^2} \left\{ 4 \left(2 u_{30} - \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right) - \right.$$

$$-\frac{1}{6} \operatorname{Re} \left(2 \frac{\partial u_{30}}{\partial \xi} - \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} \right) \sqrt{1 - \mu_0^2} \left. \vphantom{\frac{\partial u_{30}}{\partial \xi}} \right\}$$

Тогда учитывая, что $\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}$ получаем

$$q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = \frac{\nu}{R_1 c_0} \rho c_0^2 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m}{l} \left[1 - 2 \mu_0 \frac{R}{R_1} \right]^2 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} -$$

$$- \frac{R_1}{l} \rho c_0^2 \frac{1}{6} (1 - \mu_0^2) \frac{u_m}{l} \left[\left(1 - 2 \mu_0 \frac{R}{R_1} \right)^2 + 3 \left(2 \mu_0 \frac{R}{R_1} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2}.$$

Следовательно, имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} -$$

$$- 2 \frac{m}{E \varepsilon} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} = \quad (28)$$

$$= - \frac{1}{2} \frac{l}{\varepsilon \rho_0 h_0} \left\{ \frac{\nu}{R_1 c_0} \rho 4 \left[1 - 2 \mu_0 \frac{R}{R_1} \right]^2 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \right.$$

$$\left. - \frac{R_1}{l} \rho \frac{1}{6} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left[\left(1 - 2 \mu_0 \frac{R}{R_1} \right)^2 + 3 \left(2 \mu_0 \frac{R}{R_1} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} \right\}.$$

С принятой точностью в (28) можно положить $R_l = R$. Полагая $\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = \varphi$,

$\eta = c_1 \xi$, $t = c_2 \tau$, получим обобщенное модифицированное уравнение Картевега-де Вриза (МКДВ) [31,32]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - 6 \varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} - \sigma_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \sigma_1 \varphi = 0 \quad (29)$$

где

$$c_1 = \left[\frac{2}{3} \frac{m}{E} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \frac{l^2}{R^2} \frac{\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2}{\mu_0^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$c_2 = c_1 \frac{1}{3} \frac{m}{E \varepsilon} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{u_m}{l} \right)^2$$

при этом положено

$$\sigma_1 = \frac{2}{c_2} (1 - 2 \mu_0)^2 \frac{\rho l}{\varepsilon \rho_0 h_0} \frac{\nu}{R_1 c_0} \quad (30)$$

$$\sigma_2 = \frac{c_1}{c_2} \frac{1}{12} \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \frac{R_1}{l} \left[\left(1 - 2\mu_0 \frac{R}{R_1} \right)^2 + 3 \left(2\mu_0 \frac{R}{R_1} \right)^2 \right]$$

При условии $\sigma_1 = 0$ то есть при $\mu_0 = \frac{1}{2}$ - несжимаемый материал, обобщенное уравнение МКдВ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - 6\varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} - \sigma_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0$$

имеет точное решение в виде кинка-антикинка

$$\varphi = \pm k \operatorname{th} \left\{ k \left[\eta + (2k^2 + \sigma_2) t \right] \right\} \quad (31)$$

Фазовая скорость

$$\frac{\omega}{k} = -2k^2 - \sigma_2$$

Скорость волны при этом

$$\sqrt{\frac{E}{\rho_0} \left(1 - \varepsilon \frac{c_2 (2k^2 + \sigma_2)}{c_1 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right)}$$

Так как числитель дроби положительный то скорость дозвуковая.

Инерция движения жидкости σ_2 уменьшает скорость волны. Вязкость жидкости ($\sigma_1 > 0$) оказывают влияние на амплитуду волны. Это влияние исследуется с помощью численного решения уравнений МКдВ.

Волновое число k – произвольная величина.

5. Вычислительный эксперимент

Для численного исследования модели волновых движений физически нелинейной упругой оболочки при наличии влияния жидкости, представим уравнение (29) в интегральной форме.

$$\oint_{\Omega} \varphi d\eta - \left[-\sigma_2 \varphi - 2\varphi^3 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right] dt + \iint_{\Omega} \sigma_1 \varphi dt d\eta = 0 \quad (32)$$

для произвольной области Ω . Сопоставим $u_j^n = \varphi(t_n, \eta_j)$ для перехода к дискретной формулировке и выберем в качестве базового контур, представленный на рисунке 1.

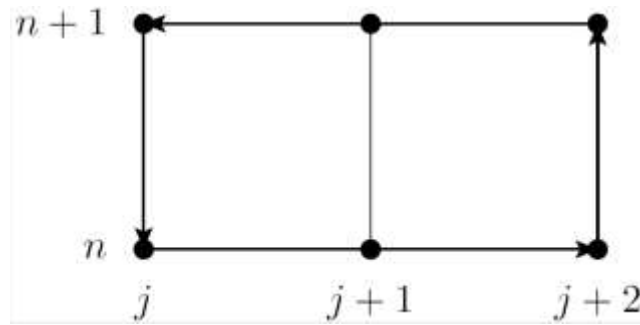


Рис. 1. Базовый контур для уравнения (32)

Запишем интегральные соотношения

$$\int_{m_0}^{m_0+1} u_\eta d\eta = u(t, \eta_{j+1}) - u(t, \eta_j),$$

$$\int_{m_0}^{m_0+1} u_{\eta\eta} d\eta = u_\eta(t, \eta_{j+1}) - u_\eta(t, \eta_j) \quad (33)$$

Для интегрирования по времени и по четным производным по η используем формулу трапеций, а по нечетным производным по η - формулу среднего значения и положим $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$. Подставим все это в формулы (32), (33) и используя метод базисов Гребнера [33,34] получим следующую разностную схему для уравнения (30) аналогичную схеме Кранка-Николсона [35,36] в случае уравнения теплопроводности.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \sigma_2 \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} -$$

$$- 2 \frac{(u_{j+1}^{3n+1} - u_{j-1}^{3n+1}) + (u_{j+1}^{3n} - u_{j-1}^{3n})}{4h} +$$

$$+ \frac{(u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)}{4h^3} -$$

$$+ \sigma_1 \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} = 0$$

при начальном условии в виде точного решения (31) при $t=0$.

6. Полученные результаты и выводы

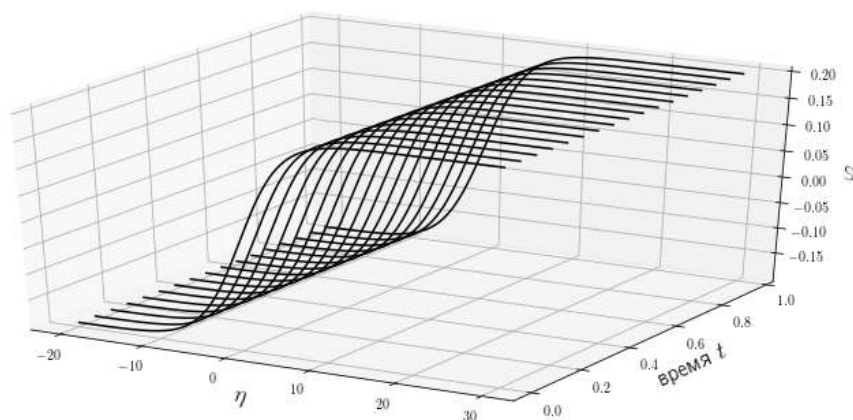


Рис. 2. Отсутствие влияния жидкости ($\sigma_1=0$, $\sigma_2=0$)

При отсутствии влияния жидкости, скорость и амплитуда волны не меняется. Движение происходит в отрицательном направлении (рис. 2). Это означает что скорость движения дозвуковая. Результат вычислительного эксперимента совпадает с точным решением, следовательно, разностная схема и уравнение КдВ адекватны.

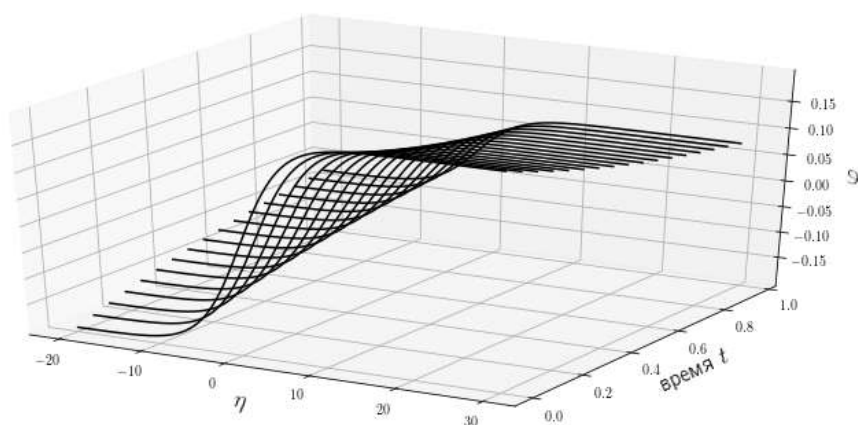


Рис. 3. Наличие влияния жидкости

Влияние вязкостного напряжения жидкости на оболочку (σ_1) приводит к падению амплитуды волны, а инерция движения жидкости (σ_2) приводит к уменьшению скорости волны (рис. 3).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-01-00014а.

Литература

1. Кондратова Ю.Н., Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Гидроупругость трубопровода кольцевого профиля со свободным опиранием при воздействии вибрации // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 4 (62). С. 9-14.
2. Кондратов Д.В., Плаксина И.В. Гидроупругость геометрически нерегулярной трубы кольцевого профиля при воздействии гармонического перепада давления // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 25-28.
3. Елистратова О.В., Кондратов Д.В. Моделирование динамики трех упругих соосных оболочек свободно опертых на концах, взаимодействующих с двумя пульсирующими слоями жидкости, находящихся между ними при пульсации давления // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 1. С. 11-15. URL: mathmod.esrae.ru/1-2
4. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Возмущающие моменты в поплавковых гироскопах и акселерометрах с упругим корпусом // Авиакосмическое приборостроение. 2003. № 11. С. 3-19.
5. Анциферов С.А., Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Возмущающие моменты в поплавковом гироскопе с упругим корпусом прибора на вибрирующем основании при несимметричном торцевом истечении // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2009. № 3. С. 25-35.
6. Кондратов Д.В. Гидроупругость силового цилиндра с полым плунжером при свободном истечении жидкости // Вестник Саратовского госагроуниверситета им. Н.И. Вавилова. 2008. № 1. С. 38-43.
7. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1995. — Т. 3, № 1. — С. 52–58.
8. Ерофеев В. И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. — 2002. — Т. 48, № 6. — С. 725–740.
9. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение // РАН. Акустический журнал. — 2001. — Т. 47, № 3. — С. 359–363.
10. Доронин А.М., Ерофеев В.И. Трехволновое резонансное взаимодействие в упругопластической среде // Вестник ПНИПУ 2015. Механика №3 с. 52-62
11. Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // Вестник ПНИПУ 2014. Механика №3 с. 17-35
12. Лекомцев С. В. Конечно-элементные алгоритмы расчета собственных колебаний трехмерных оболочек // ВМСС. — 2012. — Т. 5, № 2. — С. 233–243.

13. Бочкарев С. А., Матвеев В. П. Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости // ВМСС. — 2013. — Т. 6, № 1. — С. 94–102.
14. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. — М.: Наука, 1979. — С. 320.
15. Андрейченко К. П., Могилевич Л. И. О динамике взаимодействия сдавливаемого слоя вязкой несжимаемой жидкости с упругими стенками // Изв. АН СССР. МТТ. — 1982. — № 2. — С. 162–172. 34
16. Erofeev, V. I. Microstructured solids. Mathematical models and wave processes analysis -: Nizhny Novgorod.—Intelservice Publ. Comp., 1996.
17. Rudnick I., Wu J., Wheatley S. Putterman Flexural waves envelope solitons in a metallic cylindrical thin shell // Проблемы нелинейной акустики. Сборник трудов 11 Международного симпозиума по нелинейной акустики. Новосибирск 24–28 августа 1987 г. — 1987. — Т. 2. — С. 208–212.
18. Arshinov G. A., Mogilevich L. I. Non linear dispersion waves in viscous - elastic cylindrical shells // Mathematical Modeling of Dinamic Behavior of Thin Elastic Structures. EUROMECH Colloquium 439. — 2002. — P. 24–27.
19. Loitsyanskii L.G. Mechanics of Liquids and Gases, Pergamon Press, Oxford, 1966
20. Самарский А. А. Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — 2-е, исправленное изд. —: Физматлит, 2001. — С. 320.
21. Samarskii A. A. The theory of difference schemes. — : New York, Marcel Dekker, 2001
22. Горохов В.А., Казаков Д.А., Капустин С.А., Чурилов Ю.А. Алгоритмы численного моделирования процессов деформирования и разрушения конструкций в рамках соотношений механики поврежденной среды // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. — 2016. — № 4. — С. 86–105. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.06
23. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды.-М.: Изд-во МГУ, 1990. —310 с.
24. Овчаров А. А., Брылев И. С. Математическая модель деформирования нелинейно упругих подкрепленных конических оболочек при динамическом нагружении // Современные проблемы науки и образования – 2014. - №3 URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/viewid=13235>
25. Каудерер К. Нелинейная механика.- М.: Издательство иностранной литературы, 1961. — 778 с.
26. Фельдштейн В. А. Упруго пластические деформации цилиндрической оболочки при продольном ударе // Волны в неупругих средах, Кишинев, 1970, С. 199-204.
27. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек: учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры – 2-е изд. стер. – М.:Издательство Юрайт, 2018. – 439 с.

28. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. – Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. – 132 с.
29. Землянухин А. И. Бочкарев А. В. Могилевич Л. И. Уединенные продольно-изгибные волны в цилиндрической оболочке, взаимодействующие с нелинейно-упругой средой // Вестник Московского государственного университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2018. №1(76). С. 47-60.
30. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа —: М.: Дрофа, 2003. — С. 840.
31. Nariboli G. A., Nonlinear longitudinal waves in elastic rods // Journal of Mathematical and Physical Sciences. — 1970. — Vol. 4. — P. 64–73.
32. Nariboli G. A., Sedov A. Burgers's – Korteweg – de Vries equation for viscoelastic rods and plates // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1970. — Vol. 32. — P. 661–677.
33. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A., Mozhilkin V. V. Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. -2006. -Vol. 2. -P. 26. -URL: <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html>.
34. Gerdt, V. P. Blinkov Yu. Janet Trees in Computing of Toric Ideals // Computer algebra and its applications to physics. — Dubna, Russia:, 2002. — P. 71–82.
35. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involution and difference schemes for the Navier-Stokes equations // Computer Algebra in Scientific Computing. — : Springer Berlin / Heidelberg, 2009. — Vol. 5743 of Lecture Notes in Computer Science. — P. 94–105.
36. Blinkov Yu. A., Mozhilkin V. V. Generation of difference schemes for the burgers equation by constructing Gröbner bases // Programming and Computer Software. — 2006. — Vol. 32, no. 2. — P. 114 – 117.