

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/26-98](http://mathmod.esrae.ru/26-98)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Грушенкова Е.Д., Ридель В.В. Моделирование волнового процесса в оболочке с физической нелинейностью Шамеля с учетом демпфирования и окружающей среды // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. №3

Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00014а.

УДК 539.3

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА В ОБОЛОЧКЕ С ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ШАМЕЛЯ С УЧЕТОМ ДЕМПФИРОВАНИЯ И ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Быкова Т.В.<sup>1</sup>, Могилевич Л.И.<sup>2</sup>, Грушенкова Е.Д.<sup>3</sup>, Ридель В.В.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Россия, Саратов, tbykova69@gmail.com

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Россия, Саратов, mogilevich@info.sgu.ru

<sup>3</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,  
Россия, Саратов, katenok.15@mail.ru

<sup>4</sup> Российский университет транспорта (МИИТ), Россия, Москва,  
riedelvv@yandex.ru

**Аннотация.** Изучение поведения деформационных волн в упругих оболочках является важной частью современной волновой динамики. В то же время влияние на волновой процесс в физически нелинейных упругих структурах Шамеля как при продольном затухании структуры, так и в упругой среде в литературе не изучалось. В данной работе мы исследуем влияние структурного демпфирования и окружающей среды на распространение нелинейных волн деформации, что требует компьютерного моделирования. Текущий подход используется при построении разностных диаграмм. Полученные в результате разностные расчеты позволили нам интерпретировать физические процессы.

**Ключевые слова:** нелинейные волны, упругие цилиндрические оболочки.

## SIMULATION OF A WAVE PROCESS IN A SHELL WITH PHYSICAL SCHAMEL NONLINEARITY CONSIDERING DAMPING AND SURROUNDING MEDIA.

Bykova T.V.<sup>1</sup>, Mogilevich L. I.<sup>2</sup>, Grushenkova E.D.<sup>3</sup>, Riedel V.V.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia,  
Saratov, tbykova69@gmail.com

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia,  
Saratov, mogilevich@info.sgu.ru

<sup>3</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia,  
Saratov, katenok.15@mail.ru

<sup>4</sup> Russian University of Transport (МИТ), Russia,  
Moscow, riedelvv@yandex.ru

**Abstract.** The study of the behavior of deformation waves in elastic shells is an important part of modern wave dynamics. At the same time, the influence on the wave process in physically nonlinear elastic Shamel structures both during longitudinal attenuation of the structure and in an elastic medium has not been studied in the literature. In this paper, we study the effects of structural damping and the environment on the propagation of nonlinear deformation waves, which requires computer simulation. The current approach is used in the construction of difference diagrams. The resulting difference calculations allowed us to interpret physical processes.

**Keywords:** non-linear waves, elastic cylinder shell.

Деформационная теория пластичности А. А. Илюшина [1,2] связывает компоненты тензора напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_\theta$  с компонентами тензора деформаций  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_\theta$  и интенсивностью деформаций  $\varepsilon_u$  [3,4].

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_x + \mu_0\varepsilon_\theta)\left(1 + \frac{m}{E}\varepsilon_u^{1/2}\right); \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_\theta + \mu_0\varepsilon_x)\left(1 + \frac{m}{E}\varepsilon_u^{1/2}\right); \quad (1)$$
$$\varepsilon_u = \frac{2}{\sqrt{3}}(\mu_1(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2) - \mu_2\varepsilon_x\varepsilon_\theta)^{1/2}, \quad \mu_1 = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{\mu_0}{(1-\mu_0)^2}\right], \quad \mu_2 = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{2\mu_0}{(1-\mu_0)^2}\right].$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга;  $m$  – константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие;  $\mu_0$  – коэффициент Пуассона материала оболочки.

Рассматривается осесимметричный случай цилиндрической геометрически линейной оболочки с радиусом срединной поверхности  $R$ , плотностью  $\rho_0$  толщиной  $h_0$  и упругими перемещениями – продольным  $U$  и прогибом  $W$ , направленным к центру кривизны.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{W}{R} - z \frac{W}{R^2}$$

Введем малый параметр задачи  $\varepsilon \ll 1$  и соотношения, характеризующие задачу. Полагаем

$$U = u_m u_1, \quad W = w_m u_3, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad c_0^2 = \frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}$$
$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1); \left(\frac{R}{l}\right)^2 = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right); \frac{h_0}{R} = O(\varepsilon); \frac{h_0}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right); \frac{m}{E} = O(1);$$
$$\frac{w_m}{R} = O(\varepsilon); \frac{w_m}{h_0} = O(1); \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon}} = O(1). \quad (2)$$

В этих переменных (1) и (2) уравнения динамики оболочки принимают вид [5].

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l} \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x^*} \left\langle \left[ \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} - \mu_0 \frac{w_m}{R} u_3 \right] \cdot \right. \\ & \cdot \left\{ 1 + \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{m}{E} \left[ \mu_1 \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right)^2 + \mu_2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} \frac{w_m}{R} u_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu_1 \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 u_3^2 \right]^{1/4} \right\} - \rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{l^2} u_m \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}} - \varepsilon_1 \rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{l^2} u_m \frac{\partial u_1}{\partial t^*} = 0; \\ & \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^2}{12l^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \left( \frac{w_m}{l^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^{*2}} + \frac{w_m}{R^2} u_3 \right) - \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x^*} \left\{ \frac{w_m}{l} \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \left[ \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \mu_0 \frac{w_m}{R} u_3 \right] \left[ 1 + \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{m}{E} \left[ \mu_1 \left( \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{w_m}{R} u_3 \right)^2 \right) + \mu_2 \frac{w_m}{l} \frac{u_m}{R} u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right]^{1/4} \right] \right\} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{R} \left\{ \left[ \mu_0 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} - \frac{w_m}{R} u_3 \right] \left[ 1 + \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{m}{E} \left[ \mu_1 \left( \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{w_m}{R} u_3 \right)^2 \right) + \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \mu_2 \frac{w_m}{l} \frac{u_m}{R} u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right]^{1/4} \right] \right\} \right\rangle + w_m \rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{l^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^{*2}} + k_l \rho_0 h_0 \frac{c_0^2}{R^2} \left( \frac{h_0}{R} \right)^{1/2} w_m u_3 = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\rho_0$  - плотность материала оболочки;  $\varepsilon_1$  - коэффициент демпфирования,  $k_l$  - коэффициент постели окружающей среды,  $c_0$  - скорость звука,  $t$  - время [6, 7].

Введем независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon^{1/2} t^*$$

где  $c$  - безразмерная неизвестная скорость волны;  $\tau$  - быстрое время. В этих переменных, оставляя члены не выше второго порядка, получим уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m}{R} u_3 \right) \left\{ 1 + \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{m}{E} \left[ \mu_1 \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right)^2 + \mu_2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{w_m}{R} u_3 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \mu_1 \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 u_3^2 \right]^{1/4} \right\} \right\rangle = \frac{u_m}{l} \left[ c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon c \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \tau} \right] - \frac{u_m}{l} \varepsilon_1 \left[ c \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \mu_0 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{w_m}{R} u_3 + \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{m}{E} \left( \mu_0 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{w_m}{R} u_3 \right) \left[ \mu_1 \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right)^2 + \mu_1 \left( \frac{w_m}{R} \right)^2 u_3^2 + \right. \\ & \left. + \mu_2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{w_m}{R} u_3 \right]^{1/4} = \frac{R^2}{l^2} \frac{w_m}{R} \left[ c^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon c \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi \partial \tau} \right] + \frac{w_m}{R} \left( \frac{h_0}{R} \right)^{1/2} k_1 u_3. \end{aligned}$$

Зависимые переменные представим в виде асимптотического разложения

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon^{1/2} u_{11} + \dots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon^{1/2} u_{31} + \dots \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4) и оставляя члены порядка  $\varepsilon$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \right\rangle &= c^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} \\ \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} &= 0 \end{aligned}$$

Из этой системы получаем

$$\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}, \quad c^2 = 1 - \mu_0^2 \quad (6)$$

Следовательно,  $u_{10}$  – остается произвольной функцией, а безразмерная скорость волны  $c = (1 - \mu_0^2)^{1/2}$  и следовательно скорость волны равна  $\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$  - скорости волны в стержне. Здесь

$$\xi = \frac{1}{l} \left( x - \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} t \right)$$

так как оболочка имеет бесконечную длину.

В следующем приближении  $\varepsilon^2$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} u_{31} + \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{m}{E \varepsilon^{1/2}} \left( \frac{u_m}{l} \right)^{1/2} \left[ \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \right) \left[ \mu_1 \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_1 \left( \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \right)^2 + \left( \mu_2 \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right) \right]^{1/4} \right\rangle &= -2c \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + c^2 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \xi^2} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^{1/2}} c \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mu_0 \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{31} + \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{m}{E \varepsilon^{1/2}} \left( \frac{u_m}{l} \right)^{1/2} \left( \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} \right) \left[ \mu_1 \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \\ \left. + \mu_1 \left( \frac{w_m l}{u_m R} \right)^2 u_{30}^2 + \mu_2 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} u_{30} \right]^{1/4} = \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{R^2}{l^2} \frac{w_m l}{u_m R} c^2 \frac{\partial^2 u_{30}}{\partial \xi^2} + k_1 \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left( \frac{h_0}{R} \right)^{1/2} \frac{w_m l}{u_m R} u_{30}$$

Подставим соотношение (6) в уравнения (7) и получим систему

$$\mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{31}}{\partial \xi} = - \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{m}{E \varepsilon^{1/2}} \left( \frac{u_m}{l} \right)^{1/2} (1 - \mu_0^2) (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \\ + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \frac{3}{2} \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - 2 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^{1/2}} \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}, \\ \mu_0 \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R} u_{31} = \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{R^2}{l^2} (1 - \mu_0^2) \mu_0 \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} + k_1 \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left( \frac{h_0}{R} \right)^{1/2} \mu_0 \frac{\partial u_{30}}{\partial \xi};$$

Умножим обе части второго уравнения на  $\mu_0$  и продифференцируем по  $\xi$ .

Оно примет вид

$$\mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{31}}{\partial \xi} = \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{R^2}{l^2} \mu_0^2 (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + k_1 \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left( \frac{h_0}{R} \right)^{1/2} \mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2}; \quad (9)$$

Левые части уравнения (8) и уравнения (9) совпали. Вычтем, почленно, из уравнения (9) первое уравнение системы (8) и получим разрешающее уравнение

$$2 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{3}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{m}{E \varepsilon^{1/2}} \left( \frac{u_m}{l} \right)^{1/2} (1 - \mu_0^2) (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \\ + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{R^2}{l^2} \mu_0^2 (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + k_1 \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left( \frac{h_0}{R} \right)^{1/2} \mu_0^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^{1/2}} \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0$$

Разделим обе части полученного уравнения на  $2 \sqrt{1 - \mu_0^2}$  и получим

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{3}{4} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{m}{E \varepsilon^{1/2}} \left( \frac{u_m}{l} \right)^{1/2} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \\ + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{R^2}{l^2} \mu_0^2 \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + k_1 \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left( \frac{h_0}{R} \right)^{1/2} \frac{\mu_0^2}{2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0$$

Полученное уравнение есть обобщенное уравнение Шамеля для  $\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}$ .

Если, учитывая (2), положить

$$w_m = h, \quad u_m = \frac{hl}{R}, \quad \frac{R^2}{l^2} = \varepsilon^{1/2}$$

то

$$\frac{m}{E\varepsilon^{1/2}} \left( \frac{u_m}{l} \right)^{1/2} = \frac{m}{E} = O(1)$$

и уравнение становится таким

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{3}{4} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{m}{E} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \\ + \mu_0^2 \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0 \end{aligned}$$

Полагая

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = \varphi, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau$$

получим обобщенное уравнение Шамеля [4]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 6\varphi^{1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} + s_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + s_0 \varphi = 0 \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \left[ \frac{m}{E} \frac{1}{4} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{(\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4}}{\mu_0^2} \right]^{1/2}, \\ c_2 &= c_1 \frac{m}{E} \frac{1}{8} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} (1 - \mu_0^2)^{1/2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4}, \end{aligned}$$

при этом положено

$$s_0 = \frac{1}{c_2} \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^{1/2}}, \quad s_1 = \frac{c_1}{c_2} k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}},$$

При отсутствии продольного конструкционного демпфирования  $s_0 = 0$  ( $\varepsilon_1 = 0$ ) получаем уравнение Шамеля

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 6\varphi^{1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} + s_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0$$

Оно имеет точное решение в виде солитона

$$\varphi = 25k^4 ch^{-4} \{k[\eta - (16k^2 + s_1)t]\} \quad (11)$$

Фазовая скорость положительная

$$\frac{\omega}{k} = 16k^2 + s_1$$

Следовательно, скорость волны сверхзвуковая.

Влияние постели окружающей среды ( $s_1$ ) увеличивает скорость волны.

Конструкционное демпфирование в продольном направлении ( $s_0 > 0$ ) оказывает влияние на амплитуду волны. Это влияние исследуется с помощью численного решения уравнений Шамеля при  $s_0 > 0$ . В качестве начального условия принимается решение (11) при  $t = 0$ .

Волновое число  $k$  – произвольная величина. Разностная схема для уравнения (10) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + s_1 \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} + \\ & + 4 \frac{(u_{j+1}^{3/2n+1} - u_{j-1}^{3/2n+1}) + (u_{j+1}^{3/2n} - u_{j-1}^{3/2n})}{4h} + \\ & + \frac{(u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)}{4h^3} + \\ & + s_0 \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Проведено численное исследование модели (10), (11) с помощью разностной схемы (12). Результаты приведены на рисунках ниже.

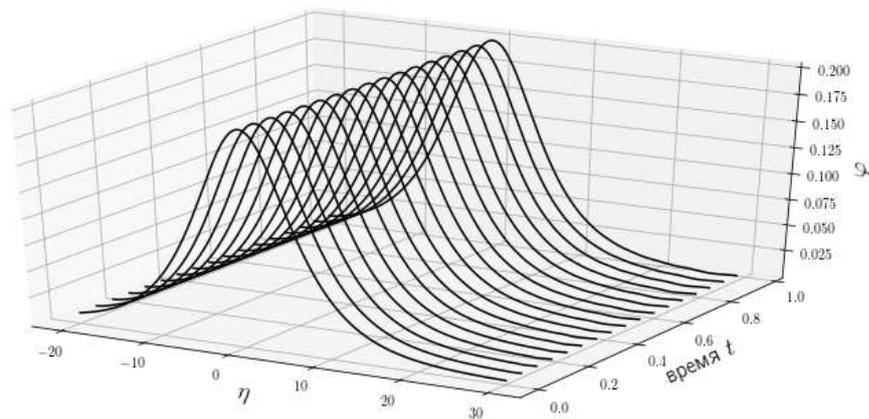


Рис. 1. Отсутствие влияния окружающей среды ( $s_1=0$ ) и конструкционного демпфирования в продольном ( $s_0=0$ ) направлении,  $k=0,3$

При отсутствии влияния окружающей среды и конструкционного демпфирования в продольном направлении, скорость и амплитуда волны не меняется (рис. 1). Это означает что скорость движения сверхзвуковая.

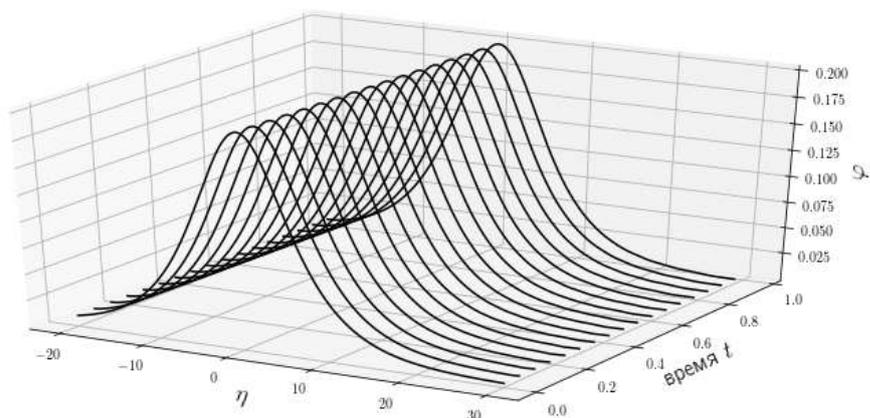


Рис. 2. Отсутствие конструкционного демпфирования в продольном ( $s_0=0$ ) направлении при наличии влияния окружающей упругой среды ( $s_1=1$ ),  $k=0,3$

При отсутствии конструкционного демпфирования в продольном направлении и наличии влияния окружающей упругой среды амплитуда волны не меняется. Движение происходит в положительном направлении (рис. 2). Это означает, что скорость движения увеличивается.

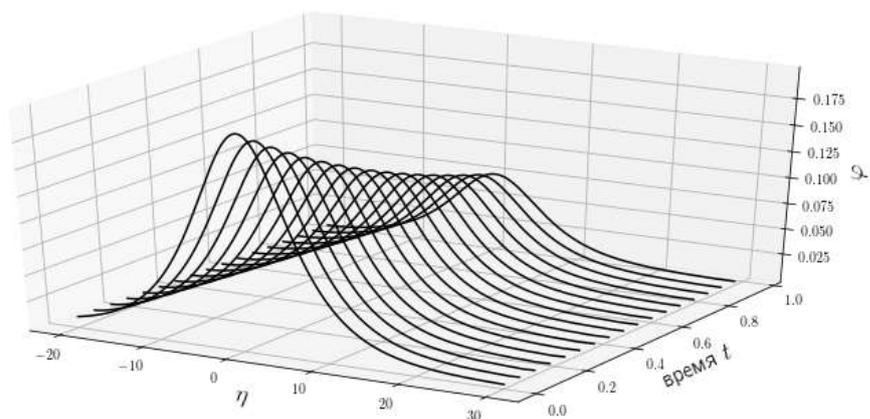


Рис. 3. Наличие влияния конструкционного демпфирования в продольном направлении ( $s_0=1$ ) и окружающей упругой среды ( $s_1=1$ ),  $k=0,3$

При влиянии конструкционного демпфирования в продольном направлении и наличии влияния окружающей упругой среды амплитуда волны падает. Движение происходит в положительном направлении, скорость движения увеличивается. (рис. 3).

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00014а.

### Литература

1. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды.-М.: Изд-во МГУ, 1990. –310 с.
2. Овчаров А. А., Брылев И. С. Математическая модель деформирования нелинейно упругих подкрепленных конических оболочек при динамическом нагружении // Современные проблемы науки и образования – 2014. - №3 URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/viewid=13235>
3. Каудерер К. Нелинейная механика.- М.: Издательство иностранной литературы, 1961. — 778 с.
4. Zemlyanukhin A. I., Andrianov I. V., Bochkarev A. V., Mogilevich L. I.. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. Nonlinear Dyn., 2019. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05181-5>
5. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попова Е.В. Продольные волны в нелинейной осесимметричной цилиндрической оболочке // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2018. №2 URL: <http://mathmod.esrae.ru/18-68>
6. Власов, В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. — [Б. м.] : М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. — С. 490.
7. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек: учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры – 2-е изд. стер. М.:Издательство Юрайт, 2018. 439 с.