

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/27-101](http://mathmod.esrae.ru/27-101)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Кудачёва К.А., Сопенко А.А. Сложные колебания пологих оболочек под действием переменной во времени и по плану нагрузки // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. №4

УДК 539.3; 541.1

## СЛОЖНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОЙ ВО ВРЕМЕНИ И ПО ПЛАНУ НАГРУЗКИ

Кудачёва К.А.<sup>1</sup>, Сопенко А.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет  
имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, kudachevaks@mail.ru

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет  
имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, saasar@mail.ru

## COMPLEX OSCILLATIONS OF SHALLOW SHELLS UNDER THE INFLUENCE TIME AND PLAN VARIABLE LOADING

Kudacheva. K.A.<sup>1</sup>, Sopenko A.A.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,  
Russia, Saratov, kudachevaks@mail.ru

<sup>2</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,  
Russia, Saratov, saasar@mail.ru

**Аннотация.** В работе рассматривается задача сложных колебаний пологих оболочек под действием нагрузки, переменной во времени и по плану оболочки. Рассмотрено влияние коэффициента демпфирования на решение данной задачи, а также границы применимости линейной теории. Рассмотрена связь между частотой вынуждающей нагрузки и колебаниями конструкций.

Ключевые слова: сложные колебания, пологие оболочки, коэффициент демпфирования, переменная во времени и по плану нагрузка.

**Abstract.** The work deals with problem of complex oscillations of shallow shells under the influence time and plan variable loading. Influence of damp coefficient to the solution of this problem, limits of applicability of the linear theory are considered. Correlation between frequency of the compelling loading and oscillations is considered.

Keywords: complex oscillations, shallow shells, damp coefficient, time and plan variable loading.

Рассматривается задача о колебаниях полой оболочки под действием распределённой нагрузки интенсивности  $q(x_2, t)$ , о которой будет сказано ниже. Система уравнений, полученная для геометрически нелинейной полой прямоугольной в плане оболочки в рамках модели Кирхгофа-Лява в смешанной форме [1] приводится ниже в безразмерном виде

$$\frac{1}{12(1-\nu^2)} \nabla^4 w - L(w, F) - \nabla_k^2 F - q + \kappa(\ddot{w} + \varepsilon \dot{w}) = 0 \quad (1)$$
$$\nabla^4 F + \nabla_k^2 w + \frac{1}{2} L(w, w) = 0.$$

Здесь  $F$  – функция напряжений,  $w$  – прогиб в направлении, перпендикулярном срединной поверхности, положительным считается направление прогиба к центру кривизны,  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $\rho$  – плотность,  $\varepsilon$  – коэффициент демпфирования, значение  $\kappa$  приведено ниже в наборе безразмерных переменных.

При этом безразмерные переменные для (1) вводились следующим образом

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1}{a}, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{b}, \quad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{h}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{F} = \frac{F}{Eh^3}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \bar{t} = \frac{t \cdot \alpha}{h^2}, \quad (2)$$
$$\bar{q} = q \frac{a^2 b^2}{Eh^4}, \quad \bar{k}_1 = k_1 \frac{a^2}{h}, \quad \bar{k}_2 = k_2 \frac{b^2}{h}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \frac{h}{\alpha}, \quad \kappa = \frac{a^2 b^2 \rho \alpha^2}{Eh^6}.$$

Здесь чёрточки, опущенные в (1) для удобства, стоят над безразмерными переменными.  $\bar{k}_1, \bar{k}_2$  – безразмерные параметры кривизны,  $\alpha$  – коэффициент температуропроводности,  $a, b, h$  – размеры оболочки вдоль осей  $x_1, x_2, x_3$  соответственно. Отметим, что программа для численного решения системы уравнений (1) разрабатывалась на основе действующей программы, включающей в себя решение трехмерного уравнения теплопроводности с учетом эффекта связанности полей деформаций и температуры при широком наборе краевых условий. Этим объясняется использование коэффициента температуропроводности  $\alpha$  в (2), хотя учет влияния температуры в данной задаче пока не планируется. Под дифференциальным оператором  $L(\cdot, \circ)$  понимается

$$L(\cdot, \circ) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2(\circ)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2(\circ)}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2(\circ)}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (3)$$

Остальные обозначения, в том числе для известных дифференциальных операторов, приводятся в [1].

По контуру оболочка шарнирно опёрта на гибкие, нерастяжимые в касательной плоскости рёбра; для края  $x_1 = 0; 1$  граничные условия имеют вид

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \quad \varepsilon_{22} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} = 0. \quad (4)$$

В начальный момент оболочка находится в покое.

При рассмотрении бесконечной тонкой пластины, обтекаемой потоком газа (жидкости) в направлении оси  $x_2$  в рамках модели неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (НКГ), все возмущения, перемещения и другие параметры принимаются пропорциональными  $e^{i(kx_2 - \omega t)}$ . Принимая

$$\omega = \omega_R + \gamma i \quad (5)$$

получаем, что давление  $p$  на поверхности пластины  $x_3 = -h/2$  можно принять равным

$$p(x_2, t) = e^{i(kx_2 - \omega_R t - \gamma t)} = e^{\gamma t} \sin(kx_2 - \omega_R t) \quad (6)$$

Не претендуя на решение задачи об обтекании конечной пластины потоком газа с дозвуковой скоростью и на получение дисперсионного уравнения, связывающего значения волнового числа  $k$  и частоты колебаний  $\omega$ , рассмотрим поведение пластины под действием гипотетической нагрузки вида (6), где для справедливости использования предположений (6) примем  $\gamma \ll \omega_R$  [2].

НКГ возникает в потоке при наличии значений  $\gamma > 0$ . Возникает вопрос о продолжительности интервала времени, в течение которого следует учитывать действие множителя  $e^{\gamma t}$ , т.к. при  $t \rightarrow \infty$  давление не может возрастать неограниченно. Предполагаем, что время действия  $t$  в данном множителе мало и является величиной порядка  $T = 2\pi/\omega_R$ , где  $\omega_R$  – собственная частота колебаний конструкции.

Величину  $\gamma$  для расчетов примем  $\gamma \leq \frac{1}{5} \omega_R$  [2-4].

Таким образом, возвращаясь к ранее использованным обозначениям для распределённой нагрузки интенсивности  $q$ , укажем, что целью настоящей работы является исследование поведения некоторых тонкостенных конструкций под действием распределённой по поверхности  $x_3 = -h/2$  гипотетической нагрузки интенсивности

$$q(x_2, t) = e^{\gamma t} \sin(kx_2 - \omega t), \quad (7)$$

где  $\omega$  выбирается близкой к частоте собственных колебаний конструкции,  $\gamma$  выбирается малым по сравнению с  $\omega$ ,  $e^{\gamma t}$  считается описанной выше функцией, и, как указано выше, волновое число  $k$  выбирается без решения дисперсионного уравнения, чтобы сравнить гипотетические решения.

Чтобы не вносить дополнительные погрешности в решение задачи, значения безразмерных параметров кривизны  $k_1$  и  $k_2$ , используемые в расчётах, принимаются достаточно малыми, чтобы пренебречь подъёмной силой, возникающей при обтекании оболочки.

При исследовании колебаний различных конструкций встаёт вопрос о численном определении их частот собственных колебаний. Для этого был предложен следующий алгоритм. Рассматривались свободные колебания конструкций, выведенных из положения равновесия. Зависимость прогибов от времени (сигнал) подвергалась быстрому преобразованию Фурье, что давало значение  $\omega$ . При необходимости значение  $\omega$  можно было подтвердить или уточнить, рассматривая вынужденные колебания конструкции в некотором диапазоне значений  $\omega$ , близких к полученной собственной частоте.

Сравнение численно полученного результата частоты собственных колебаний  $\omega_q$  для квадратной пластины  $a = b = 0,1$  м,  $h = 0,001$  м с теоретическим значением данной частоты  $\omega_r$ , полученным из широко известной в механике формулы:

$$\omega_{m,n} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad (8)$$

для низшей частоты ( $m = n = 1$ ) даёт следующие результаты: численно полученное размерное значение  $\omega_q = 2978,73$  (что соответствует безразмерному значению 13,45), полученное теоретически согласно (8)

$$\omega_r = 2965,27. \quad \frac{\omega_q}{\omega_r} = 1,0045.$$

Для численного решения системы уравнений (1) использовался метод конечных разностей для дискретизации производных по пространственным переменным с использованием формул второго порядка точности. Полученная из второго уравнения системы (1) система линейных алгебраических уравнений решалась методом Гаусса, затем происходило интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученной из первого уравнения (1). Численные эксперименты по использованию различных комбинаций явных и неявных одношаговых и многошаговых методов показали, что в данном случае достаточно использовать стандартных метод Рунге-Кутты 4 порядка.

Рассматривалась тонкостенная конструкция (пологая оболочка, цилиндрическая панель) изготовленная из сплава АМц с различными значениями  $a/b$ , при этом, менялся только параметр  $b$ , отношение  $a/h = 100$  оставалось постоянным.

Оболочка имеет физические параметры:  $E = 69$  ГПа,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 2800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 6,4 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/сек. Далее все результаты приводятся в безразмерном виде. На конструкцию на поверхности  $x_3 = -h/2$  в начальный момент начинает действовать распределённая нагрузка (7).

Рассмотрим колебания квадратной в плане полой оболочки при  $k_1 = k_2 = 8$  и волновом числе  $k = 0$ . Отметим, что в известных нам работах, посвященных

флаттеру, например, [2-4] использовалась геометрически линейная теория для описания колебаний пластин. Также в данных работах не учитывается влияние коэффициента демпфирования  $\varepsilon$ . Предполагая, что возможно совпадение частоты вынуждающей нагрузки с частотой собственных колебаний оболочки  $\omega = 16,35$ , авторами были проведены расчеты с использованием программы, учитывающей возможность больших колебаний оболочки, т.е. геометрическую нелинейность. Сравнивались результаты при  $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  и  $\varepsilon = 4$  – при котором в задаче свободных колебаний осуществлялось затухание колебаний оболочки менее чем за 10 периодов этих колебаний. Отметим, что все приведенные безразмерные значения  $\varepsilon$  в размерном виде много меньше 1. Так,  $\varepsilon = 1$  в размерном виде соответствует значению примерно 0,0061. Результаты расчетов собраны в табл.1.

$k_1 = 8, k_2 = 8, a/b = 1, \omega = 16,35$ , волн. число  $k = 0$

Таблица 1

	Сигнал	Фазовый портрет	Спектр мощности
$\varepsilon = 0 \quad \gamma = 0,5$			
$\varepsilon = 1 \quad \gamma = 0,5$			
$\varepsilon = 4 \quad \gamma = 0,5$			

Аналогичные результаты были получены для значений  $\gamma = 1; 2$  при увеличении амплитуды колебаний.

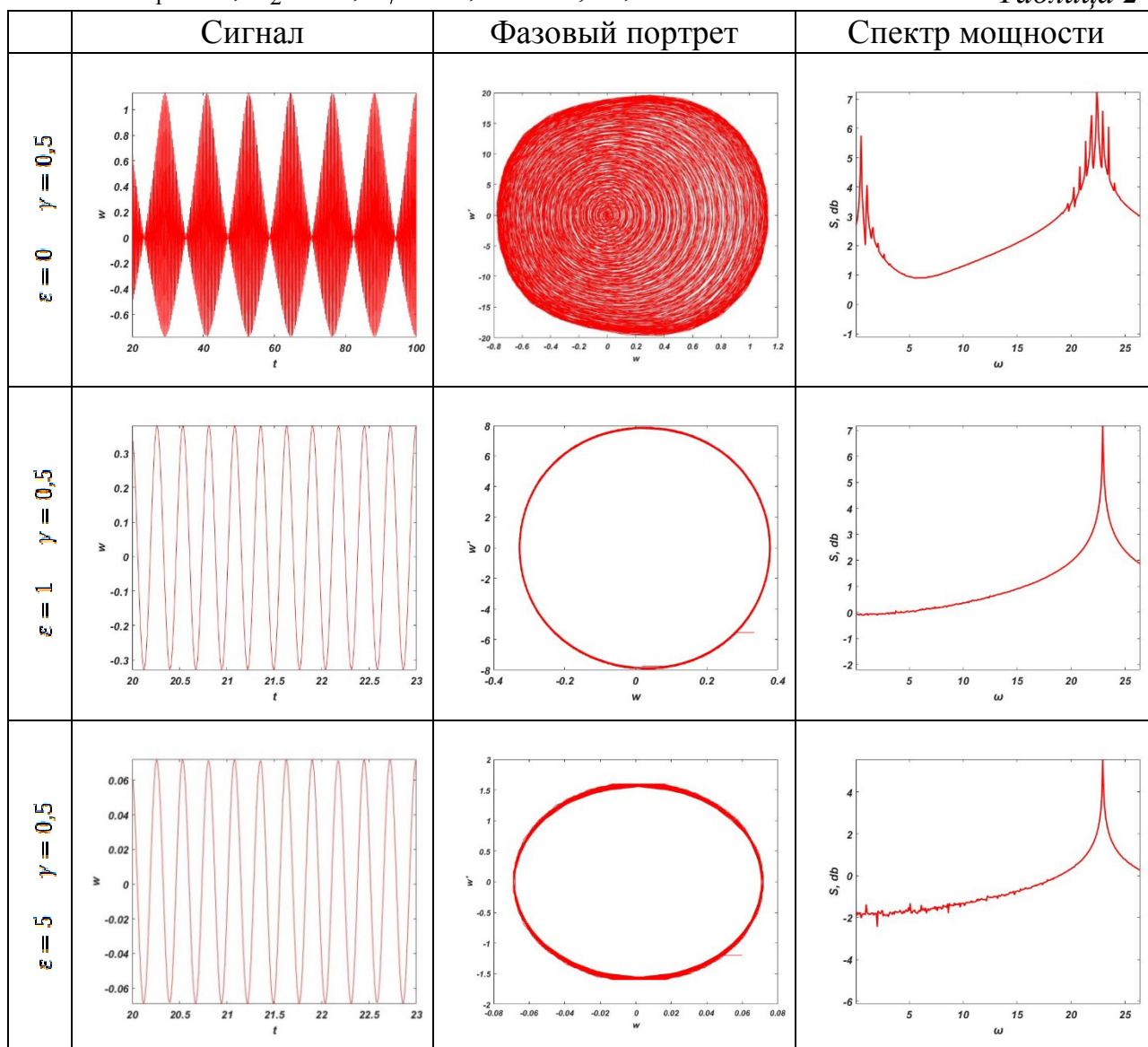
Значение  $\gamma = 0,5; 1; 2$  выбиралось малым по сравнению со значением  $\omega = 16,35$ . Отметим, что при  $\varepsilon = 0$  максимальные прогибы достигали 2 и 3 толщин при различных значениях  $\gamma$  соответственно, что говорит о неприменимости геометрически линейной теории.

При  $\varepsilon = 1$  значение максимальных прогибов составляло примерно от  $-0,5$  до  $+0,6$  при рассмотренных значениях  $\gamma$ , что также свидетельствует о необходимости использования геометрически нелинейной теории. При  $\varepsilon = 4$  колебания проходили в диапазоне  $-0,15 +0,15$  толщин оболочки, форма колебаний при  $\varepsilon \neq 0$  в обоих случаях гармоническая.

Подобные результаты (табл. 2) были получены и для пологой оболочки при  $k_1 = k_2 = 16$  и  $a/b = 1$ .

$k_1 = 16, k_2 = 16, a/b = 1, \omega = 22,95$ , волн. число  $k = 0$

Таблица 2



Очень похожие результаты получены при  $\gamma = 1; 2$ .

Поскольку получение и решение дисперсионного уравнения не входило в нашу задачу, значение  $k$  выбиралось гипотетически из широкого диапазона. Все расчёты были проведены для значений  $k = 1; 10; 100$ , значение  $\omega$  по-прежнему совпадало с частотой собственных колебаний конструкции.

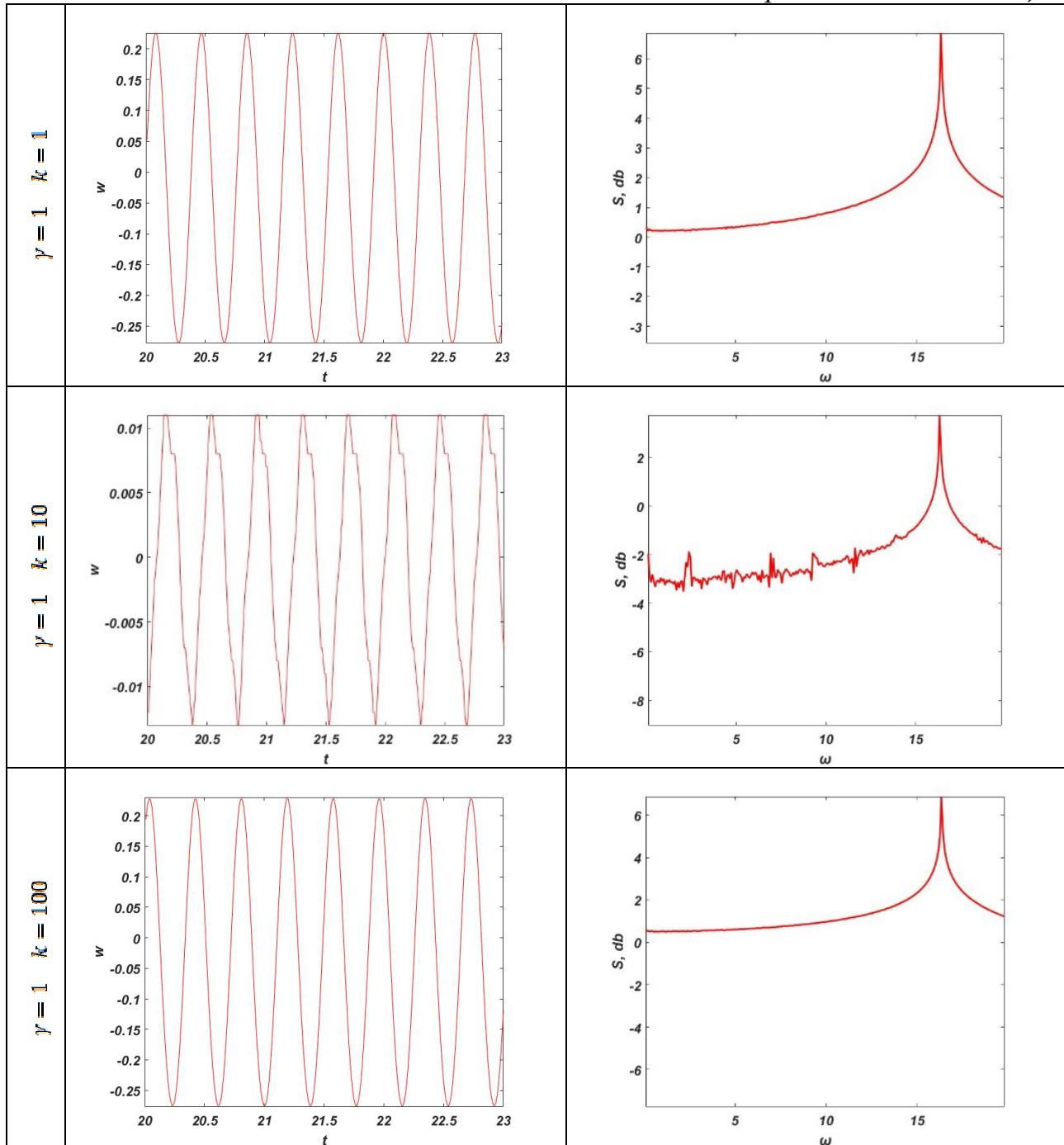
В табл. 3 собраны результаты для оболочки с параметрами  $k_1 = k_2 = 8$ ,  $\omega = 16,35$ ,  $a/b = 1$ .

$k_1 = 8, k_2 = 8, a/b = 1, \omega = 16,35, \varepsilon = 1$

Таблица 3

	Сигнал	Спектр мощности
$\gamma = 0,5 \quad k = 1$		
$\gamma = 0,5 \quad k = 10$		
$\gamma = 0,5 \quad k = 100$		

Продолжение таблицы 3



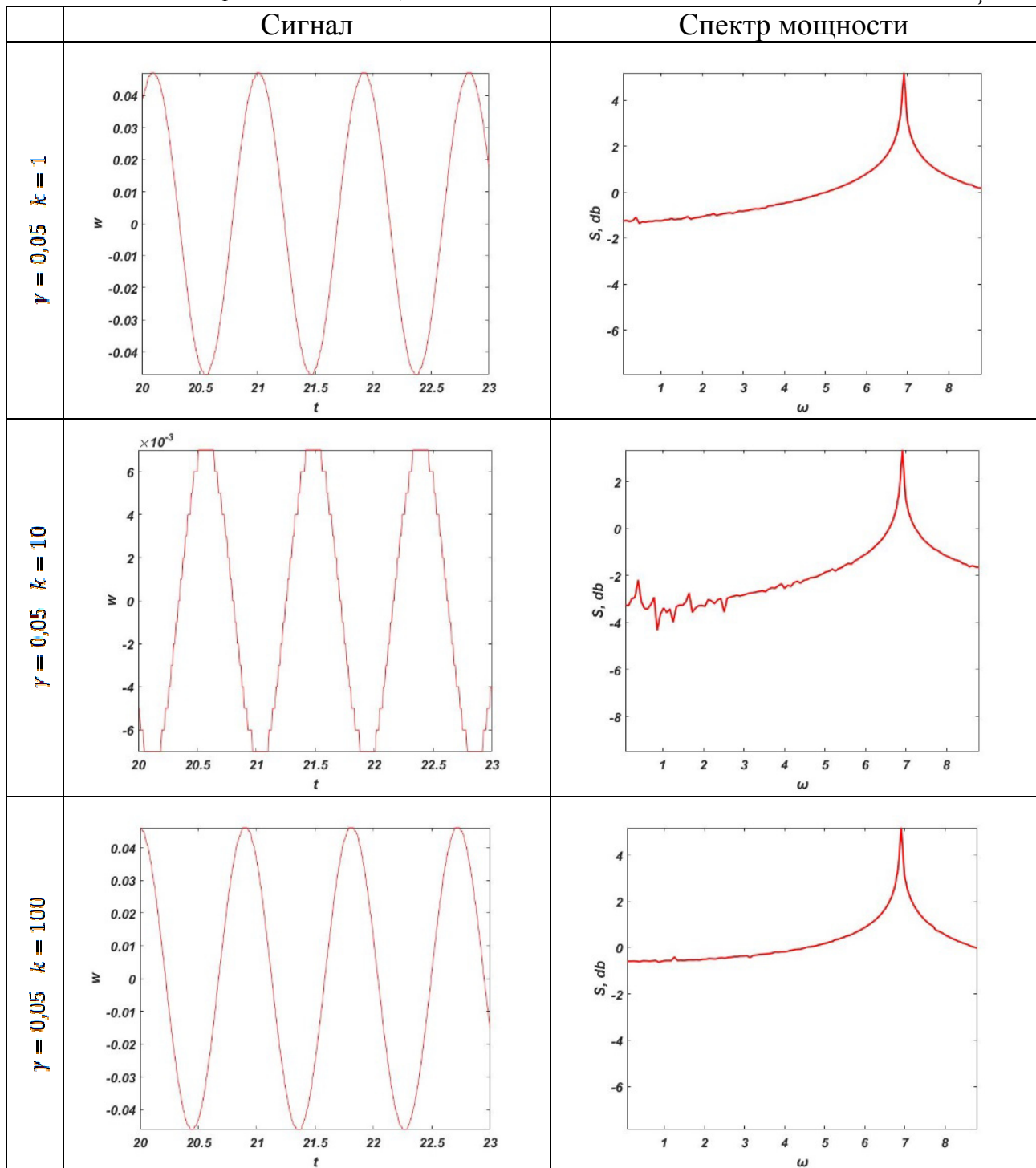
Отметим любопытный факт. Колебания при  $k=1$  и  $k=100$  идут в диапазоне  $-0,26 +0,22$ , т.е. на пределе применимости геометрически линейной теории, форма колебаний – гармоническая. А при  $k=10$  диапазон колебаний падает на порядок, от  $-0,013$  до  $+0,012$ , но зато серьезно портится форма колебаний, что показывает график сигнала и очень сильное зашумливание спектра мощности.

В табл. 4 собраны результаты для цилиндрической панели с параметрами  $k_1 = 8$ ,  $k_2 = 0$ ,  $\omega = 6,90$ ,  $b/a = 5$ .

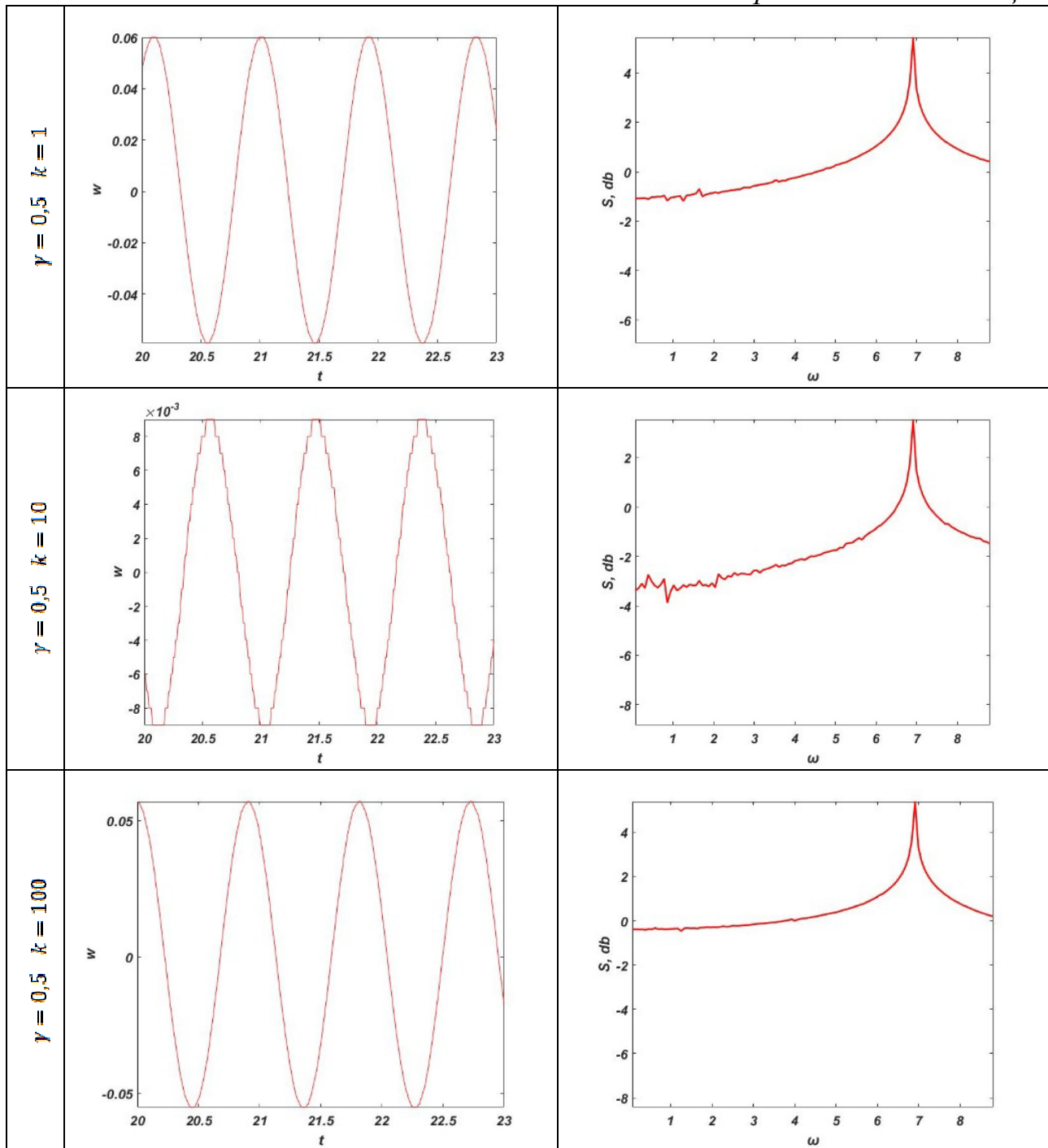


$$k_1 = 8, k_2 = 0, b/a = 5, \omega = 6,90, \varepsilon = 1$$

Таблица 4



Продолжение таблицы 4



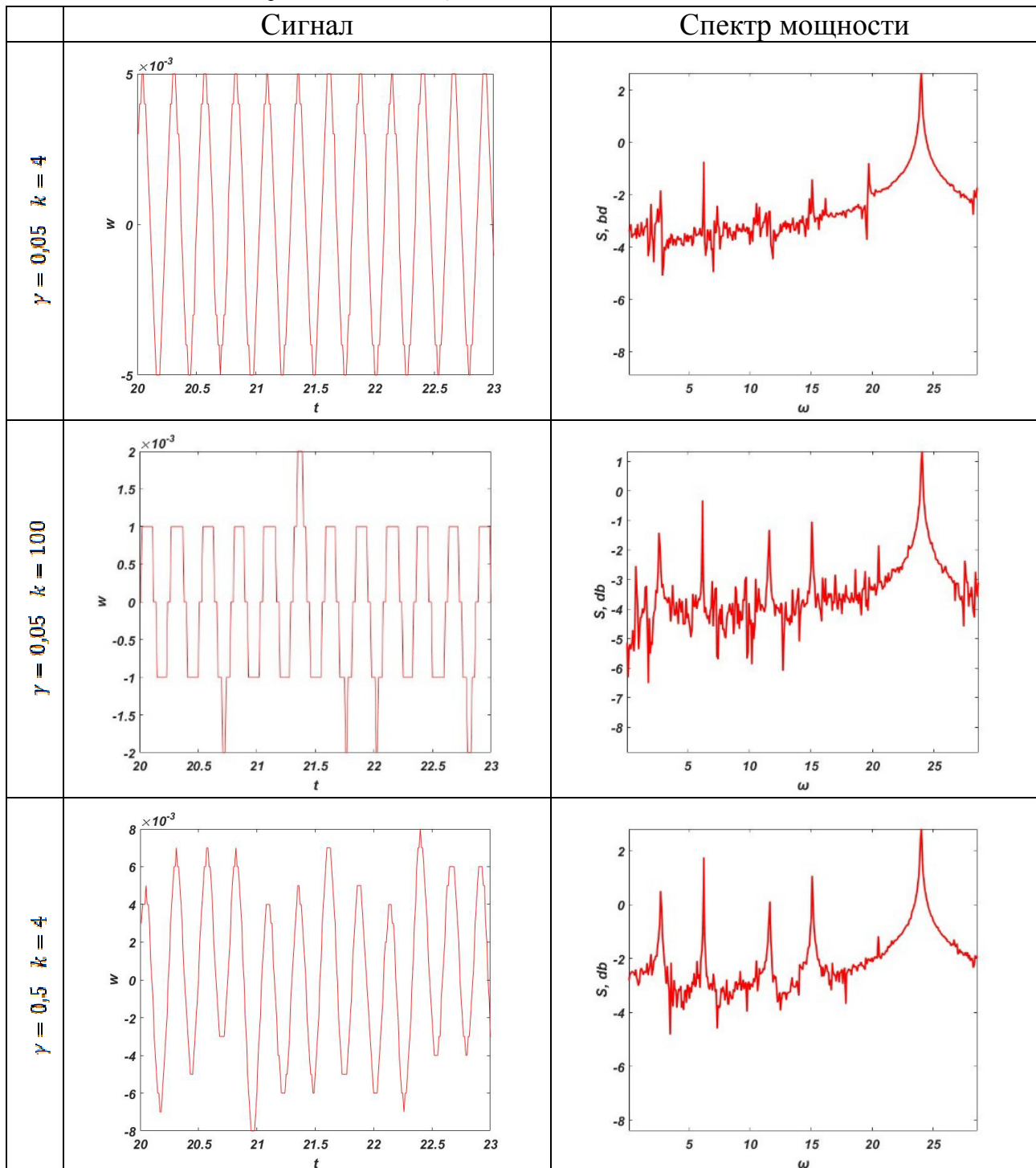
Отметим, что колебания при  $k = 1$  и  $k = 100$  идут в диапазоне  $-0,06 + 0,06$ , т.е. прогибы уменьшились почти в 5 раз, форма колебаний – гармоническая. Но при  $k = 10$  диапазон колебаний по-прежнему падает, принимая значения от  $-0,009$  до  $+0,009$ , но портится форма колебаний, что показывает график сигнала и зашумливание спектра мощности. Похожие результаты были получены и для  $b/a = 2$ ,  $\omega = 8,90$ ,  $k_1 = 8$ ,  $k_2 = 0$ .

Нам представилось интересным попытаться исследовать колебания какой-либо конструкции при воздействии на нее вынуждающей нагрузки с

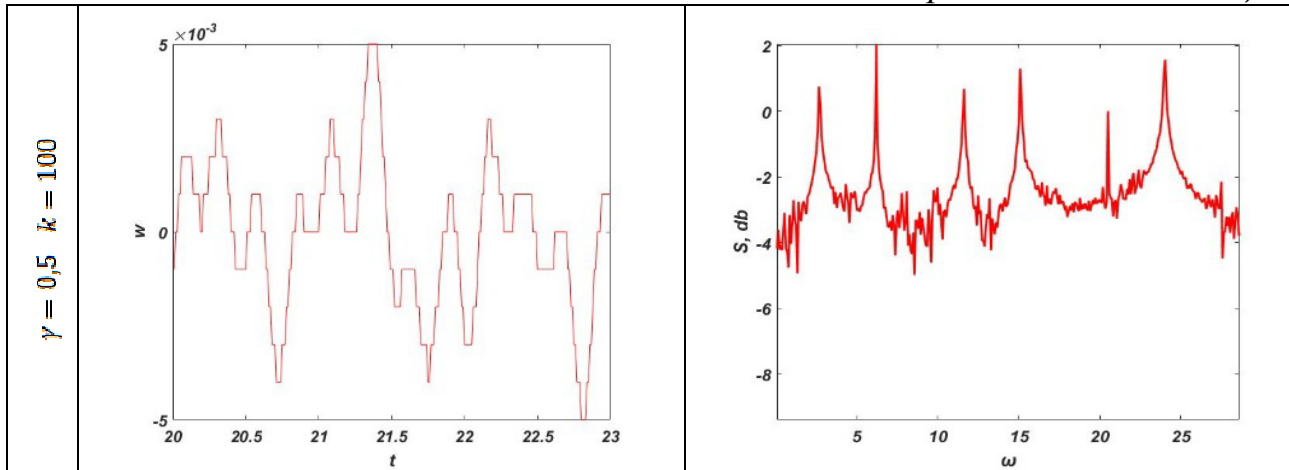
частотой, далекой от частоты собственных колебаний. Для этого была выбрана цилиндрическая панель с параметрами  $k_1 = 8$ ,  $k_2 = 0$ ,  $b/a = 2$  и собственной частотой колебаний  $\omega = 8,90$ . Расчёты, как и ранее, проводились при  $\varepsilon = 1$  и значениях  $\gamma = 0,05$  и  $\gamma = 0,5$  (малы по сравнению с собственной частотой  $\omega$ ). Но вынуждающая нагрузка действует с частотой  $\omega = 24$  (табл. 5). Значение  $k$  составляло в расчетах 4 и 100.

$$k_1 = 8, k_2 = 0, b/a = 2, \omega = 24, \varepsilon = 1$$

Таблица 5



Продолжение таблицы 5



Получены следующие результаты. С увеличением разницы между частотой нагрузки и собственной частотой падает диапазон, в котором осуществляются колебания, но одновременно резко портится форма колебаний. В данном случае можно смело говорить о возникновении хаотических колебаниях.

#### Литература

1. Сопенко А.А., Майорова О.А., Черепанов М.Д. Сложные колебания геометрически и физически нелинейных пологих оболочек // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 3. URL: [mathmod.esrae.ru/3-16](http://mathmod.esrae.ru/3-16).
2. Gestrin S.G., Gorbatenko B.B., Mezhonnova A.S. Wind instability and interaction of vibrations of a thin plate with a magnetohydrodynamic hypersonic flow // Russian Physics Journal. 2016. Vol. 59. № 1. P. 76-82.
3. Бондарев В.О., Веденеев В.В. Флаттер бесконечных упругих пластин с учетом пограничного слоя при конечных числах Рейнольдса // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 6. С. 89-107.
4. Веденеев В.В. Численное исследование сверхзвукового флаттера пластины с использованием точной аэродинамической теории // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 2. С. 169-178.