Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: **mathmod.esrae.ru/27-102**
Ссылка для цитирования этой статьи:
Быкова Т.В., Могилевич Л.И. Моделирование волнового процесса в оболочке с дробной физической нелинейностью // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. №4
Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00014а.

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА В ОБОЛОЧКЕ С ДРОБНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Быкова Т.В.[1], Могилевич Л.И.[2]

[1]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., tbykova69@gmail.com
[2]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., mogilevich@info.sgu.ru

Аннотация. Изучение поведения деформационных волн в упругих оболочках является важной частью современной волновой динамики. В то же время влияние на волновой процесс в упругих структурах с дробной физической нелинейностью в литературе не изучалось. В данной работе мы исследуем влияние дробной физической нелинейности в упругих оболочках на распространение продольных волн деформации. Найдены точные решения нелинейных уравнений динамики.

Ключевые слова: нелинейные волны, упругие цилиндрические оболочки.

MODELING A WAVE PROCESS IN A SHELL WITH FRACTIONAL PHYSICAL NONLINEARITY

Bykova T.V. [1], Mogilevich L. I.[2]

[1]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, tbykova69@gmail.com
[2]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, mogilevich@info.sgu.ru

Abstract. The study of the behavior of deformation waves in elastic shells is an important part of modern wave dynamics. At the same time, the influence on the wave process in elastic structures with fractional physical nonlinearity has not been studied in the literature. In this paper, we study the effect of fractional physical nonlinearity in elastic shells on the propagation of longitudinal strain waves. Exact solutions of nonlinear equations of dynamics are found.

Keywords: non-linear waves, elastic cylinder shell.

Деформационная теория пластичности А. А. Илюшина [1,2] связывает компоненты тензора напряжений σ_x, σ_Θ с компонентами тензора деформаций ε_x, ε_Θ и интенсивностью деформаций ε_u [3,4].

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_x + \mu_0\varepsilon_\Theta)\left(1+\frac{m}{E}\varepsilon_u^{1/2n}\right);\ \sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu_0^2}(\varepsilon_\Theta + \mu_0\varepsilon_x)\left(1+\frac{m}{E}\varepsilon_u^{1/2n}\right);$$

$$\varepsilon_u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mu_1\left(\varepsilon_x^2+\varepsilon_\Theta^2\right)-\mu_2\varepsilon_x\varepsilon_\Theta\right)^{1/2},\ \mu_1 = \frac{1}{3}\left[1+\frac{\mu_0(2\mu_0-1)}{(1-\mu_0)^2}\right], \tag{1}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{3}\left[1-\frac{2\mu_0(2\mu_0-1)}{(1-\mu_0)^2}\right].$$

Здесь E – модуль Юнга; m – константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие; μ_0 - коэффициент Пуассона материала оболочки.

Рассматривается осесимметричный случай цилиндрической геометрически линейной оболочки с радиусом серединной поверхности R, плотностью ρ_0 толщиной h_0 и упругими перемещениями – продольным U и прогибом W, направленным к центру кривизны.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2},\ \varepsilon_\theta = -\frac{W}{R} - z\frac{W}{R^2} \tag{2}$$

Асимптотический анализ [5] показал, что интенсивность деформации можно рассматривать на серединной поверхности ($z=0$)

$$\varepsilon_u^{1/2n} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}\left(\mu_1\left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{W}{R}\right)^2\right)+\mu_2\frac{\partial U}{\partial x}\frac{W}{R}\right)^{1/4n} \tag{3}$$

Подставляя (2),(3) в соотношение (1) получим напряжения в виде:

$$\begin{gathered}\sigma_x = \frac{E}{1-\mu_0^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \mu_0\frac{W}{R} - z\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\mu_0\frac{W}{R^2}\right)\right)\Bigg[1+\\ +\frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}\left\{\mu_1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\mu_1\left(\frac{W}{R}\right)^2+\mu_2\frac{\partial U}{\partial x}\frac{W}{R}\right\}^{1/4n}\Bigg],\\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu_0^2}\left(\mu_0\left(\frac{\partial U}{\partial x} - z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) - \frac{W}{R} - z\frac{W}{R^2}\right)\Bigg[1+\\ +\frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}\left\{\mu_1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\mu_1\left(\frac{W}{R}\right)^2+\mu_2\frac{\partial U}{\partial x}\frac{W}{R}\right\}^{1/4n}\Bigg]\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь E, m – упругие постоянные; μ_0 - коэффициент Пуассона.

Усилия в серединной поверхности согласно (4) определяются формулами:

$$N_x = \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \mu_0\frac{W}{R}\right)\left[1+\frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}\left\{\mu_1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\mu_1\left(\frac{W}{R}\right)^2+\mu_2\frac{\partial U}{\partial x}\frac{W}{R}\right\}^{1/4n}\right] \tag{5}$$

$$N_\theta = \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2}\left(\mu_0 \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{W}{R}\right)\left[1 + \frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}\left\{\mu_1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{W}{R}\right)^2 + \mu_2 \frac{\partial U}{\partial x}\frac{W}{R}\right\}^{1/4n}\right]$$

А момент определяется в виде

$$M_x = -\frac{Eh_0^3}{12(1-\mu_0^2)}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu_0 \frac{W}{R^2}\right)\times$$
$$\times\left[1 + \frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}\left\{\mu_1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{W}{R}\right)^2 + \mu_2 \frac{\partial U}{\partial x}\frac{W}{R}\right\}^{1/4n}\right] \tag{6}$$

Здесь h_0 - толщина оболочки.

Асимптотический анализ [5] показал, что в (6) первый член значительно больше остальных и их можно отбросить, потому что M_x само значительно меньше усилий N_x, N_θ.

Следовательно, из формулы (6) получим

$$M_x = -\frac{Eh_0^3}{12(1-\mu_0^2)}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu_0 \frac{W}{R^2}\right) \tag{7}$$

Вводя скорость звука $c_0 = \left(\dfrac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}\right)^{1/2}$ в оболочке радиуса серединной поверхности R с использованием (5), (7), получим уравнения динамики оболочки

$$c_0^2 \frac{\partial}{\partial x}\left\langle\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \mu_0 \frac{W}{R}\right)\left[1 + \frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}\left\{\mu_1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{W}{R}\right)^2 + \mu_2 \frac{\partial U}{\partial x}\frac{W}{R}\right\}^{1/4n}\right]\right\rangle = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

$$c_0^2\left\langle -\frac{h_0^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu_0 \frac{W}{R^2}\right) + \right. \tag{8}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial W}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \mu_0 \frac{W}{R}\right)\left[1 + \frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}\left\{\mu_1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{W}{R}\right)^2 + \mu_2 \frac{\partial U}{\partial x}\frac{W}{R}\right\}^{1/4n}\right]\right\}\right\} +$$

$$\left. + \frac{1}{R}\left(\mu_0 \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{W}{R}\right)\left[1 + \frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}\left\{\mu_1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \mu_1\left(\frac{W}{R}\right)^2 + \mu_2 \frac{\partial U}{\partial x}\frac{W}{R}\right\}^{1/4n}\right]\right\rangle = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

Введем малый параметр задачи $\varepsilon << 1$ и соотношения, характеризующие задачу. Полагаем

$$\frac{h_0}{R} = \varepsilon = o(1);\ U = \frac{h_0 l}{R}u_1,\ W = h_0 u_3,\ x^* = \frac{x}{l},\ t^* = \frac{c_0}{l}t, \tag{9}$$

ISSN 2541-9269

$$\left(\frac{R}{l}\right)^2 = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2n}}\right); \frac{m}{E} = O(1).$$

Здесь длина волны l является характерной длиной.

Подставляя (9) в систему уравнений (8) и оставляя члены двух порядков малости будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x^*}\left\langle\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^*} - \mu_0 u_3\right)\left[1 + \frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}\varepsilon^{1/2n}\left\{\mu_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^*}\right)^2 + \mu_1 u_3{}^2 + \mu_2\frac{\partial u_1}{\partial x^*}u_3\right\}^{1/4n}\right]\right\rangle = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}},$$

$$\left(\mu_0\frac{\partial u_1}{\partial x^*} - u_3\right)\left[1 + \frac{m}{E}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}\varepsilon^{1/2n}\left\{\mu_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^*}\right)^2 + \mu_1 u_3{}^2 + \mu_2\frac{\partial u_1}{\partial x^*}u_3\right\}^{1/4n}\right] = \left(\frac{R}{l}\right)^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^{*2}} \quad (10)$$

Применим метод двухмасштабных разложений. Представим решение системы (10) в виде разложения

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon^{1/2n}u_{11} + \ldots,\ u_3 = u_{30} + \varepsilon^{1/2n}u_{31} + \ldots \quad (11)$$

Введем независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - (1-\mu_0^2)^{1/2}t^*,\ \tau = \varepsilon^{1/2n}t^* \quad (12)$$

В переменных (11), (12) будем иметь уравнения для двучленных разложений.

Для первого члена разложения получим систему уравнений

$$\mu_0\frac{\partial}{\partial\xi}\left\langle\mu_0\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi} - u_{30}\right\rangle = 0$$

$$\mu_0\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi} - u_{30} = 0$$

Из которой следует

$$u_{30} = \mu_0\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi} \quad (13)$$

Функция u_{10} остается произвольной.

В следующем приближении будем иметь систему с учетом (13)

$$\begin{gathered}\mu_0^2\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial\xi^2} - \mu_0\frac{\partial u_{31}}{\partial\xi} = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}\frac{m}{E}\left(1-\mu_0^2\right)\left(\mu_1 + \mu_2\mu_0 + \right.\\ \left. + \mu_1\mu_0^2\right)^{1/4n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\right)^{1/2n}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2} - 2\sqrt{1-\mu_0^2}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau},\end{gathered} \quad (14)$$

$$\mu_0\frac{\partial u_{11}}{\partial\xi} - u_{31} = \frac{1}{\varepsilon^{1/2n}}\frac{R^2}{l^2}\left(1-\mu_0^2\right)\mu_0\frac{\partial^3 u_{10}}{\partial\xi^3};$$

Умножим обе части второго уравнения (14) на μ_0 и продифференцируем по ξ. Оно примет вид

$$\mu_0^2\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial\xi^2}-\mu_0\frac{\partial u_{31}}{\partial\xi}=\frac{1}{\varepsilon^{1/2n}}\frac{R^2}{l^2}\mu_0^2\left(1-\mu_0^2\right)\frac{\partial^4 u_{10}}{\partial\xi^4}; \qquad (15)$$

Левые части первого уравнения (14) и уравнения (15) совпали. Вычтем, почленно, из уравнения (15) первое уравнение системы (14) и получим разрешающее уравнение

$$\begin{gathered}2\sqrt{1-\mu_0^2}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi\partial\tau}+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}\frac{m}{E}\left(1-\mu_0^2\right)\left(\mu_1+\mu_2\mu_0+\right.\\ \left.+\mu_1\mu_0^2\right)^{1/4n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}\right)^{1/2n}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial\xi^2}+\mu_0^2\left(1-\mu_0^2\right)\frac{\partial^4 u_{10}}{\partial\xi^4}=0,\end{gathered} \qquad (16)$$

Полагая

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial\xi}=\varphi,\ \eta=c_1\xi,\ t=c_2\tau$$

получим уравнение, обобщающее уравнение Шамеля [4]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+6\varphi^{1/2n}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial\eta_3}=0 \qquad (17)$$

где

$$c_1=\left[\frac{m}{E}\frac{2n+1}{12n}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}\frac{(\mu_1+\mu_2\mu_0+\mu_1\mu_0^2)^{1/4n}}{\mu_0^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$c_2=c_1\frac{m}{E}\frac{2n+1}{24n}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1/2n}(1-\mu_0^2)^{1/2}\left(\mu_1+\mu_2\mu_0+\mu_1\mu_0^2\right)^{1/4n}.$$

Уравнение (17) имеет точное решение в виде солитона

$$\varphi=k^{4n}\left(\frac{1}{3}+2n+\frac{8}{3}n^2\right)^{2n}ch^{-4n}k[\eta-16n^2k^2t]\}$$

При этом

n=1/4 соответствует кубической нелинейности,
n=1/2 соответствует квадратической (гидродинамической) нелинейности,
n=3/4 соответствует нелинейности 5/3,
n=1 соответствует нелинейности Шамеля (3/2),
n=5/4 соответствует нелинейности 7/5,
n=3/2 соответствует нелинейности 4/3,
n=7/4 соответствует нелинейности 9/7,
n=2 соответствует нелинейности 5/4.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00014а.

Литература

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды.-М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
2. Овчаров А.А., Брылев И.С. Математическая модель деформирования нелинейно упругих подкрепленных конических оболочек при динамическом нагружении // Современные проблемы науки и образования. 2014. №3. URL: http://www.science-education.ru/ru/article/viewid=13235
3. Каудерер К. Нелинейная механика. М.: Издательство иностранной литературы, 1961. 778 с.
4. Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I.. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Nonlinear Dyn. 2019. https://doi.org/10.1007/s11071-019-05181-5
5. Mogilevich L., Ivanov S. The Study of Wave Propagation in a Shell with Soft Nonlinearity and with a Viscous Liquid Inside // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. Vol. 15. №. 3. P. 233-250.