Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/27-103
Ссылка для цитирования этой статьи:
Волошин А.Н., Попова А.А., Попова Е.В., Ратушный А.В. Моделирование продольных колебаний стенок кольцевого канала с вязкой жидкостью // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2019. №4
Выполнено при поддержке РФФИ грант № 19-01-00014а

УДК 532.517.2:539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕНОК КОЛЬЦЕВОГО КАНАЛА С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Волошин А.Н.[1], Попова А.А.[2], Попова Е.В.[3], Ратушный А.В.[4]
[1]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, artem96voloshin@gmail.com
[2]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, anay_p@bk.ru
[3]Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, elizaveta.popova.97@bk.ru
[4]Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, sania.ratushnyy@gmail.com

MODELING OF THE WALLS LONGITUDINAL VIBRATIONS FOR AN ANNULAR CHANNEL WITH A VISCOUS FLUID

Voloshin A.N.[1], Popova A.A.[2], Popova E.V.[3], Ratushny A.V.[4]
[1]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, artem96voloshin@gmail.com
[2]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, anay_p@bk.ru
[3]Saratov State University, Russia, Saratov, elizaveta.popova.97@bk.ru
[4]Saratov State University, Russia, Saratov, sania.ratushnyy@gmail.com

Аннотация. В работе разработана математическая модель для исследования продольных колебаний упругозакрепленных стенок узкого кольцевого канала, заполненного пульсирующей вязкой жидкостью. Стенки канала представляют собой два коаксиальных цилиндра, которые на торцах имеют упругое закрепление и могут совершать продольные колебания. Движение жидкости в узком кольцевом канале рассмотрено как ползущее и происходит за счет пульсации давления на торце канала. Найдены законы распределения гидродинамических параметров слоя жидкости и законы движения стенок канала. Построены амплитудные частотные характеристики стенок узкого кольцевого канала и проведено моделирование их поведения.

Ключевые слова: узкий кольцевой канал, гидроупругие колебания, вязкая жидкость

Abstract. In this paper, a mathematical model has been developed to study the walls longitudinal vibrations of a narrow annular channel filled with a pulsating viscous fluid. The channel walls are formed by two rigid coaxial cylinders flexibly restrained at the channel ends. The fluid movement in a narrow annular channel is considered as creeping one due to the pressure pulsation at the channel end. The distribution laws of hydrodynamic parameters for the fluid annular layer and the channel walls movement laws were found. The amplitude frequency responses for the walls of a narrow annular channel were constructed and their behavior was simulated.

Keywords: narrow annular channel, hydroelastic oscillations, viscous fluid

Исследование движение вязкой жидкости по каналам и трубам представляют теоретический и практический интерес. Одной из первых работ, исследующих нестационарное движение вязкой жидкости в жесткой трубе под действием переменного давления на ее торцах, является [1]. Современные проблемы взаимодействия элементов конструкций с жидкостью в осесимметричной постановке рассмотрены в монографии [2]. Исследования данных проблем для элементов, обладающих упругой податливостью, связаны с необходимостью постановки и решения динамических задач гидроупругости. Исследования взаимодействия жидкости в канале с его стенками, имеющими упругий подвес, выполнены в работах [3-7]. В [3,4] рассмотрены плоские задачи для каналов с параллельными стенками, а [5-7] рассмотрены продольные и поперечные колебания стенки узкого клиновидного канала. Изгибные колебания бесконечной балки, установленной на слое вязкой жидкости, изучены в [8]. В работе [9] рассматриваются изгибные колебания консольной балки, окруженной вязкой несжимаемой жидкостью. В работе [10] изучены изгибные колебания консольной балки в потоке вязкой жидкости, применительно к пьезоэлементам. В работах [11-13] исследованы задачи поперечных гидроупругих колебаний стенок канала, образованных параллельными прямоугольными или круговыми пластинами в плоской и осесимметричной постановках. Исследование продольных колебаний пластины в потоке вязкой жидкости в канале, образованном двумя параллельными жесткими стенками, проведено в [14]. Аналогичные исследования для трехслойных пластин со сжимаемым и несжимаемым заполнителем выполнены в [15-19].

Одно из первых исследований пульсирующего осесимметричного движения вязкой жидкости вдоль упругой трубки было проведено в [20]. Исследование пульсирующего движения вязкой жидкости в упругом кольцевом канале конечного размера выполнено в работах [21, 22]. В [23, 24] рассматриваются задачи динамики и устойчивости соосных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с потоком идеальной и вязкой жидкости, находящейся между ними. Аналогичное исследование для цилиндрической оболочки выполнено в [25]. В [26] исследованы малые поперечные колебания прямолинейного упругого трубопровода с транспортируемой идеальной жидкостью. В работах [27, 28] изучены гидроупругие изгибные колебания

цилиндра, окруженного слоем вязкой жидкости, при вибрационных и ударных воздействиях применительно к двигателям внутреннего сгорания. Влияние взаимодействия вязкой жидкости с упругим ребристым корпусом поплавка на динамику поплавкового гироскопа исследовано в [29, 30]. Исследование взаимодействия пульсирующего потока вязкой жидкости с цилиндрической оболочкой, по которой он движется, выполнено в [31, 32]. Моделирование гидроупругих колебаний стенок каналов кольцевого и круглого сечений, образованных ребристыми оболочками проведено в [33-35]. В работах [36-38] изучены колебания поперечных стенок кольцевого канала, окруженного упругой средой. В работах [39-41] проведено моделирование распространения уединенных нелинейных волн деформации в стенках каналов кольцевого и круглого сечения, заполненных вязкой несжимаемой жидкостью. Однако, в указанных выше работах, не исследовалась проблема продольных колебаний упругозакрепленных стенок кольцевого канала, заполненного вязкой жидкостью, которая рассматривается в настоящей работе.

1. Рассмотрим узкий кольцевой канал, представленный на рис. 1. Канал образован двумя соосными цилиндрами, имеющими длину ℓ. Данные цилиндры имеют на торцах упругие закрепления, которые позволяют им совершать продольные колебания. Внутренний радиус полого внешнего цилиндра равен R_1, а наружный радиус внутреннего цилиндра равен R_2. Кольцевая щель полностью заполнена вязкой несжимаемой жидкостью, т.е. толщина слоя жидкости в канале равна $\delta = R_1 - R_2$. Движение жидкости происходит за счет заданного перепада давления на краях канала $\Delta p = p^- - p^+$, где $p^- = p_0 + p^*(\omega t)$, $p^+ = p_0$. Таким образом, мы полагаем, что в поперечном сечении канала на левом торце давление имеет гармонически пульсирующую составляющую $p^*(\omega t)$ и постоянную составляющую p_0, а в поперечном сечении канала на правом торце только постоянную составляющую p_0. Частота пульсации давления ω считается заданной. В рассматриваемой постановке, амплитуды колебаний стенок канала значительно меньше толщины слоя жидкости δ, а также выполняется условие $\delta << R_2$. Таким образом, пульсирующий слой вязкой жидкости, двигаясь по кольцевому каналу, воздействует на его стенки, и в результате, возникают их продольные колебания. Введем цилиндрическую систему координат $r\theta y$ и связанную с ней декартову систему координат xyz. Центры систем координат расположим в геометрическим центре канала. В силу осевой симметрии канала, далее, будем исследовать осесимметричную задачу для сильновязкой жидкости в узком канале. Это позволяет считать, что переходные процессы в рассматриваемой системе быстро затухают, и наблюдаются только установившиеся гармонические колебания [42].

2. Принимая во внимание, что цилиндры являются абсолютно жесткими и могут совершать колебания только вдоль оси Oy уравнения их движения запишем в рамках одномассовой модели, т.е. как:

$$m_1\ddot{y}_1 + n_1 y_1 = N_1, \qquad (1)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + n_2 y_2 = N_2 .$$

Здесь m_1, m_2 массы стенок; n_1, n_2 коэффициенты жесткости упругого закрепления стенок; N_1 сила, действующая на внешнюю стенку; N_1 сила, действующая на внутреннюю стенку; $y_1 = y_{1m} f_1(\omega t)$, $y_2 = y_{2m} f_2(\omega t)$ законы колебаний стенок, y_{1m}, y_{2m} амплитуды колебаний стенок. При этом далее полагаем, что y_{1m} и y_{2m} одного порядка, т.е. $y_{1m}/y_{2m} = O(1)$ и $y_{1m} << \delta$, $y_{2m} << \delta$.

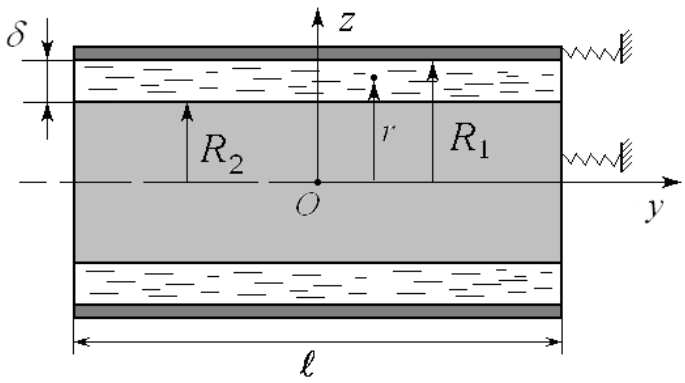

Рис. 1. Узкий кольцевой канал с упругозакрепленными стенками

Возмущающие силы, действующие на наружную и внутреннюю стенки канала, определяются выражениями:

$$N_1 = 2\pi R_2 (1+\delta/R_2) \int_{-\ell/2}^{\ell/2} q_{ry}\Big|_{r=R_1=R_2+\delta} dy, \quad q_{ry}\Big|_{r=R_1} = \rho\nu\left(\frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial y}\right)\Bigg|_{r=R_1=R_2+\delta}, \qquad (2)$$

$$N_2 = 2\pi R_2 \int_{-\ell/2}^{\ell/2} q_{ry}\Big|_{r=R_2} dy, \quad q_{ry}\Big|_{r=R_2} = \rho\nu\left(\frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial y}\right)\Bigg|_{r=R_2} .$$

Здесь q_{ry} касательное напряжение вязкой жидкости.

Принимая во внимание узость кольцевой щели, образованной цилиндрами, будем рассматривать движение вязкой жидкости в ней как ползущее [43]. В этом случае уравнения динамики вязкой жидкости в щели для осесимметричной задачи имеют вид:

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_y \frac{\partial V_r}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial y^2} - \frac{V_r}{r^2}\right), \qquad (3)$$

$$V_r \frac{\partial V_y}{\partial r} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial V_y}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0,$$

где V_y, V_r проекции скорости движения жидкости, ρ плотность жидкости, ν кинематический коэффициент вязкости, p давление.

Уравнения (3) дополним граничными условиями уравнений, в качестве которых выступают условия прилипания жидкости к стенкам канала и условия для давления на краях канала:

$$V_r = 0,\ V_y = dy_1/dt\text{, при } r = R_2 + \delta,\ V_r = 0, V_y = dy_1/dt\text{, при } r = R_2, \qquad (4)$$

$$p = p_0 + p^*(\omega t) \text{ при } y = -\ell,\quad p = p_0 \text{ при } y = \ell.$$

Закон пульсации давления на левом краю канала будем считать заданным в виде:

$$p^*(\omega t) = p_m f_p(\omega t),\ f_p(\omega t) = \sin \omega t, \qquad (5)$$

где p_m амплитуда пульсации.

3. Введем безразмерные переменные и малые параметры:

$$\xi = (r - R_2)/\delta,\ \zeta = 2y/\ell,\quad \tau = \omega t,\ \lambda = y_{2m}/\delta << 1, \psi = \delta/R_2 << 1,\ V_r = y_{2m}\omega\psi U_\xi, \qquad (6)$$

$$V_y = y_{2m}\omega\sigma U_\zeta,\ p = p_0 + \rho\nu\lambda\omega\psi^{-1}P,\ \sigma = \ell/(2R_2),\ p^* = \rho\nu\lambda\omega\psi^{-1}P^*,$$

где ψ, λ малые параметры.

Вставляя (6) в уравнения (3), (4), мы получим, в нулевом приближении по малым параметрам ψ, λ, следующую безразмерную задачу динамики кольцевого слоя вязкой жидкости

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0,\quad \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2},\ \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \qquad (7)$$

$$U_\xi = 0,\ U_\zeta = \frac{1}{\sigma}\frac{y_{1m}}{y_{2m}}\frac{df_1}{dt} \text{ при } \xi = 1,\ U_\xi = 0, U_\zeta = \frac{1}{\sigma}\frac{df_2}{d\tau} \text{ при } \xi = 0, \qquad (8)$$

$$P = P^* \text{ при } \zeta = -1,\ P = 0 \text{ при } \zeta = 1.$$

Решая уравнения (7) с граничными условиями (8) получили:

$$U_\zeta = \frac{\xi}{\sigma}\left(\frac{y_{1m}}{y_{2m}}\frac{df_1}{d\tau} - \frac{df_2}{d\tau}\right) + \frac{1}{\sigma}\frac{df_2}{d\tau} - P^*\frac{\xi^2 - \xi}{4\sigma^2},\ U_\xi \equiv 0,\ P = \frac{1}{2}\left[P^* - \zeta P^*\right]. \qquad (9)$$

В нулевом приближении по малому параметру ψ выражения для возмущающих сил (5) с учетом (6) принимают форму

$$N_1 = \pi R_2 \ell \frac{\rho\nu y_{2m}\omega\sigma}{\delta}\int_{-1}^{1}\frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=1} d\zeta = \pi R_2\left(\frac{2\ell\rho\nu}{\delta}\left(y_{1m}\omega\frac{df_1}{d\tau} - y_{2m}\omega\frac{df_2}{d\tau}\right) - \delta p^*\right), \qquad (10)$$

$$N_2 = \pi R_2 \ell \frac{\rho\nu y_{2m}\omega\sigma}{\delta}\int_{-1}^{1}\frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} d\zeta = \pi R_2\left(\frac{2\ell\rho\nu}{\delta}\left(y_{1m}\omega\frac{df_1}{d\tau} - y_{2m}\omega\frac{df_2}{d\tau}\right) + \delta p^*\right).$$

Подставляя (10) в (4) получили:

$$m_1\ddot{y}_1 - K\dot{y}_1 + K\dot{y}_2 + n_1 y_1 = -p^*\pi R_2\delta, \qquad (11)$$

$$m_2\ddot{y}_2 - K\dot{y}_1 + K\dot{y}_2 + n_2 y_2 = p^* \pi R_2 \delta ,$$

где $K = 2\pi R_2 \nu\rho/\delta$.

Рассмотрим режим установившихся гармонических колебаний. В этом случае система обыкновенных дифференциальных уравнений (11) преобразуется в систему алгебраических уравнений. Решая эту систему находим, что:

$$y_1 = \frac{p_m \pi R_2 \delta}{n_1} A_1(\omega)\sin(\omega t + \varphi_1(\omega)), \qquad (12)$$

$$y_2 = \frac{p_m \pi R_2 \delta}{n_2} A_2(\omega)\sin(\omega t + \varphi_2(\omega)),$$

где обозначено:

$$A_1(\omega) = n_1\sqrt{\frac{(n_2 - m_2\omega^2)^2 + (2K\omega)^2}{((n_1 - m_1\omega^2)(n_2 - m_2\omega^2))^2 + (K\omega(n_2 - n_1 + \omega^2(m_1 - m_2)))^2}},$$

$$A_2(\omega) = n_2\sqrt{\frac{(n_1 - m_1\omega^2)^2 + (2K\omega)^2}{((n_1 - m_1\omega^2)(n_2 - m_2\omega^2))^2 + (K\omega(n_2 - n_1 + \omega^2(m_1 - m_2)))^2}},$$

$$\varphi_1(\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{(n_2 - m_2\omega^2)K\omega(n_1 - n_2 + \omega^2(m_2 - m_1)) - 2K\omega(n_1 - m_1\omega^2)(n_2 - m_2\omega^2)}{(n_2 - m_2\omega^2)(n_1 - m_1\omega^2)(n_2 - m_2\omega^2) + 2(K\omega)^2(n_1 - n_2 + \omega^2(m_2 - m_1))}\right),$$

$$\varphi_2(\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{(m_1\omega^2 - n_1)K\omega(n_1 - n_2 + \omega^2(m_2 - m_1)) - 2K\omega(n_1 - m_1\omega^2)(n_2 - m_2\omega^2)}{(m_1\omega^2 - n_1)(n_1 - m_1\omega^2)(n_2 - m_2\omega^2) + 2(K\omega)^2(n_1 - n_2 + \omega^2(m_2 - m_1))}\right).$$

Здесь $A_i(\omega)$ АЧХ i-ой стенки канала, $\varphi_i(\omega)$ ФЧХ i-ой стенки канала, $i = 1,2$.

Используя построенную модель, проведем моделирование поведения АЧХ стенок кольцевого канала со следующими параметрами: $\ell = 0{,}08$ м; $R_2/\ell = 3{,}125\cdot10^{-1}$; $R_1/\ell = 31{,}875\cdot10^{-2}$; $\delta_0/\ell = 6{,}25\cdot10^{-3}$; $m_1 = 0{,}6$ кг; $n_1 = 5\cdot10^5$ кг/с^2, $m_2 = 0{,}2$ кг; $n_2 = 2\cdot10^4$ кг/с^2. При расчетах были рассмотрены два варианта вязких жидкостей с параметрами: а) $\rho = 1{,}84\cdot10^3$ кг/м^2; $\nu = 2{,}5\cdot10^{-4}$ м^2/с (приборная жидкость); б) $\rho = 840\cdot10^3$ кг/м^2; $\nu = 2\cdot10^{-5}$ м^2/с (гидравлическое масло АМГ-10). Результаты вычислений представлены на рис. 2, рис. 3.

Проведенные расчеты по разработанной модели показали, взаимовлияние колебаний стенок канала друг на друга за счет вязкой жидкости в нем. Данный факт проявляется в наложении резонансных частот стенок на АЧХ каждой из них. В результате, на построенных АЧХ, наблюдается наличие двух резонансных частот колебаний каждой из стенок. Кроме того, вязкость жидкости обуславливает конечность амплитуд колебаний стенок на резонансных частотах. С увеличением вязкости наблюдается существенное падение амплитуд колебаний на собственной частоте колебания каждой из стенок.

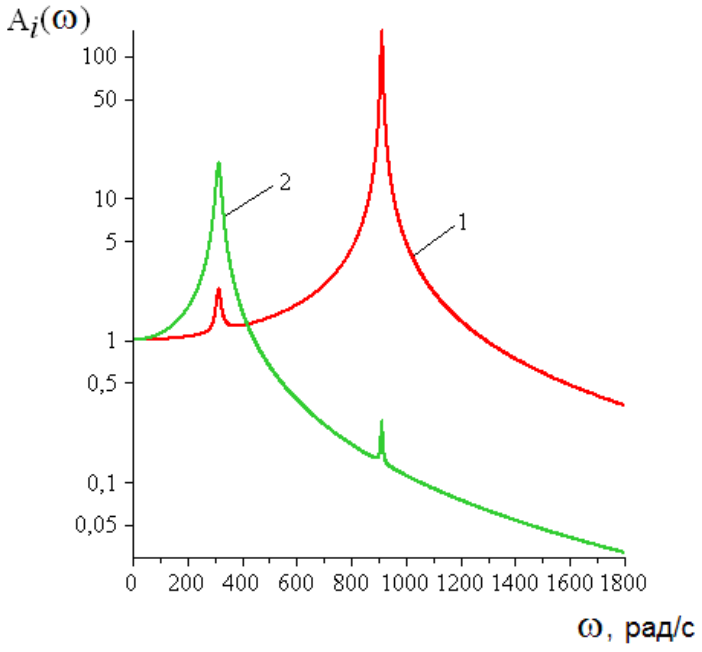

Рис. 2. АЧХ i-ой стенки канала для случая приборной жидкости:
1 – $A_1(\omega)$, 2 – $A_2(\omega)$

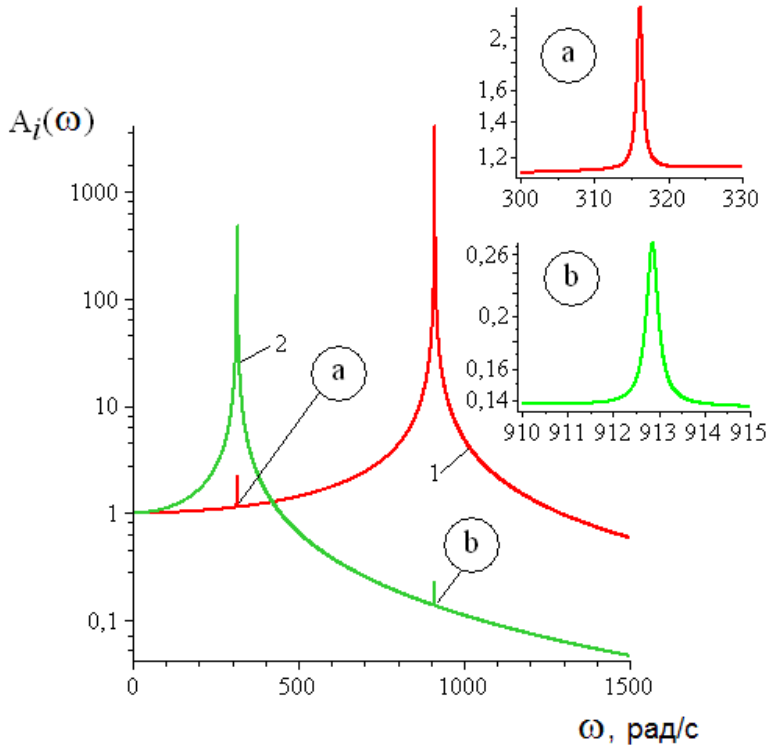

Рис.3. АЧХ i-ой стенки канала для случая гидравлического масла АМГ-10:
1 – $A_1(\omega)$, 2 – $A_2(\omega)$

Таким образом, представленная математическая модель может быть использована для исследования амплитуд продольных колебаний упругозакрепленных стенок узкого кольцевого канала, по которому движется пульсирующий поток вязкой жидкости. Полученные выражения для амплитудно-частотных характеристик стенок канала и характеристик фазового отклика позволяют определять резонансные частоты и амплитуды колебаний на них. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы для анализа причин возникновения продольных вибраций в элементах теплообменных систем, гидропривода, систем подачи топлива и смазки и др., вызванных пульсацией давления в вязкой жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант №19-01-00014а

Литература

1. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах. Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. 1952. С. 149 - 171.
2. Paidoussis M.P. Fluid-structure interactions: Slender structures and axial flow. Volume 1. London: Academic Press, 2013.
3. Агеев Р.В., Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия подвижных стенок плоского канала со сдавливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2009. Т. 4. № 1 (42). С. 7-13.
4. Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N., Kuznetsova E.L. Mathematical model of the plate on elastic foundation interacting with pulsating viscous liquid layer // Applied Mathematical Sciences. 2016. T. 10. № 23. C. 1101-1109.
5. Popov V.S., Popova A.A., Sokolova D. L. Mathematical modeling of longitudinal oscillations tapered narrow channel wall under pulsating pressure of highly viscous liquid // Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10(53). P. 2627-2635.
6. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и поперечные колебания упругозакрепленной стенки клиновидного канала, установленного на вибрирующем основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 3. С. 28-36.
7. Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N. Mathematical modeling of elastically fixed wall longitudinal oscillations of wedge-shaped channel under foundation vibration // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2016. T. 12. № 4. P. 9-17.
8. Önsay T Effects of layer thickness on the vibration response of a plate-fluid layer system // Journal of Sound and Vibration. 1993. Vol. 163(2). P. 231-259.
9. Faria C.T., Inman D.J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler-Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // Mechanical Systems and Signal Processing. 2014. Vol. 45(2). P. 317-329.

10. Akcabay D.T., Young Y.L. Hydroelastic response and energy harvesting potential of flexible piezoelectric beams in viscous flow // Physics of Fluids. 2012. Vol. 24(5).
11. Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. Dynamics of interaction of elastic elements of a vibrating machine with the compressed liquid layer lying between them // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2010. Vol. 39(4). P. 322-331.
12. Mogilevich L.I., Popov V.S. Investigation of the interaction between a viscous incompressible fluid layer and walls of a channel formed by coaxial vibrating discs // Fluid Dynamics. 2011. Vol. 46(3). P. 375-388.
13. Kuznetsova E.L., Mogilevich L.I., Popov V.S., Kulikov N.I., Ageev R.V. Mathematical model of movement of a pulsing layer of viscous liquid in the channel with an elastic wall resting on Winkler foundation // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. Т. 2018. № 3-4. С. 61-67.
14. Kurzin V.B. Streamwise vibrations of a plate in a viscous fluid flow in a channel, induced by forced transverse vibrations of the plate // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. Vol. 52 (3). P. 459-463.
15. Mogilevich L.I., Popova A.A., Popova E.V., Popov V.S., Christoforova A.V. Mathematical modeling of three-layer beam hydroelastic oscillations // Vibroengineering PROCEDIA. 2017. Vol. 12. P. 12-18. https://doi.org/10.21595/vp.2017.18462.
16. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Khristoforova A.V. Mathematical model of oscillations of a three-layered channel wall possessing a compressible core and interacting with a pulsating viscous liquid layer // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Приборостроение. 2019. № 6 (129). С. 4 - 18. DOI: 10.18698/0236-3933-2019-6-4-18.
17. Popov V.S., Mogilevich L.I., Grushenkova E.D. Hydroelastic response of three-layered plate interacting with pulsating viscous liquid layer // Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2019, pp. 459 - 467. DOI: 10.1007/978-3-319-95630-5_49.
18. Chernenko A., Mogilevich L., Popov V., Kondratov D., Popova E. Mathematical modeling of hydroelastic interaction between stamp and three-layered beam resting on winkler foundation // Studies in Systems, Decision and Control. 2019. Vol. 199. P. 671-681.
19. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=105618.
20. Womersley J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube-I: The linear approximation for long waves // Philosophical Magazine. 1955. Vol. 46. P. 199-221.

21. Kondratov D.V., Kondratova J.N., Mogilevich L.I. Oscillating laminar fluid flow in a cylindrical elastic pipe of annular cross-section // Fluid Dynamics. 2009. Vol. 44(4). P. 528-539.
22. Kondratov D.V., Kondratova J.N., Mogilevich L.I. Studies of the amplitude frequency characteristics of oscillations of the tube elastic walls of a circular profile during pulsed motion of a viscous fluid under the conditions of rigid jamming on the butt-ends // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2009. Vol. 38(3). P. 229-234.
23. Païdoussis M.P., Misra A.K., Chan S.P. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells conveying viscous fluid // ASME. J. Applied Mech. 1985. Vol. 52(2). P. 389-396.
24. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Stability Analysis of Loaded Coaxial Cylindrical Shells with Internal Fluid Flow // Mech. Solids. 2010. Vol. 45(6). P. 789-802.
25. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part III Steady viscous effects on shells conveying fluid // J. Fluids Struct. 2002. Vol. 16(6). P. 795-809.
26. Veklich N.A. Equation of Small Transverse Vibrations of an Elastic Pipeline Filled with a Transported Fluid // Mech. Solids. 2013. Vol. 48(6). P. 673-681.
27. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 5. С. 179 - 190.
28. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Колебания гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением под действием ударных нагрузок со стороны поршневой группы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 100-106.
29. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия поддерживающего слоя жидкости и упругого корпуса поплавка с технологическими ребрами жесткости в поплавковом гироскопе // Авиакосмическое приборостроение. 2004. № 11. С. 14-20.
30. Могилевич Л.И., Попов В.С. Возмущающие моменты в поплавковом гироскопе с упругим корпусом поплавка, имеющим технологические ребра жесткости, на вибрирующем основании // Авиакосмическое приборостроение. 2006. № 5. С. 6-12.
31. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64-72.
32. Попов В.С. Исследование динамики взаимодействия пульсирующего ламинарного потока жидкости с упругой цилиндрической оболочкой // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2007. № 1 (33). С. 72-80.

33. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Попов В.С., Плаксина И.В. Задачи гидроупругости для трубы кольцевого сечения с упругой, геометрически нерегулярной внешней оболочкой при воздействии давления // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. № 3. С. 70-76.
34. Попов В.С. Колебания ребристой оболочки, окруженной слоем вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Саратовского госагроуниверситета им. Н.И. Вавилова. 2003. № 4. С. 47-50.
35. Попов В.С., Попова А.А., Волов М.И. Математическое моделирование взаимодействия ламинарного пульсирующего потока с цилиндрической ребристой оболочкой, по которой он движется // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2010. № 1 (36). С. 51-66.
36. Mogilevich L.I., Popov V.S. Mathematical modeling of incompressible viscous liquid layer interaction dynamics in an annular slit with its wall, surrounded by elastic medium // IEEE Conference 2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Omsk, 2016). DOI: 10.1109/Dynamics.2016.7819051.
37. Mogilevich L.I., Popov V.S., Kondratov D.V., Rabinskiy L.N. Bending oscillations of a cylinder, surrounded by an elastic medium and containing a viscous liquid and an oscillator // Journal of Vibroengineering. 2017. T. 19. № 8. C. 5758-5766.
38. Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическое моделирование динамики взаимодействия слоя вязкой жидкости в кольцевой щели со стенкой, окруженной упругой средой // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. № 2. С. 346-350.
39. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Моделирование колебаний и волн в цилиндрической оболочке с вязкой несжимаемой жидкостью внутри нее // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 13-19.
40. Блинкова А.Ю., Ковалева И.А., Могилевич Л.И., Попов В.С. Распространение волн деформации в двух упругих цилиндрических оболочках, между которыми находится вязкая жидкость // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 7-12.
41. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Продольные волны в нелинейной цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=104003.
42. Panovko Y.G., Gubanova I.I. Stability and Oscillations of Elastic Systems. New York: Consultants Bureau Enterprises, Inc., 1965.
43. Lamb H. Hydrodynamics, 6th edition. New York: Dover Publications Inc., 1945.