Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/29-106
Ссылка для цитирования этой статьи:
Землянухин А.И., Бочкарев А.В., Ратушный А.В., Черненко А.В. Точные солитоноподобные решения четырехполевой решетки Блажака–Марсиньяка // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2020. №1. DOI: 10.24411/2541-9269-2020-10102
Выполнено при поддержке РФФИ грант № 20-01-00123а

УДК 517.929 DOI: 10.24411/2541-9269-2020-10102

ТОЧНЫЕ СОЛИТОНОПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЕВОЙ РЕШЕТКИ БЛАЖАКА – МАРСИНЬЯКА

Землянухин А.И.[1], Бочкарев А.В.[2], Ратушный А.В.[3], Черненко А.В.[4]
[1]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, zemlyanukhinai@sstu.ru
[2]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, ab2009sar@list.ru
[3]Саратовский государственный университет, Россия, Саратов, sania.ratushnyy@gmail.com
[4]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, 3chav@mail.ru

EXACT SOLITON-LIKE SOLUTIONS OF THE 4-FIELD BLASZAK-MARCINIAK LATTICE

Zemlyanukhin A.I.[1], Bochkarev A.V.[2], Ratushny A.V.[3], Chernenko A.V.[4]
[1]Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, zemlyanukhinai@sstu.ru
[2]Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, ab2009sar@list.ru
[3]Saratov state university, Russia, Saratov, sania.ratushnyy@gmail.com
[4]Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, 3chav@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена интегрируемая система нелинейных дифференциально-разностных уравнений, известная как четырехполевая решетка Блажака-Марсиньяка. При помощи метода геометрического ряда получены точные солитоноподобные решения системы.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, точные решения, метод геометрического ряда, решетка Блажака-Марсиньяка

Abstract. An integrable system of nonlinear differential-difference equations, known as the four-field Blaszak-Marciniac lattice, is considered. Using the geometric series method, exact soliton-like solutions of the system are obtained.

Keywords: differential-difference equations, exact solutions, geometric series method, Blaszak-Marciniak lattice

Многие физические процессы имеют дискретную природу и моделируются при помощи систем нелинейных дифференциально–разностных уравнений. Соответствующая аналитическая теория еще далека от завершенных форм, и точные решения удается построить лишь в простейших случаях. Чаще всего исследователь вынужден переходить от дискретной к континуальной модели, допускающей исследование аналитической структуры. Возникающие при этом интегрируемые и близкие к ним модели хорошо изучены, однако открытым остается вопрос об адекватности математического моделирования исходной дискретной системы. Таким образом, развитие методов построения точных решений систем нелинейных дифференциально–разностных уравнений является актуальной проблемой современной нелинейной математической физики.

Цель данной работы состоит в нахождении точных решений системы нелинейных дифференциально – разностных уравнений Блажака-Марсиньяка, впервые возникшей в [1]. Вопросам, связанным с приложениями решеточных моделей и нахождением их точных и приближенных решений, посвящены работы [2 – 9]. Мы будем использовать модификацию метода геометрического ряда [10], ранее предложенного авторами для нелинейных уравнений в частных производных.

Система дифференциально-разностных уравнений четырехполевой решетки Блажака-Марсиньяка

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}u_n = u_n\left(v_n - v_{n-1}\right), \\ &\frac{d}{dt}v_n = w_n u_{n+1} - u_n w_{n-1}, \\ &\frac{d}{dt}w_n = q_n u_{n+2} - u_n q_{n-1}, \\ &\frac{d}{dt}q_n = u_{n+3} - u_n, \end{aligned} \tag{1}$$

после введения переменной бегущей волны $z = dn + \omega t$ принимает вид

$$
\begin{aligned}
&-\omega\frac{d}{dz}u(z)+u(z)\left[v(z)-v(z-d)\right]=0,\\
&-\omega\frac{d}{dz}v(z)+w(z)u(z+d)-u(z)w(z-d)=0,\\
&-\omega\frac{d}{dz}w(z)+q(z)u(z+2d)-u(z)q(z-d)=0,\\
&-\omega\frac{d}{dz}q(z)+u(z+3d)-u(z)=0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Решение системы (2), в соответствии с методом геометрического ряда [11], будем отыскивать в форме рядов по степеням экспоненциальной функции независимой переменной

$$
u(z)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k\mathrm{e}^{kz},\quad v(z)=\sum_{k=0}^{\infty}V_k\mathrm{e}^{kz},\quad w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}W_k\mathrm{e}^{kz},\quad q(z)=\sum_{k=0}^{\infty}Q_k\mathrm{e}^{kz},\tag{3}
$$

где U_k, V_k, W_k, Q_k – неизвестные коэффициенты. Тогда сдвиговые значения зависимых переменных в (2) должны быть определены следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&u(z+d)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k\delta^k\mathrm{e}^{kz},\quad u(z+2d)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k\delta^{2k}\mathrm{e}^{kz},\quad u(z+3d)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k\delta^{3k}\mathrm{e}^{kz},\\
&v(z-d)=\sum_{k=0}^{\infty}V_k\delta^{-k}\mathrm{e}^{kz},\quad w(z-d)=\sum_{k=0}^{\infty}W_k\delta^{-k}\mathrm{e}^{kz},\quad q(z-d)=\sum_{k=0}^{\infty}Q_k\delta^{-k}\mathrm{e}^{kz},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $\delta=\mathrm{e}^d$. Подставляя (3) и (4) в (2), после группировки слагаемых по степеням функции e^z, в первом порядке получаем

$$
\begin{aligned}
&(\delta-1)U_0V_1-\delta\omega U_1=0,\\
&\delta^2U_1W_0+\delta\left(U_0W_1-U_1W_0-\omega V_1\right)-U_0W_1=0,\\
&\delta^3U_1Q_0+\delta\left(Q_1U_0-Q_0U_1-\omega W_1\right)-Q_1U_0=0,\\
&\delta^3U_1-\omega Q_1-U_1=0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
&\omega=\frac{U_1\left(\delta^3-1\right)}{Q_1},\quad Q_0=-\frac{\left(Q_1U_1-V_1W_1\right)\left(\delta^2+\delta+1\right)}{Q_1V_1(\delta+1)},\\
&U_0=\frac{U_1^2\delta\left(\delta^2+\delta+1\right)}{Q_1V_1},\quad W_0=-\frac{\left(U_1W_1-V_1^2\right)\left(\delta^2+\delta+1\right)}{Q_1V_1}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Приравнивая нулю коэффициенты при e^{2z}, получим систему линейных уравнений для определения U_2, V_2, W_2, Q_2, решение которой

$$U_2 = -\frac{2Q_1V_1}{\left(\delta^2+\delta+1\right)\left(\delta-1\right)^2},\quad V_2 = -\frac{Q_1V_1^2\left(\delta+1\right)}{U_1\left(\delta^4-\delta^3-\delta+1\right)},$$
$$W_2 = -\frac{Q_1V_1W_1\left(\delta^2+1\right)}{U_1\left(\delta^2+\delta+1\right)\left(\delta-1\right)^2},\quad Q_2 = -\frac{Q_1^2V_1\left(\delta^3+1\right)}{U_1\left(\delta^2+\delta+1\right)\left(\delta-1\right)^2}. \tag{7}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при e^{3z}, аналогично определим U_3, V_3, W_3, Q_3

$$U_3 = \frac{3Q_1^2V_1^2}{U_1\left(\delta^2+\delta+1\right)^2\left(\delta-1\right)^4},\quad V_3 = \frac{Q_1^2V_1^3}{U_1^2\left(\delta^2+\delta+1\right)\left(\delta-1\right)^4},$$
$$W_3 = \frac{Q_1^2V_1^2W_1\left(\delta^2-\delta+1\right)}{U_1^2\left(\delta^2+\delta+1\right)\left(\delta-1\right)^4},\quad Q_3 = \frac{Q_1^3V_1^2\left(\delta^6+\delta^3+1\right)}{U_1^2\left(\delta^2+\delta+1\right)^2\left(\delta-1\right)^4}. \tag{8}$$

и так далее. Вычислив таким образом 5-6 первых членов рядов (3), заменой $\mathrm{e}^z = Z$ преобразуем эти ряды в степенные по переменной Z. В методе геометрического ряда в качестве критерия геометричности используется совпадение последовательных диагональных аппроксимант Паде $\left[N/N\right]$, вычисленных для рассматриваемого степенного ряда, при этом совпадающие аппроксиманты дают точную сумму ряда. Вычисления аппроксимант Паде с помощью системы компьютерной математики Maple показывают, что для каждого из рядов (3) выполняется.

$$\left[1/1\right] \neq \left[2/2\right] = \left[3/3\right]. \tag{9}$$

Строго говоря, доказательством геометричности ряда в отсутствие выражения для его общего члена может являться бесконечная цепочка равенств $\left[N/N\right] = \left[N+1/N+1\right]$, $N \to \infty$ [12]. Не вычисляя старшие аппроксиманты $\left[4/4\right]$, $\left[5/5\right]$ и так далее, предположим на основе (9), что ряды (3) являются геометрическими и их суммы определяются соответствующими $\left[2/2\right]$ – аппроксимантами. Выполняя в последних обратную замену $Z = \mathrm{e}^z$, получим

$$\hat{u}(z) = \frac{U_1^2\delta\varphi}{Q_1V_1} + \frac{U_1^3\varphi^2\left(\delta-1\right)^4\mathrm{e}^z}{\left(U_1\psi+Q_1V_1\mathrm{e}^z\right)^2},$$
$$\hat{v}(z) = V_0 + \frac{U_1^2V_1\varphi^2\left(\delta-1\right)^4\mathrm{e}^z}{\left(U_1\psi+Q_1V_1\mathrm{e}^z\right)\left(U_1\psi+Q_1V_1\delta\mathrm{e}^z\right)},$$
$$\hat{w}(z) = -\frac{\left(U_1W_1-V_1^2\right)\varphi}{Q_1V_1} + \frac{U_1^2W_1\varphi^2\left(\delta-1\right)^4\mathrm{e}^z}{\left(U_1\psi+Q_1V_1\mathrm{e}^z\right)\left(U_1\psi+Q_1V_1\delta^2\mathrm{e}^z\right)}, \tag{10}$$
$$\hat{q}(z) = -\frac{\left(Q_1U_1-V_1W_1\right)\varphi}{Q_1V_1\left(\delta+1\right)} + \frac{U_1^2Q_1\varphi^2\left(\delta-1\right)^4\mathrm{e}^z}{\left(U_1\psi+Q_1V_1\mathrm{e}^z\right)\left(U_1\psi+Q_1V_1\delta^3\mathrm{e}^z\right)}.$$

где $\varphi = \delta^2 + \delta + 1$, $\psi = \delta^4 - \delta^3 - \delta + 1$.
Подстановка в уравнения системы (2) выражений для $\hat{u}(z), \hat{v}(z), \hat{w}(z), \hat{q}(z)$ вместо соответствующих зависимых переменных $u(z), v(z), w(z), q(z)$ обращает уравнения (2) в тождества. Следовательно, (10) является точным решением системы (2) и после замены $z = \ln(\delta)n + \omega t$, где ω определяется из (6), становится точным решением исходной системы (1). При условии $\delta \neq 0$ имеем $\psi > 0$ и решение (10) является ограниченным и определяет солитоноподобные бегущие волны, если выполняется неравенство $U_1 V_1 Q_1 > 0$ (рис. 1).

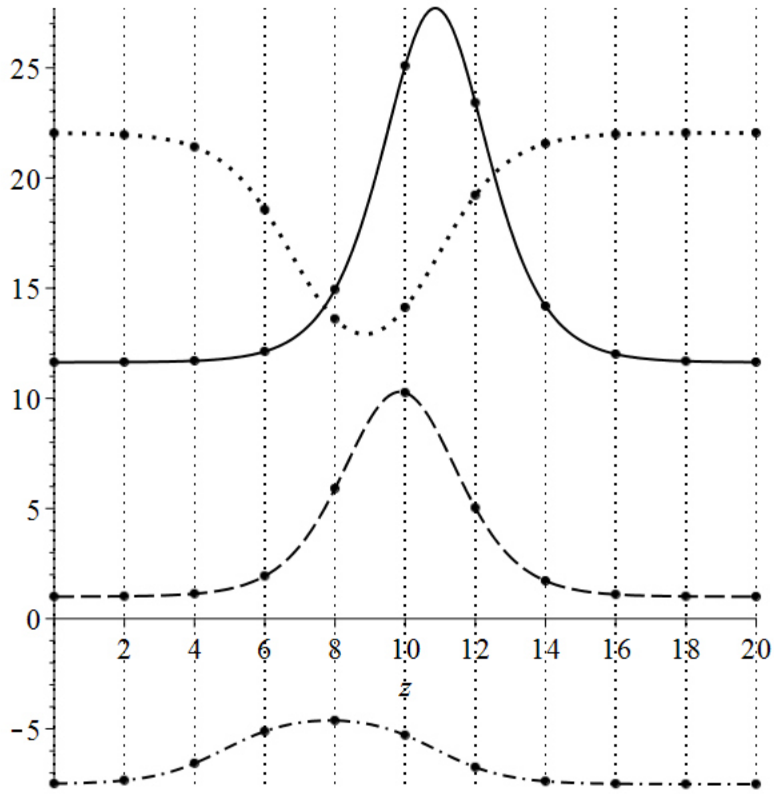

Рис. 1. Графики решения (10) при $V_0 = 1, U_1 = \dfrac{1}{2}, V_1 = 1, W_1 = -5, Q_1 = 10, \delta = \mathrm{e}^2$, $z \to z - 6$. Сплошная линия обозначает $u(z)$, пунктирная – $v(z)$, точечная – $v(z)$, штрихпунктирная – $q(z)$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00123а

Литература

1. Blaszak M., Marciniak K. R ‑ matrix approach to lattice integrable systems // Journal of Mathematical Physics. 1994. V. 35. P. 4661.
2. Ху С. Б., Вонг Д. Л., Там Х.-В. Интегрируемые обобщения решетки Блажака–Марсиньяка и еще одной решетки и соответствующие им пары Лакса // Теоретическая и математическая физика. 2001. Т. 127(3). С. 388–393.
3. Wu Y. T., Hu X. B. A new integrable differential-difference system and its explicit solutions // J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 1515.
4. Hirota R. Direct methods in soliton theory / Solitons, eds. R. K. Bullough, P. J. Caudrey. Berlin: Springer, 1980, p. 157.
5. Hirota R., Satsuma J. A variety of nonlinear network equations generated from the Bäcklund transformation for the Toda lattice // Prog. Theor. Phys. Suppl. 1976. V. 59. P. 64–100.
6. Matsuno Y. Bilinear Transformation Method. New York: Acad. Press, 1984.
7. Nimmo J. J. C. Hirota's method / Soliton Theory: A Survey of Results, ed. A. P. Fordy. Manchester: Manchester Univ. Press, 1990, p. 75.
8. Hu X. B., Wu Y. T. Application of the Hirota bilinear formalism to a new integrable differential-difference equation // Phys. Lett. A. 1998. V. 246. P. 523–529.
9. Wolfram S. The Mathematica Book. Cambridge: Cambridge University Press & Wolfram Media, 1999.
10. Zemlyanukhin A., Bochkarev A. Exact solutions and numerical simulation of the discrete Sawada–Kotera equation // Symmetry. 2020. V. 12(1), P. 131. https://doi.org/10.3390/sym12010131
11. Бочкарев А.В., Землянухин А.И. Метод геометрического ряда построения точных решений нелинейных эволюционных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 7, с. 1113–1125. https://doi.org/10.7868/S0044466917070079
12. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. Continued fractions, the perturbation method and exact solutions to nonlinear evolution equations // Izvestiya VUZ. Appl. Nonlin. Dyn. 2016. V. 24. P. 71–85. http://dx.doi.org/10.18500/0869-6632-2016-24-4-71-85