Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/29-107
Ссылка для цитирования этой статьи:
Ивахненко Н.Н., Бадекин М.Ю. Изучение свойств системы с защитой повышенной надежности применительно к процессу восстановления Пуассона // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2020. №1.
DOI: 10.24411/2541-9269-2020-10103

УДК 532.517.2:539.3 DOI: 10.24411/2541-9269-2020-10103

ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ С ЗАЩИТОЙ ПОВЫШЕННОЙ НАДЕЖНОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПРОЦЕССУ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПУАССОНА

Ивахненко Н.Н.[1], Бадекин М.Ю.[2]
[1]Донецкий национальный университет экономики и торговли им. Михаила Туган-Барановского (ДонНУЭТ), ДНР, Донецк, yulduz19.77@mail.ru
[2]Донецкий национальный университет экономики и торговли им. Михаила Туган-Барановского (ДонНУЭТ), ДНР, Донецк, korund2002@list.ru

STUDYING PROPERTIES OF THE SYSTEM WITH PROTECTION OF INCREASED RELIABILITY APPLIED TO THE PROCESS OF RESTORING POISSON

Ivakhnenko N.N.[1], Badekin M.Yu.[2]
[1]Donetsk National University of Economics and Trade named. Mikhail Tugan-Baranovsky (DonNUET), DNR, Donetsk, yulduz19.77@mail.ru
[2]Donetsk National University of Economics and Trade named. Mikhail Tugan-Baranovsky (DonNUET), DNR, korund2002@list.ru

Аннотация. Изучаются оценки свойств надежности системы с защитой повышенной надежности применительно к процессу восстановления Пуассона.

Ключевые слова: процесс восстановления, альтернативный процесс, система с защитой, теорема Ренье, полумарковский процесс

Abstract. Estimates of the reliability properties of a system with enhanced reliability protection as applied to the Poisson recovery process are studied.

Keywords: recovery process, alternative process, system with protection, Rainier theorem, semi-Markov process

1. Введение

В [1] приводятся равномерные оценки отклонения от функции показательного распределения решений интегрального уравнения:

ISSN 2541-9269

$$\Phi = \theta L + \left(1-\theta\right)\Phi * K \tag{1}$$

где L, K заданные функции распределения положительных случайных величин, $\theta \in \left(0,1\right)$, $*$ - свертка функций распределения $\Phi * K(t) = \int_0^t \Phi\left(t-x\right)dK(x)$.

Эти оценки можно использовать при исследовании характеристик надежности системы с защитой [2]. В работах [3, 4, 5] это делалось в общем виде. Целью данной работы является уточнение оценок этих характеристик и рассмотрение других в случае дополнительного предположения, что процесс восстановления является Пуассоновским. В частности, оценивается гарантированное время безотказной работы с заданной надежностью, приводятся оценки функции распределения промежутков между отказами и количества отказов.

2. *Основные условия и результаты*

Система с защитой [2] состоит из альтернативного процесса и независимого от него процесса восстановления. Отказ системы наступает в момент восстановления последнего, если в этот момент альтернативный процесс находится в фазе ремонта.

Считаем, что процесс восстановления будет Пуассоновский с параметром v. Будем обозначать $m(F)$, $m_2(F)$ математическое ожидание и второй начальный момент случайной величины с функцией распределения $F(t)$, соответственно.

Обозначим функции распределения фаз безотказной работы и ремонта альтернативного процесса G и B соответственно, где $\hat{\beta}\left(s\right) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}dB(x)$, показательная функцию распределения $E_a(t) = 1 - e^{-at}, t \geq 0$.

Назовем t_0 гарантированным временем безотказной работы системы с защитой и надежностью γ, если вероятность того, что система не откажет к моменту времени t_0, будет не меньше γ.

Теорема 2.1. Гарантированное время безотказной работы системы с защитой и надежностью γ не меньше $T \ln\dfrac{1-\theta}{\gamma + 2\theta\chi}$, где $T = \dfrac{\hat{\beta}\left(v\right)m\left(G\right)}{1-\beta\left(v\right)}$, $\theta = 1 - \hat{\beta}(v)$,

$$A(t) = \frac{1}{\hat{\beta}(v)}\int_0^t e^{-vx}dB(x),\ K(t) = G * A(t),$$

$$m(A)=\frac{1}{\hat{\beta}(v)}\int_0^{+\infty} xe^{-vx}dB(x)\le m(B),$$

$$\chi=\frac{m_2(K)}{2m^2(K)}=\frac{m_2(G)+2m(G)m(A)+m_2(A)}{2\big(m(G)+m(A)\big)^2}$$

причем $m_2(A)\le m_2(B)$

Функцию распределения времени безотказной работы системы с защитой обозначим $\Phi_1(x)$, если в начальный момент времени началась фаза ремонта альтернативного процесса, и $\Psi_1(x)$, если в начальный момент времени началась фаза безотказной работы.

Теорема 2.2. Для функции распределения времени безотказной работы системы с защитой при различных начальных условиях выполняются неравенства:

$$E_q(x)-qm(L)-2\chi\int_0^x\big(1-B(y)\big)ve^{-vy}dy\le\Phi_1(x);$$

$$\Phi_1(x)\le\big(1-\theta\big)E_q(x)+(1+2\chi)\int_0^x\big(1-B(y)\big)ve^{-vy}dy$$

$$\Psi_1(x)\le\big(1-\theta\big)E_q(x)+\theta\big(1+2\chi\big)G(x);$$

$$\Psi_1(x)\ge E_q(x)-q\left(m(L)+\int_0^x\big(1-G(y)\big)dy\right)-2\chi\theta G(x),$$

где $r=\dfrac{\theta}{1-\theta}$, $q=\dfrac{T}{m(G)+m(A)}\le\dfrac{T}{m(G)}=\dfrac{1}{T}$, $m(L)=\dfrac{1}{\theta}\displaystyle\int_0^{+\infty}x(1-B(x))dE_v(x)\le\dfrac{1}{v}$

Теорема 2.3. Если в начальный момент времени началась фаза безотказной работы альтернативного процесса, то для распределения количества отказов системы с защитой ξ выполняется неравенство:

$$P(\xi\ge n)\le\theta+\big(1-\theta\big)\overline{p}_n\big(t\big)+2\chi\theta\min\{n,1+qt\},$$

где

$$\overline{p}_{n+1}(t)=\left(1-\sum_{k=1}^{n}\tau_k\right)E_q(t)+\sum_{k=1}^{n}\tau_k\left(1-\sum_{i=1}^{n-k}\tau_i\right)E_q^{*2}(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k\sum_{i=1}^{n-k}\tau_i\left(1-\sum_{j=1}^{n-k-i}\tau_j\right)E_q^{*3}(t)+\dots$$

$$\dots+\left(\tau_1^{n-1}(1-\tau_1)+(n-1)\tau_1^{n-2}\tau_2\right)E_q^{*n}(t)+\tau_1^{n}E_q^{*(n+1)}(t),\ \ n\ge 0;$$

$$\theta_n=\int_0^{+\infty}\frac{(vx)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-vx}dB(x)=\int_0^{+\infty}\left(E_v^{*(n-1)}(x)-E_v^{*n}(x)\right)dB(x),\ \ n\ge 1;$$

$$\tau_k=\frac{\theta_{k+1}}{\theta},\quad k\ge 1;$$

в частности:

$$P(\xi\ge 1)=\Psi_1(t)\le\theta+(1-\theta)E_q(t)+2\chi\theta;$$
$$P(\xi\ge 2)\le\theta+(1-\theta)\left(\frac{\theta_2}{\theta}E_q^{*2}(t)+\frac{\theta-\theta_2}{\theta}E_q(t)\right)+2\chi\theta\left(1+E_q(t)\right).$$

Замечание 2.1. Распределение $p_n(t)=\overline{p}_n(t)-\overline{p}_{n+1}(t), n\ge 1, p_0(t)=1-\overline{p}_1(t)$ является распределением количества событий стационарного потока без последействия на промежутке времени $(0,t)$ и имеет образующую функцию $\sum_{n=0}^{\infty}p_n(t)x^n=e^{qt(\omega(x)-1)}$, где $\omega(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta_{n+1}}{\theta}x^n$ [7, с. 42]

Замечание 2.2. Если в начальный момент времени началась фаза ремонта альтернативного процесса, то среднее время безотказной работы системы с защитой равно $T+\frac{1}{v}$, а если фаза закончилась, то $T+\frac{1}{v}+\frac{1}{m(G)}$

Доказательство теоремы 2.1. Если в начальный момент времени началась фаза ремонта альтернативного процесса, то функция распределения времени безотказной работы системы с защитой $\Phi_1(t)$ является решением уравнения (1) с $K(t)=G*A(t)$, где:

$$A(t)=\frac{1}{\hat{\beta}(v)}\int_0^t e^{-vx}dB(x)\ ,\ L(t)=\frac{1}{\theta}\int_0^t\left(1-B(x)\right)dE_v(x).$$

Обозначим $\Phi(t)$ решение уравнения (1) с $L(t)=K(t)$, для которого, согласно [1], выполняются равномерные оценки:

$$\left|\Phi(t)-E_q(t)\right|\le 2r\chi \tag{2}$$

Функция $\Phi_1(t)$ подается через $\Phi(t)$ формулой:

$$\Phi_1(t)=L*\left(\theta+(1-\theta)\Phi(t)\right) \tag{3}$$

Из (2), (3) получаем:

$$\Psi_1(t)\le\Phi_1(t)\le(1-\theta)E_q(t)+\theta(1+2\chi) \tag{4}$$

Если приравнять правую часть этой неравенства к $1-\gamma$, то можно выразить гарантированное время безотказной работы.

Неравенства $m(A)\le m(B), m_2(A)\le m_2(B)$ вытекают из того, что при всех $t>0$, $A(t)\ge B(t)$, что, в свою очередь, получается из леммы .

Лемма 3.1. Пусть $V(t)$ - положительная монотонная функция, $F(t)$ - функция распределения положительной случайной величины, $\theta=\int\limits_0^\infty V(x)dF(x), L(t)=\frac{1}{\theta}\int\limits_0^t V(x)F(x)$. Тогда, если $V(t)$ неубывающая, то при всех $t>0$ выполняется неравенство $L(t)\le F(t)$, а если $V(t)$ - невозрастающая, то неравенство $F(t)\le L(t)$.

Доказательство леммы 3.1. Если $V(t)$ - неубывающая, то функция $F-L$ возрастает от 0, пока $V(x)<\theta$, а потом убывает до 0 на бесконечности. Поэтому она - положительная. Аналогично рассматривается случай невозрастающей $V(t)$.

Лемму 3.1 доказано □

Теорему 2.1. доказано □

Доказательство теоремы 2.2. Верхние оценки получены в (4), а для получения нижних используется такое утверждение:

Лемма 3.2. $E_q*L(t)\ge E_q(t)-q\int\limits_0^t\left(1-L(x)\right)dx$

ISSN 2541-9269

Доказательство

$$E_q*(1-L(t))=q\int_0^t\left(1-L(t-x)\right)e^{-qx}dx\le q\int_0^t\left(1-L(t-x)\right)dx=q\int_0^t(1-L(x))dx$$

Лемму 3.2 доказано □

Теорему 2.2. доказано □

Доказательство теоремы 2.3. Функции $P(\xi\ge n)=\Psi_n(t)$ являются минимальными решениями уравнения типа восстановления:

$$\Psi_n(t)=\sum_{k=2}^{n}\theta_k A_k*G*\Psi_{n+1-k}(t)+\left(\theta-\sum_{k=2}^{n}\theta_k\right)L_n*G(t)+\left(1-\theta\right)A*G*\Psi_n(t).$$

Так как $\dfrac{(vx)^{n-1}}{(n-1)!}$ - возрастающая функция, то, по лемме 3.1, при всех $t>0$ выполняется неравенство $A_k(t)\le A(t)$, поэтому:

$$\begin{aligned}\Psi_n(t)&\le\sum_{k=2}^{n}\frac{\theta_k}{\theta}\Phi*\Psi_{n+1-k}(t)+\left(\theta-\sum_{k=2}^{n}\theta_k\right)\left(1+\frac{1-\theta}{\theta}\Phi(t)\right)=\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k\Phi*\Psi_{n-k}(t)+\left(1-\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k\right)\left(\theta+(1-\theta)\Phi(t)\right),\end{aligned}\tag{5}$$

где $\Phi(t)$ - решение уравнения (1) из $L(t)=K(t)$

Заметим, что $\overline{p}_n(t)$ удовлетворяет рекуррентное соотношение:

$$\overline{p}_n(t)=\left(1-\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k\right)E_q(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k\overline{p}_{n-k}*E_q(t)\tag{6}$$

Методом математической индукции при $n\ge1$ докажем неравенство:

$$\Psi_n(t) \le \theta + (1-\theta)\,\overline{p}_n(t) + 2\chi\theta\Bigg(1 + \sum_{k=1}^{n-1}\tau_k E_q(t) + \sum_{k=1}^{n-2}\tau_k \sum_{i=1}^{n-1-k}\tau_i E_q^{*2}(t) + \\ + \sum_{k=1}^{n-3}\tau_k \sum_{i=1}^{n-2-k}\tau_i \sum_{j=1}^{n-1-k-i}\tau_j E_q^{*3}(t) + \ldots \\ \ldots + \left(\tau_1^{n-2} + (n-2)\tau_1^{n-3}\tau_2\right)E_q^{*(n-2)}(t) + \tau_1^{n-1}E_q^{*(n-1)}(t)\Bigg) \qquad (7)$$

Доказательство неравенства (7). При $n=1$ неравенство (7) следует из (4). Заменим в (7) n на $n-k$ и свернем с $\Phi(t)$. Учитывая, что согласно (2),

$$(1-\theta)\,\overline{p}_{n-k} * \Phi(t) \le (1-\theta)\,\overline{p}_{n-k} * E_q(t) + 2\chi\theta\overline{p}_{n-k}(t),$$

а в других слагаемых $\Phi(t) \le 1$, получим:

$$\Psi_{n-k} * \Phi(t) \le \theta + (1-\theta)\,\overline{p}_{n-k} * E_q(t) + 2\chi\theta\Big(1 + \overline{p}_{n-k}(t) + \sum_{i=1}^{n-k-1}\tau_i E_q(t) + \\ + \sum_{i=1}^{n-k-2}\tau_i \sum_{j=1}^{n-k-1-i}\tau_j E_q^{*2}(t) + \ldots \\ \ldots + \left(\tau_1^{n-k-2} + (n-k-2)\tau_1^{n-k-3}\tau_2\right)E_q^{*(n-k-2)}(t) + \tau_1^{n-k-1}E_q^{*(n-k-1)}(t)\Big) = \\ = \theta + (1-\theta)\,\overline{p}_{n-k} * E_q(t) + 2\chi\theta\Big(1 + E_q(t) + \sum_{i=1}^{n-k-1}\tau_i E_q^{*2}(t) + \\ + \sum_{i=1}^{n-k-2}\tau_i \sum_{j=1}^{n-k-1-i}\tau_j E_q^{*3}(t) + \ldots \\ \ldots + \left(\tau_1^{n-k-2} + (n-k-2)\tau_1^{n-k-3}\tau_2\right)E_q^{*(n-k-1)}(t) + \tau_1^{n-k-1}E_q^{*(n-k)}(t)\Big). \qquad (8)$$

Подставим (8) в правую часть (5) вместе с неравенством, которое получается из (2):

$$\theta + (1-\theta)\Phi(t) \le \theta(1+2\chi) + (1-\theta)E_q(t)$$

Использовав (6), получим (7).

Неравенство (7) доказано □

Поскольку все суммы в (7) не превышают 1, то:

$$\Psi_n(t) \le \theta + (1-\theta)\,\overline{p}_n(t) + 2\chi\theta\left(1 + E_q(t) + E_q^{*2}(t) + \ldots + E_q^{*(n-1)}(t)\right),$$

откуда получаем результат теоремы 2.3, потому что все слагаемые в скобках не превышают 1, а $1 + E_q(t) + E_q^{*2}(t) + \ldots = 1 + qt$. □

Утверждение замечания 2.2 можно получить интегрированием (3) и (1).

Литература

1. Калашников В.В. Оценка скорости сходимости в теореме Реньи // Проблемы устойчивости стохастических моделей. 1983. С. 48-51
2. Адомиан Дж. Стохастические системы. М.: Мир, 1987. 376 с.
3. Мейер П.А. Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973. 334 с.
4. Drinea E., Enachescu M., Mitzenmacher M. Variations on random graph models for the web // Technical report, Harvard University, Department of Computer Science. 2001
5. Соловьев А.Д. Аналитические методы расчета и оценки надежности // Вопросы математической теории надежности. 1983. С. 9-112
6. Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Wiley. New York, 1966. 704 p.
7. Khinchin A.Ya. Warks on Mathemalical Queueing Theory. Fizmatgiz. Moscow, 1963