

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/29-108](http://mathmod.esrae.ru/29-108)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Могилевич Л.И., Блинков Ю.А., Иванов С.В. Распространение волны в двух соосных цилиндрических оболочках с вязкой жидкостью между ними с учетом инерции ее движения // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2020. №1. DOI: 10.24411/2541-9269-2020-10104

*Выполнено при поддержке гранта РФФИ 19-01-00014а*

УДК 539.3

DOI: 10.24411/2541-9269-2020-10104

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ В ДВУХ СООСНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ МЕЖДУ НИМИ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

Могилевич Л.И.<sup>1</sup>, Блинков Ю.А.<sup>2</sup>, Иванов С.В.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Саратовский государственный технический университет

имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, [mogilevichli@gmail.com](mailto:mogilevichli@gmail.com)

<sup>2</sup> Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
им. Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, [blinkovua@gmail.com](mailto:blinkovua@gmail.com)

<sup>3</sup> Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
им. Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, [evilgraywolf@gmail.com](mailto:evilgraywolf@gmail.com)

## WAVE PROPAGATION IN TWO COAXIAL CYLINDRICAL SHELLS WITH A VISCOUS LIQUID BETWEEN THEM, TAKING INTO ACCOUNT THE INERTIA OF ITS MOTION

Mogilevich L.I.<sup>1</sup>, Blinkov Yu.A.<sup>2</sup>, Ivanov S.V.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov,  
[mogilevichli@gmail.com](mailto:mogilevichli@gmail.com)

<sup>2</sup> Saratov State University, Russia, Saratov, [blinkovua@gmail.com](mailto:blinkovua@gmail.com)

<sup>3</sup> Saratov State University, Russia, Saratov, [evilgraywolf@gmail.com](mailto:evilgraywolf@gmail.com)

**Аннотация.** Статья посвящена изучению распространения продольных волн деформации в физически нелинейных упругих соосных оболочках с вязкой несжимаемой жидкостью между ними. Учитывается влияние инерции движения жидкости на скорость и амплитуду волны. Методы качественного анализа не позволяют изучать модели волн деформации в случае оболочки, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Следовательно возникает необходимость применения численных методов. При наличии волн, заданных в обеих оболочках результаты численного эксперимента совпадают с точным решением. В присутствии жидкости энергия передается между оболочками, что продемонстрировал вычислительный эксперимент при наличии волны во внешней оболочке и ее отсутствии во внутренней в начальный момент времени.

**Ключевые слова:** нелинейные волны, упругие цилиндрические оболочки, вязкая несжимаемая жидкость, разностная схема Кранка-Николсона

**Abstract.** The article is devoted to the study of the propagation of longitudinal deformation waves in physically nonlinear elastic coaxial shells with a viscous incompressible fluid between them. The effect of the inertia of fluid motion on the speed and amplitude of the wave is taken into account. Qualitative analysis methods do not allow studying deformation wave models in the case of a shell filled with a viscous incompressible fluid. Therefore, it becomes necessary to use numerical methods. In the presence of waves specified in both shells, the results of the numerical experiment coincide with the exact solution. In the presence of a liquid, energy is transferred between the shells, which was demonstrated by a computational experiment in the presence of a wave in the outer shell and its absence in the inner shell at the initial time.

**Keywords:** nonlinear waves, elastic cylindrical shells, viscous incompressible fluid, Crank-Nicolson difference scheme

Изучение волнового процесса в упругих оболочках широко используется в различных технических областях - например, для передачи информации на большие расстояния. Распространение нелинейных волн деформации в упругих и вязкоупругих оболочках рассмотрено в [1-5]. В этих работах случай взаимодействия оболочек с вязкой несжимаемой жидкостью не рассматривается. В [6,7] рассматривалось взаимодействие оболочки с вязкой несжимаемой жидкостью без учета волновых явлений. Волновые явления в квадратично нелинейной упругой оболочке с вязкой жидкостью внутри рассмотрены в [8] без учета влияния инерции движения жидкости.

В данной статье математические модели волнового процесса в бесконечно длинных физически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках получены методом возмущений по малому параметру задачи. Они отличаются от известных моделей тем, что учитывают наличие несжимаемой вязкой жидкости между оболочками на основе связанных задач гидроупругости. Эти проблемы описываются системой обобщенных модифицированных уравнений Кортевега-де Вриза (МКдВ). Выявлено влияние несжимаемой вязкой жидкости между оболочками на поведение волны деформации в соосных оболочках. Наличие волны деформации во внешней оболочке приводит к появлению волны деформации во внутренней оболочке, которой не было в начальный момент времени, и происходит «передача энергии» (через слой жидкости) от внешней оболочки к внутренней, что

сопровождается уменьшением амплитуды волны во внешней оболочке и, как следствие, уменьшением скорости ее распространения. Одновременно с этим увеличение амплитуды происходит во внутренней оболочке. Из-за изменения амплитуд и скоростей волн в оболочках их скорости и амплитуды с течением времени становятся равными.

Рассмотрим осесимметричные соосные цилиндрические оболочки с вязкой несжимаемой жидкостью между ними.

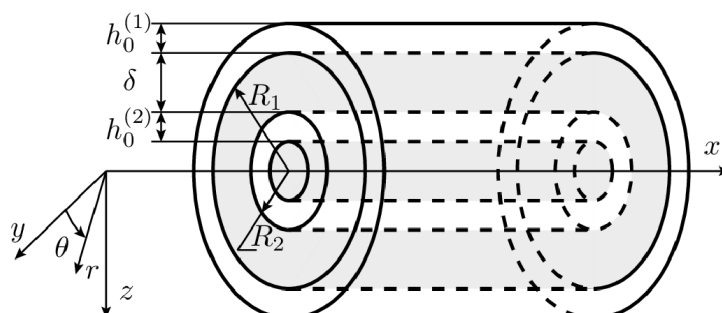


Рис. 1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки  
Обозначим:  $R_1$  - радиус внутренней поверхности внешней оболочки;  $R_2$  - радиус внешней поверхности внутренней оболочки;  $R^{(i)}$  - радиусы срединных поверхностей;  $h_0^{(i)}$  - толщина оболочки;  $U^{(i)}$  - продольное упругое смещение;  $W^{(i)}$  - прогиб, направленный к центру кривизны ( $i = 1$  для внешней оболочки,  $i = 2$  для внутренней).  $\delta$  - ширина щели, занимаемой жидкостью.

Теория деформации А. А. Ильюшина [9] связывает компоненты тензора напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_\Theta$  с компонентами тензора деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_\Theta$  и квадратом интенсивности деформации  $\varepsilon_u$  [10]

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(i)} &= \frac{E}{1-\mu_0^2} \left( \varepsilon_x^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_\Theta^{(i)} \right) \left( 1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^{(i)2} \right); \\ \sigma_\Theta^{(i)} &= \frac{E}{1-\mu_0^2} \left( \varepsilon_\Theta^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_x^{(i)} \right) \left( 1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^{(i)2} \right); \\ \varepsilon_u^{(i)2} &= \frac{4}{3} \left( \mu_1 \left( \varepsilon_x^{(i)2} + \varepsilon_\Theta^{(i)2} \right) - \mu_2 \varepsilon_x^{(i)} \varepsilon_\Theta^{(i)} \right), \\ \mu_1 &= \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{\mu_0(2\mu_0-1)}{(1-\mu_0)^2} \right]; \mu_2 = \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{2\mu_0(2\mu_0-1)}{(1-\mu_0)^2} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

где  $E$  - модуль Юнга;  $m$  - постоянная материала, определяемая из экспериментов на растяжение или сжатие;  $\mu_0$  - коэффициент Пуассона материала оболочки.

Запишем связь между компонентами деформаций и упругих смещений в виде [11]

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2}; \varepsilon_\Theta^{(i)} = -\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \quad (2)$$

где  $x$  - продольная координата в срединной поверхности;  $z$  - нормальная координата в оболочке  $\left(-\frac{h_0^{(i)}}{2} \leq z \leq \frac{h_0^{(i)}}{2}\right)$ . Определим силы в срединной

поверхности оболочки и момент по следующим формулам

$$N_x^{(i)} = \int_{\frac{h_0^{(i)}}{2}}^{\frac{h_0^{(i)}}{2}} \sigma_x^{(i)} dz; N_\Theta^{(i)} = \int_{\frac{h_0^{(i)}}{2}}^{\frac{h_0^{(i)}}{2}} \sigma_\Theta^{(i)} dz; M_x^{(i)} = \int_{\frac{h_0^{(i)}}{2}}^{\frac{h_0^{(i)}}{2}} \sigma_x^{(i)} z dz. \quad (3)$$

Уравнения динамики для оболочек записываются в виде

$$\frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - q_x^{(i)} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 M_x^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} N_x^{(i)} \right) + \frac{1}{R^{(i)}} N_\Theta^{(i)} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} - (-1)^{i-1} q_n$$

где  $t$  - время;  $\rho_0^{(i)}$  - плотность материала оболочки;  $q_x^{(i)}$ ,  $q_n$  - напряжения со стороны жидкости внутри кольцевого сечения. Подставляя (1) - (3) в (4), получаем уравнения в упругих перемещениях.

$$\frac{E h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{4m}{3E} \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[ \mu_1 \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[ 3\mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right) + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right] \right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
 &= \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - q_x^{(i)} \\
 &- \frac{E h_0^{(i)3}}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\langle \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \left\{ 1 - \frac{4m}{3E} 3\mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + 2(\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + 3 \frac{h_0^{(i)2}}{20} \mu_1 \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \right\rangle + \quad (5) \\
 &+ \frac{E h_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{4m}{3E} \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[ \mu_1 \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. \left. + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] \right] + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[ 3\mu_1 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right] \right\rangle + \frac{E h_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{1}{R} \left\langle \mu_0 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{4m}{3E} \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[ \mu_1 \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[ 3\mu_1 \mu_0 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right] \right\rangle = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} - (-1)^{i-1} q_n
 \end{aligned}$$

Исследуются рассматриваемые проблемы в безразмерных переменных, которые характеризуют задачу. Для волновых задач оболочка считается бесконечной. Для продольных волн в оболочке вводятся безразмерные переменные и безразмерные параметры. Примем длину волны  $l$  за характерную длину и  $u_m$ ,  $w_m$  за характерные значения упругих перемещений.

$$\begin{aligned}
 W^{(i)} &= w_m u_3^{(i)}, U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, x^* = \frac{x}{l}, t^* = \frac{c_0}{l} t, r^* = \frac{r}{R^{(i)}}, \\
 w_m &= h_0^{(i)}, u_m = \frac{h_0^{(i)} l}{R^{(i)}}.
 \end{aligned} \quad (6)$$

$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}}$  скорость распространения продольных упругих волн в оболочке.

$$\frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = \varepsilon \ll 1, \frac{R^{(i)2}}{l^2} = O(\varepsilon), \frac{m\varepsilon}{E} = O(1), \frac{h_0^{(i)2}}{l^2} = \frac{h_0^{(i)2}}{R^{(i)2}} \cdot \frac{R^{(i)2}}{l^2} = \varepsilon^3 \quad (7)$$

где  $\varepsilon$  - малый параметр задачи. Введем независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - (1 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}} t^*, \tau = \varepsilon t^* \quad (8)$$

где  $\tau$  - медленное время. Представим зависимые переменные в виде асимптотического разложения

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (9)$$

Подставив (6) - (9) в (5) получим систему уравнений в безразмерных переменных. Сохранив члены порядка  $\varepsilon$  получим

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \quad (10)$$

Таким образом  $u_{10}^{(i)}$  - произвольная функция. Далее получаем систему уравнений в приближении  $\varepsilon^2$ , из которой выводится разрешающее уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial^2 \xi} + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial^4 \xi} = - \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[ q_x^{(i)} - \mu_0 \frac{R}{l} (-1)^{i-1} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Полученное уравнение (11) является обобщенным МКдВ уравнением для  $\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}$ . В отсутствие жидкости правые части уравнений равны нулю, и

получаются два независимых МКдВ уравнения. Нужно определить правую часть (11), решая уравнения гидродинамики.

Уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнения неразрывности в цилиндрической системе координат  $(r, \Theta, x)$  в случае осесимметричного потока [8] записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial t} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Условия прилипания жидкости выполняются на границе оболочек и жидкости при  $r = R_i - W^{(i)}$  (рис. 1) [8].

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} V_r = - \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}. \quad (13)$$

здесь  $V_r, V_x$  - проекции на ось цилиндрической системы координат вектора скорости;  $p$  - давление в жидкости;  $\rho$  - плотность жидкости;  $\nu$  - коэффициент кинематической вязкости. Напряжения со стороны жидкого слоя определяются по формулам

$$\begin{aligned} q_n &= \left[ P_{rr} \cos \left( -\hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{n}_r \right) + P_{rx} \cos \left( -\hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{i} \right) \right]_{r=R_i-W^{(i)}} \\ q_x &= - \left[ P_{rx} \cos \left( -\hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{n}_r \right) + P_{xx} \cos \left( -\hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{i} \right) \right]_{r=R_i-W^{(i)}} \\ P_{rr} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}; P_{rx} = \rho\nu \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right); P_{xx} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_x}{\partial x}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $\hat{\bar{n}}^{(i)}$  - нормаль к срединной поверхности  $i$ -той оболочки,  $\bar{n}_r, \bar{n}_\Theta, \bar{i}$  - единичные векторы базиса  $(r, \Theta, x)$  цилиндрической системы координат, центр которой расположен на геометрической оси. Если мы снесем напряжение на невозмущенную поверхность оболочки, то мы можем считать  $-\hat{\bar{n}}^{(i)} = \bar{n}_r$  и

$$\cos \left( -\hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{n}_r \right) = 1, \quad \cos \left( -\hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{i} \right) = 0.$$

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned}
 V_r &= w_m \frac{c_0}{l} v_r; V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x; r = R_2 + \delta r^*; p = \frac{\rho v c_0 l R_i w_m}{\delta^3} P; \\
 \psi &= \frac{\delta}{R_2} = o(1); \lambda = \frac{w_m}{\delta} = o(1); \frac{w_m}{R_2} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_2} = \lambda \psi; \\
 \frac{w_m}{l} &= \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_i} \frac{1}{l} = \lambda \psi \varepsilon^{\frac{1}{2}}; \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_i} \frac{1}{l} = \psi \varepsilon^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Разложим давление и компоненты скорости по степеням малого параметра  $\lambda$ :

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \tag{16}$$

Предполагая теперь  $\frac{\delta}{l} = 0, \frac{\delta}{R_2} = 0$  (нулевое приближение по  $\frac{\delta}{l}$  как в

гидродинамической теории смазки), а также считая  $\frac{\delta}{l} \frac{\delta c_0}{v} < 1$ , подставляя (15),

(16) в задачу (12), (13), для первого члена разложения (16) получаем уравнения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \tilde{Re} \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}; \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0; \tilde{Re} = \frac{\delta}{l} \frac{\delta c_0}{v} \tag{17}$$

и граничные условия

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}; v_x^0 = 0; \text{ где } r^* = 1; v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}; v_x^0 = 0; \text{ где } r^* = 0 \tag{18}$$

С точностью до  $\psi, \lambda$  получаем из (14)

$$q_x^{(i)} \approx -\rho v \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0}^{r^*=1}; q_n \approx -\frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} P^0 \tag{19}$$

Для решения задачи (17), (18) мы применяем итерационный метод, предполагая  $\tilde{Re} < 1$  [12]. На втором шаге итерации находим

$$\begin{aligned}
 P^0 &= \iint \left[ 12 \left( \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \frac{6}{5} \tilde{Re} \left( \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^* dx^* \\
 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} &= (2r^* - 1) \iint \left[ 6 \left( \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) + \frac{1}{10} \tilde{Re} \left( \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^* \tag{20}
 \end{aligned}$$



Формула (20) совпадает с точным решением задачи (17), (18) при гармонических колебаниях для  $\tilde{Re} < 1$  [12]. Подставляя (8) в (20) и учитывая ( $\varepsilon \ll 1$ ), находим

$$P^0 = \int \left[ 12\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{6}{5} \tilde{Re} (1-\mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right] dx^*$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = (2r^* - 1) \left[ 12\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{\tilde{Re}}{10} (1-\mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right]; \quad (21)$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} = 6\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{\tilde{Re}}{10} (1-\mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right);$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} = -\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}$$

Уравнения (11) включают в себя выражения

$$q_x^{(i)} - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^{i-1}. \quad (22)$$

Найдем выражение в правой части уравнений (11). Учитывая, что  $w_m l u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_m R^{(i)} u_{10\xi}^{(i)}$  и что  $R^{(1)} = R^{(2)} = R$ ,  $h^{(1)} = h^{(2)} = h_0$  из-за малости  $\psi$ ,  $\lambda$  получаем из уравнений (11) с учетом вида правой части (19) - (22) систему уравнений

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^4} = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{\delta \varepsilon_0} \left( \frac{R}{\delta} \right)^2 \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \right.$$

$$\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \quad (23)$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^4} = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{\delta \varepsilon_0} \left( \frac{R}{\delta} \right)^2 \left[ \left( \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{10} \tilde{Re} \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right]$$

Введем обозначения  $u_{10\xi}^{(1)} = c_3\phi^{(1)}$ ,  $u_{10\xi}^{(2)} = c_3\phi^{(2)}$ ,  $\eta = c_1\xi$ ,  $t = c_2\tau$ , где

$$c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \frac{\nu}{\delta c_0} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right); c_1 = \left[ c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R}\right)^2 \frac{2}{\mu^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (24)$$

$$c_3 = \left[ 6 \frac{c_2}{c_1} \frac{E \varepsilon}{m} \left(\frac{l}{u_m}\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим

$$\sigma_1 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \frac{\delta}{l} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sqrt{1 - \mu_0^2}}{10} \left(1 - \frac{\delta}{12\mu_0 R}\right); \quad (25)$$

и получим систему уравнений из (23) - (25)

$$\left. \begin{aligned} \phi_t^{(1)} - 6\phi^{(1)}\phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} - \sigma_1(\phi_\eta^{(1)} - \phi_\eta^{(2)}) &= 0 \\ \phi_t^{(2)} - 6\phi^{(2)}\phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma_1(\phi_\eta^{(2)} - \phi_\eta^{(1)}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Система (26) имеет точное решение:

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = kth(k\eta + 2k^3t). \quad (27)$$

Рассмотрим случай, когда волна деформации присутствует во внешней оболочке и отсутствует во внутренней. Эта задача требует численного решения уравнений (26) с начальными условиями вида

$$\phi^{(1)} = kth(k\eta), \phi^{(2)} = 0. \quad (28)$$

Для численного моделирования используем разностную схему для уравнений (26), аналогичную схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности [8,13]

Графики для численного решения уравнений (26) представлены на рисунках 2-4.

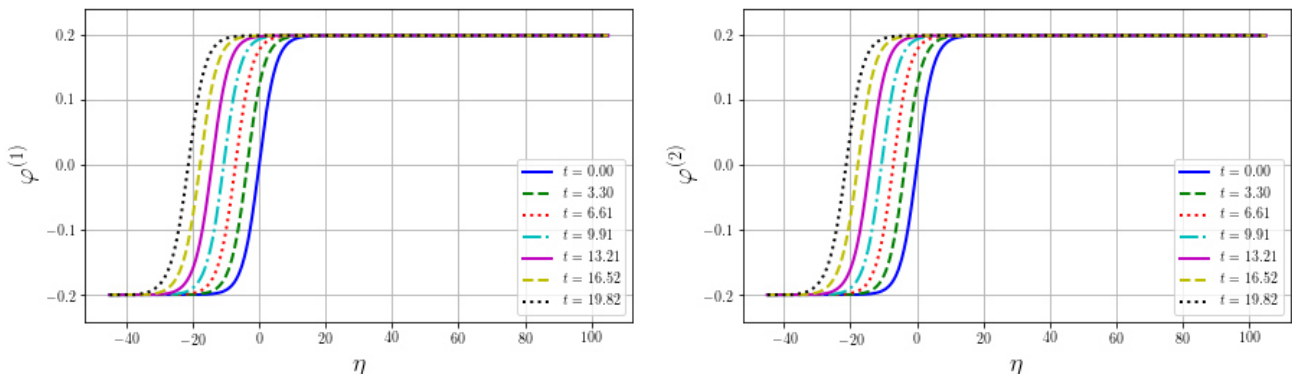


Рис. 2. Начальное условие (27) при  $t = 0$ ,  $k=0.2$ ,  $\sigma_1 = 1$

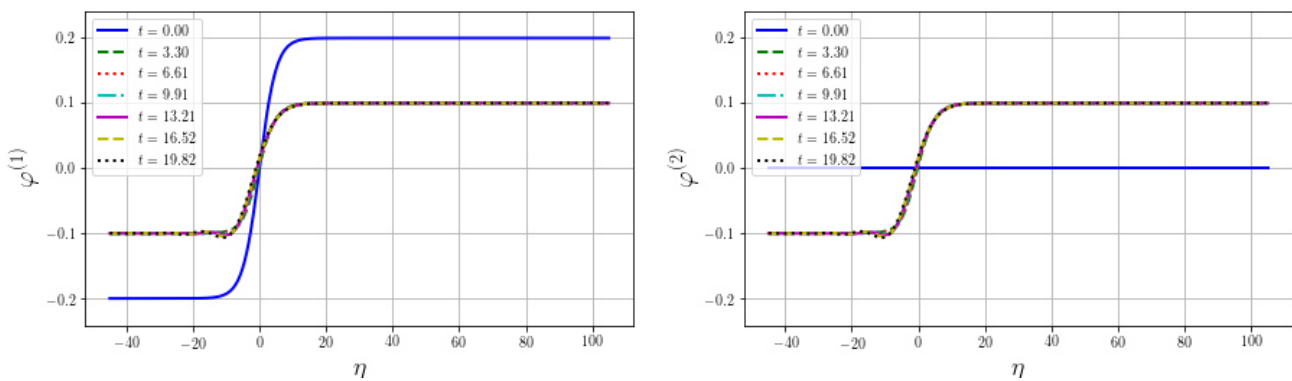


Рис. 3. Начальное условие (28) при  $k=0.2$ . Инерция движения жидкости отсутствует ( $\sigma_1 = 0$ ).

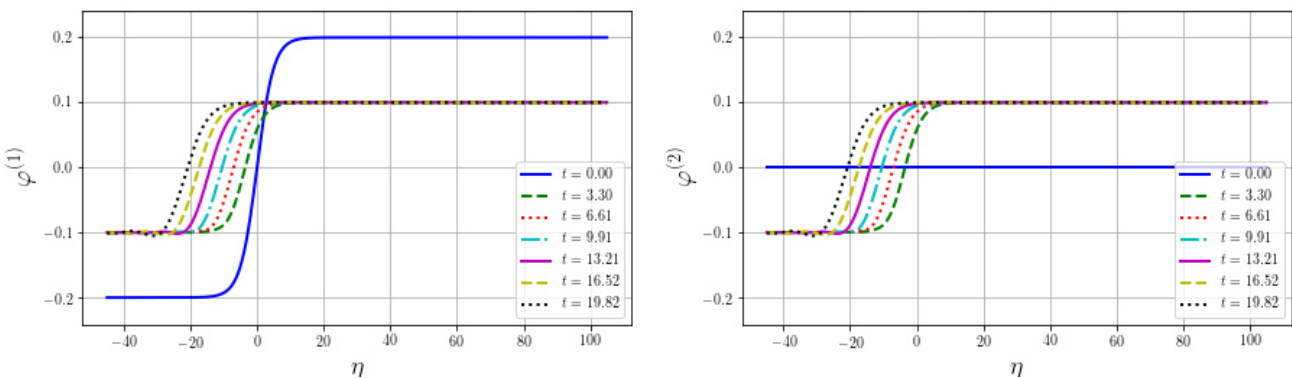


Рис. 4. Начальное условие (28) при  $k=0.2$ . Учитывается влияние инерции движения жидкости ( $\sigma_1 = 1$ ).

Проведенные вычислительные эксперименты позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости между оболочками с учетом влияния инерции движения жидкости на поведение нелинейной волны деформации. Согласно рис. 2, начальные условия в обеих оболочках одинаковы. Результат

вычислительного эксперимента совпадает с точным решением (27). Это означает эквивалентность полученной разностной схемы системе генерирующих ее дифференциальных уравнений. Согласно рис. 3, амплитуда волны в первой оболочке уменьшается, а во второй она растет до достижения среднего значения амплитуд в обеих оболочках, что означает передачу энергии через слой жидкости. Согласно рис. 4, как и на рис. 3, происходит передача энергии и скорость волны уменьшается (график на рисунке смещается влево, в сторону отрицательных значений аргумента больше, чем при отсутствии влияния инерции жидкости) из-за влияния инерции движения жидкости.

Система уравнений, обобщающих уравнения МКДВ, выводится из уравнений динамики оболочек с помощью асимптотического метода двухмасштабный разложений и уравнений динамики жидкости с помощью асимптотического разложения, а также метода итерации. Эта система имеет точное частное решение. Она описывает распространение продольных волн деформации в двух упругих соосных цилиндрических оболочках с вязкой несжимаемой жидкостью между ними. Волны распространяются без изменения амплитуд, что подтверждено вычислительным экспериментом. Создание уединенных волн возможно с помощью пьезоэлемента для передачи информации на большие расстояния или для диагностики трубопровода.

Проведенные вычислительные эксперименты позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости между оболочками с учетом влияния инерции жидкости на поведение нелинейной волны деформации. Энергия передается при наличии жидкости между оболочками. Амплитуда волны в первой оболочке уменьшается до величины, равной половине амплитуды заданной начальным, а во второй увеличивается от нуля до тех пор, пока амплитуды не выровняются (рис. 3, 4). Скорость волны уменьшается из-за влияния инерции движения жидкости.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-01-00014а.*

## Литература

1. Ерофеев В.И., Потапов А.И. Нелинейные продольные волны в упругих средах с моментными напряжениями // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 3. С. 477-483
2. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение // Акуст. журн. 2001. Т. 47. № 3. С. 359-363.
3. Ерофеев В. И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 6. С. 725-740.
4. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Осесимметричные нелинейные модулированные волны в цилиндрической оболочке // Акуст. журн. 2018 Т. 64. № 4. С. 417-423. DOI: 10.1134/S0320791918040135
5. Zemlyanukhin A. I., Andrianov I. V., Bochkarev A. V., Mogilevich L. I. The generalized schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Nonlinear Dyn. 2019. Vol. 98. №1 P. 185-194. DOI: 10.1007/s11071-019-05181-5.
6. Avramov K.V., Mikhlin Y.V., Kurilov E., Asymptotic analysis of non-linear dynamics of simply supported cylindrical shells // Nonlinear Dyn. 2007. Vol. 47. P. 331-352. DOI: 10.1007/s11071-006-9032-1.
7. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.
8. Блинков Ю.А., Блинкова А.Ю., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И. Математическое моделирование нелинейных волн в упругой цилиндрической оболочке, окруженной упругой средой и содержащей вязкую несжимаемую жидкость // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 3. С. 283-288
9. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
10. Каудерер К. Нелинейная механика.- М.: Издательство иностранной литературы, 1961. 778 с.
11. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Издательство Юрайт, 2018. 439 с.
12. Агеев Р.В., Евдокимова Е.В., Ковалева И.А., Могилевич Л.И. Динамика осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубе кругового и кольцевого сечений // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. № 3. URL: [mathmod.esrae.ru/15-50](http://mathmod.esrae.ru/15-50)
13. Gerdt V. P., Blinkov Y. A., Mozzhilkin V. V. Grobner bases and generation of difference schemes for partial differential equations. // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2006 Vol. 26. № 2. URL: <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html>