Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: **mathmod.esrae.ru/29-109**
Ссылка для цитирования этой статьи:
Вельмисов П.А., Тамарова Ю.А. Асимптотические уравнения газовой динамики // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2020. №1. DOI: 10.24411/2541-9269-2020-10105
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области (проекты № 18-41-730015, №19-41-730006)

УДК 517.95:533.6.01 DOI: 10.24411/2541-9269-2020-10105

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Вельмисов П.А.[1], Тамарова Ю.А.[2]
[1]Ульяновский государственный технический университет, Россия, Ульяновск, velmisov@ulstu.ru
[2]Ульяновский государственный технический университет, Россия, Ульяновск, kazakovaua@mail.ru

ASYMPTOTIC EQUATIONS OF GAS DYNAMICS

Velmisov P.A.[1], Tamarova Yu.A.[2]
[1]Ulyanovsk State Technical University, Russia, Ulyanovsk, velmisov@ulstu.ru
[2]Ulyanovsk State Technical University, Russia, Ulyanovsk, kazakovaua@mail.ru

Аннотация. В статье предложены асимптотические разложения для потенциала скорости, на основе которых выводятся асимптотические уравнения газовой динамики для безвихревых изоэнтропических течений идеального газа: уравнение линейной теории, нелинейные уравнения для сверхзвуковых и трансзвуковых течений. Полученные уравнения отличаются от известных учетом поперечного по отношению к основному потоку возмущения. Для асимптотического трансзвукового уравнения, учитывающего поперечные возмущения, указаны некоторые точные частные решения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными, частные решения, асимптотическое разложение, аэродинамика, трансзвуковые течения, сверхзвуковые течения

Abstract. In this article asymptotic expansions for the velocity potential are proposed, on the basis of which the asymptotic equations of gas dynamics for irrotational isentropic flows of an ideal gas are derived: the equation of linear theory, nonlinear equations for supersonic and transonic flows. The obtained equations differ from the known ones by taking into account the perturbation transverse to the main flow. For an asymptotic transonic equation that takes into account transverse perturbations, some exact particular solutions are indicated.

Keywords: partial differential equations, particular solutions, asymptotic expansion, aerodynamics, transonic flows, supersonic flows

ISSN 2541-9269

Введение

Основы теории трансзвуковых течений были заложены на заре развития сверхзвуковой авиации в 1946–1950 гг. С.В. Фальковичем [1], Т. Карманом [2], Л.В. Овсянниковым [3], Ф.И. Франклем [4], К.Г. Гудерлеем [5] и др. В работе [6] получено приближенное околозвуковое уравнение для нестационарных течений, основная сложность исследования которого заключается в том, что даже в приближенной постановке указанная проблема является нелинейной. Дальнейшее развитие теория трансзвуковых течений получила в работах [7-13]. Нестационарные околозвуковые течения исследовались в работах [14-16], изучению течения в соплах Лаваля посвящены работы [1,7,8,11,12,15-19]. Примеры расчетов в соплах и при обтекании летательных аппаратов для установившихся и неустановившихся течений представлены в работах [1, 11, 14–16, 19, 20]. На структуру течений газа в некоторых случаях существенное влияние оказывают вязкость и теплопроводность. Учет вязкости проводился в работах [21-24].

Следует отметить, что линейная теория непригодна для трансзвуковых течений газа и для течений в окрестности ударных волн [8,21,25-29]. В частности, в окрестности ударных волн градиенты параметров не являются малыми, а имеют порядок единицы, что не позволяет учесть линейная теория.

Так как трансзвуковое уравнение нелинейно, то представляет большой интерес вопрос отыскания точных частных решений. Эти решения необходимы для того, чтобы на основе примеров течений, построенных с их помощью, изучить характерные свойства околозвуковых течений, а также для проверки различных численных методов исследования трансзвуковых течений, в этом случае они являются тестирующими примерами. Задачам построения частных решений посвящены выше перечисленные работы, а также работы [30–32].

1. Линейная теория дозвукового и сверхзвукового движения газа.

Безвихревые изоэнтропические течения идеального газа в декартовой системе координат описываются уравнениями

$$\begin{gathered}\Phi_{tt}+2\Phi_x\Phi_{xt}+2\Phi_y\Phi_{yt}+2\Phi_z\Phi_{zt}+2\Phi_x\Phi_z\Phi_{xz}+2\Phi_z\Phi_y\Phi_{zy}+2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy}+\\ +\Phi_x^2\Phi_{xx}+\Phi_y^2\Phi_{yy}+\Phi_z^2\Phi_{zz}-\left(\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}\right)\times \qquad (1)\\ \times\left[a_0^2+\frac{\chi-1}{2}V_0^2-(\chi-1)\left(\Phi_t+\frac{1}{2}\Phi_x^2+\frac{1}{2}\Phi_y^2+\frac{1}{2}\Phi_z^2\right)\right]=0,\end{gathered}$$

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\chi-1}=\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}}=1+\frac{\chi-1}{2}\frac{V_0}{a_0}-\frac{\chi-1}{2a_0^2}\left(2\Phi_t+\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2\right). \qquad (2)$$

В (1), (2) $\Phi(x,y,z,t)$ - потенциал скорости, x, y, z – декартовы координаты, t – время, a – скорость звука, ρ – плотность, P – давление, χ – показатель адиабаты Пуассона, V_0 – скорость однородного потока, a_0, ρ_0, P_0 – значения скорости звука, плотности и давления в однородном потоке, индексы снизу обозначают частные производные.

Рассматривая малые возмущения однородного потока, распространяющегося со скоростью V_0 в направлении оси Ox, представим $\Phi(x,y,z,t)$ в виде

$$\Phi(x,y,z,t)=V_0x+\psi(y,z,t)+\varepsilon\varphi(x,y,z,t)+\ldots,\quad \varepsilon<<1, \tag{3}$$

где функция $\varphi(x,y,z,t)$ определяет основное течение, а функция $\psi(y,z,t)$ задает поперечное возмущение. Подставляя (3) в (1) и оставляя члены порядка единицы и члены порядка ε, получим нелинейное уравнение для $\psi(y,z,t)$ и линейное уравнение для $\varphi(x,y,z,t)$, которые не будем приводить вследствие их громоздкости.

При $\psi\equiv 0$ уравнение линейной теории для $\varphi(x,y,z,t)$ принимает вид

$$\varphi_{tt}+2V_0\varphi_{xt}+V_0^2\varphi_{xx}-a_0^2\left(\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}\right)=0. \tag{4}$$

В частности, в стационарном плоском случае будем иметь уравнение

$$(M_0^2-1)\varphi_{xx}-\varphi_{yy}=0,\qquad M_0=\frac{V_0}{a_0}.$$

При $M_0>1$ имеем волновое уравнение (гиперболического типа), при $M_0<1$ – уравнение, приводящееся к уравнению Лапласа (эллиптического типа).

Давление, согласно (2), при $\psi\equiv 0$ определяется по формуле

$$P=P_0-\rho_0\varepsilon\left(\varphi_t+V_0\varphi_x\right).$$

Выведем условие на обтекаемой поверхности, задав ее в виде

$$f(x,y,z,t)=f_0(y,z)+\varepsilon\, f_1(x,y,z,t)+\ldots=0. \tag{5}$$

Подставляя (3) и (5) в точное условие непротекания

$$\Phi_x f_x+\Phi_y f_y+\Phi_z f_z=-f_t$$

и оставляя старшие члены, при $\psi\equiv 0$ получим

$$\varphi_y f_{0y}+\varphi_z f_{0z}=-f_{1t}-V_0 f_{1x},$$

где φ_y, φ_z, f_{1t}, f_{1x} вычисляются на цилиндрической поверхности $f_0(y,z)=0$. В плоском случае $f(x,y,t)=y-y_0-\varepsilon w(x,t)$ ($y=y_0+\varepsilon w(x,t)$), тогда условие непротекания запишется в виде

$$\varphi_y(x,y_0,t)=w_t+V_0w_x.$$

Уравнение характеристик для (4) имеет вид

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2-2V_0\frac{\partial x}{\partial t}+V_0^2-a_0^2\left(1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right)=0.$$

2. Асимптотические уравнения для сверхзвуковых течений с поперечным возмущением

Введем асимптотическое разложение:

$$\Phi = V_0 x + \varepsilon\psi(y,z,t) + \varepsilon^2\varphi(\xi^0, y,z,t) + \ldots, \xi^0 = \frac{\xi}{\varepsilon},\ \ \xi = x - \beta y,\ \beta = \sqrt{M_0^2 - 1}, \quad (6)$$

где ε – малый параметр, $M_0 = \dfrac{V_0}{a_0}$ – число Маха. Подставляя (6) в (1), получим в первом приближении для функции $\varphi(\xi^0, y, z, t)$ уравнение:

$$\begin{aligned} &2V_0\varphi_{\xi^0 t} + 2\beta a_0^2\varphi_{\xi^0 y} + \left[(\chi+1)V_0 M_0^2\varphi_{\xi^0} + (\chi-1)M_0^2\psi_t - 2V_0\beta\psi_y\right]\varphi_{\xi^0\xi^0} = \\ &= a_0^2(\psi_{yy} + \psi_{zz}) - \psi_{tt}. \end{aligned} \quad (7)$$

В (7) функция $\psi(y,z,t)$, являющаяся произвольной, позволяет учесть, например, боковое аэродинамическое воздействие на обтекаемое тело. Уравнение (7) описывает течение в окрестности ударной волны, мало отличающейся от характеристики $\xi = const$. В работе [29] разложение (6) используется для исправления линейной теории в окрестности головной ударной волны при обтекании профиля сверхзвуковым потоком газа.

Условие на обтекаемой поверхности

$$y = y_0(z) + y_2(\xi^0, z, t)\varepsilon^2 + \ldots \quad (8)$$

получим, подставляя (6), (8) в точное условие непротекания и оставляя члены старшего порядка:

$$\psi_y + \psi_z y_{0z} - V_0 y_{2\xi^0} = \beta\varphi_{\xi^0}.$$

Значения ψ_y, ψ_z, φ_{ξ^0} вычисляются при $y = y_0(z)$. Подставляя в условия Ренкина-Гюгонио разложение (6) и оставляя старшие члены, получим условия на фронте ударной волны $\xi^0 = \xi^0(y,z,t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\chi+1}{2}M_0^2 V_0\left(\varphi_{\xi^0} + \varphi^*_{\xi^0}\right) = V_0\frac{\partial\xi^0}{\partial t} + \beta a_0^2\frac{\partial\xi^0}{\partial y} + V_0\beta\psi_y - \frac{(\chi-1)M_0^2}{2}\psi_t, \\ &\varphi = \varphi^*. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) φ и φ^* соответствуют течению с разных сторон от ударной волны. Если в (9) положить $\varphi \equiv \varphi^*$, то получим характеристическое уравнение для (7).

Асимптотическую формулу для определения давления получим, подставляя (6) в (2), проводя разложение в ряд Тейлора и оставляя старшие по порядку члены:

$$P = P_0\left(1 - \frac{\chi}{a_0^2}\varepsilon\left(\psi_{t^0} + V_0\varphi_{\xi^0}\right)\right).$$

3. Асимптотические уравнения для трансзвуковых течений с поперечным возмущением

В цилиндрических безразмерных координатах x, r, θ уравнения (1), (2) примут вид:

$$\Phi_{tt}+2\Phi_x\Phi_{xt}+2\Phi_r\Phi_{rt}+\frac{2}{r^2}\Phi_\theta\Phi_{\theta t}+2\Phi_x\Phi_r\Phi_{rx}+\frac{2}{r^2}\Phi_x\Phi_\theta\Phi_{\theta x}+\Phi_x^2\Phi_{xx}+$$
$$+\frac{2}{r^2}\Phi_\theta\Phi_r\Phi_{r\theta}+\Phi_r^2\Phi_{rr}+\frac{1}{r^4}\Phi_\theta^2\Phi_{\theta\theta}-a^2\left(\Phi_{xx}+\Phi_{rr}+\frac{1}{r}\Phi_r+\frac{1}{r^2}\Phi_{\theta\theta}\right)=0, \quad (10)$$

$$a^2=\rho^{\chi-1}=p^{\frac{\chi-1}{\chi}}=\frac{\chi+1}{2}-\frac{\chi-1}{2}\left(2\Phi_t+\Phi_x^2+\Phi_r^2+\frac{1}{2r^2}\Phi_\theta^2\right). \quad (11)$$

В формулах (10), (11) $\Phi(x,r,\theta,t)$, x, r, t, a, ρ, P – безразмерные переменные, отнесенные соответственно к $a_0 l$, l, $\frac{l}{a_0}$, a_0, ρ_0, P_0 где l – некоторый характерный размер, $a_0=V_0$, параметры с индексом 0 соответствуют звуковому однородному потоку. Введем для $\Phi(x,r,\theta,t)$ асимптотическое разложение:

$$\Phi=x+\varepsilon\psi\left(r,\theta,t^0\right)+\varepsilon^3\varphi\left(x^0,r,\theta,t^0\right)+\ldots,\quad x=\varepsilon x^0,\quad t=\frac{1}{\varepsilon}t^0, \quad (12)$$

где ε – малый параметр, функция $\varphi\left(x^0,r,\theta,t^0\right)$ определяет основное течение, а функция $\psi\left(r,\theta,t^0\right)$ задает поперечное возмущение. Подставляя (12) в (10), (11) и оставляя члены старшего порядка, получим для функции $\varphi\left(x^0,r,\theta,t^0\right)$ трансзвуковое уравнение:

$$2\varphi_{x^0t^0}+(\chi+1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0x^0}+2\psi_r\varphi_{x^0r}+\frac{2}{r^2}\psi_\theta\varphi_{x^0\theta}-\Delta\varphi+$$
$$+\frac{\chi-1}{2}\left(2\psi_{t^0}+\psi_r^2+\frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right)\varphi_{x^0x^0}=L(\psi). \quad (13)$$

В (13) введены обозначения:

$$-L(\psi)\equiv\psi_{t^0t^0}+2\psi_r\psi_{rt^0}+\frac{2}{r^2}\psi_\theta\psi_{\theta t^0}+\psi_r^2\psi_{rr}+\frac{1}{r^4}\psi_\theta^2\psi_{\theta\theta}+\frac{2}{r^2}\psi_\theta\psi_r\psi_{r\theta}-\frac{1}{r^3}\psi_r\psi_\theta^2,$$

$$\Delta\varphi\equiv\varphi_{rr}+\frac{1}{r}\varphi_r+\frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}.$$

Функция $\psi\left(r,\theta,t^0\right)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi=0$. Если $\psi\equiv 0$, то получим классическое трансзвуковое уравнение Линя-Рейсснера-Тзяна в цилиндрических координатах [6]

$$2\varphi_{x^0t^0}+(\chi+1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0x^0}-\varphi_{rr}-\frac{1}{r}\varphi_r-\frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}=0, \quad (14)$$

переходящее для установившихся течений в уравнение смешанного типа Кармана-Фальковича [1,2]: $(\chi+1)\varphi_{x^0}\varphi_{x^0x^0}-\varphi_{rr}-\frac{1}{r}\varphi_r-\frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta}=0$. В плоском случае (на плоскости годографа) это уравнение с помощью преобразования Лежандра приводится к линейному уравнению Трикоми.

Уравнение (13) описывает трансзвуковые течения газа, возникающие при воздействии на обтекаемое тело поперечного (по отношению к основному направлению движения, совпадающему с направлением оси x) возмущения основного трансзвукового потока (для возмущающего поперечного течения – $\Phi_r, \Phi_\theta \sim \varepsilon$, для основного течения – $\Phi_r, \Phi_\theta \sim \varepsilon^3$). Для внутреннего обтекания, например для течений в соплах, таким возмущением может быть закрутка потока $(\psi = \Gamma(t)\theta)$. Для внешнего обтекания летательных аппаратов таким возмущением является, например, боковой, меняющий свою скорость с течением времени ветер $\psi = V_\infty(t)\, r\cos(\theta + \alpha(t))$.

В случае $\psi = V_\infty \cos\theta (r + R^2 / r)$ получим асимптотическое уравнение, описывающее трансзвуковые течения, возникающие при обтекании тела, мало отличающегося от цилиндрического.

Условия на фронте ударной волны $x^0 = x^0(r, \theta, t^0)$ получим из условий Ренкина-Гюгонио, подставляя в них разложение (12) и оставляя члены старшего порядка

$$2\frac{\partial x^0}{\partial t^0} + \left(\frac{\partial x^0}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial x^0}{\partial \theta}\right)^2 + 2\psi_r \frac{\partial x^0}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\psi_\theta \frac{\partial x^0}{\partial \theta} =$$
$$= \frac{\chi - 1}{2}\left(2\psi_{t^0} + \psi_r^2 + \frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right) + \frac{\chi + 1}{2}\left(\varphi_{x^0} + \varphi^*_{x^0}\right), \quad \varphi = \varphi^*. \tag{15}$$

Здесь φ и φ^* соответствуют течению с разных сторон от ударной волны. Если в (15) положить $\varphi \equiv \varphi^*$, то получим характеристическое уравнение для (13).

Выведем условия на обтекаемой поверхности, мало отличающейся от цилиндрической, задав ее в виде:

$$r = r_0(\theta) + r_2\left(x^0, \theta, t^0\right)\varepsilon^4 + \ldots \tag{16}$$

Подставляя (12) и (16) в точное условие непротекания $-\Phi_x r_x + \Phi_r - r^{-2} r_\theta \Phi_\theta = r_t$ и оставляя старшие члены, получим:

$$\psi_r - \frac{1}{r_0^2}\frac{dr_0}{d\theta}\psi_\theta = 0, \qquad \varphi_r - \frac{1}{r_0^2}\frac{dr_0}{d\theta}\varphi_\theta = \frac{\partial r_2}{\partial x^0}. \tag{17}$$

Значения φ_r, φ_θ, ψ_r, ψ_θ в (17) вычисляются при $r = r_0(\theta)$.

Уравнение звуковой поверхности ($V^2 = a^2$) в трансзвуковом приближении принимает вид:

$$N \equiv \frac{\chi + 1}{2}\left(\psi_r^2 + \frac{1}{r^2}\psi_\theta^2\right) + (\chi - 1)\psi_{t^0} + (\chi + 1)\varphi_{x^0} = 0.$$

Для стационарных течений $(\partial / \partial t = 0)$ уравнение (13) имеет смешанный тип. Тогда звуковая поверхность $N = 0$ является поверхностью параболичности уравнения (13), при этом в сверхзвуковой области (области гиперболичности) $N > 0$, в дозвуковой области (области эллиптичности) $N < 0$.

Подставляя (12) в выражение для давления (11), проводя разложение в ряд Тейлора и оставляя старшие по порядку члены, получим асимптотическую формулу для определения давления:

$$P = 1 - \chi\varepsilon^2\left(\psi_{t^0} + \varphi_{x^0} + \frac{1}{2}\psi_r^2 + \frac{1}{2r^2}\psi_\theta^2\right).$$

Для уравнения (13) построены некоторые классы точных частных решений. В случае стационарного течения можно задать $\psi = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\lambda_n}(A_n \cos\lambda_n\theta + B_n \sin\lambda_n\theta)$, где A_n, B_n – произвольные константы. При $\lambda_n < 0$ решение можно применять для описания течений, возникающих при внешнем обтекании, при $\lambda_n > 0$ решение можно использовать для описания течений в каналах.

Уравнение (13) имеет решение полиномиального вида (индекс ноль у переменных x, t будем здесь и далее опускать)

$$\varphi = \sum_{k=0}^{3} \varphi_k(r,\theta,t)x^k .$$

Также уравнение (13) для нестационарных течений имеет автомодельные решения

$$\psi = t^{\beta}\overline{\psi}(\zeta,\eta),\quad \varphi = t^{2\beta-1}\overline{\varphi}(\xi,\zeta,\eta),\quad \xi = \frac{x}{t^{\beta}},\quad \zeta = \frac{r}{t^{(\beta+1)/2}},\quad \eta = \theta + \alpha\ln t,$$

где α, β – произвольные числа. Для стационарных течений уравнение (13) допускает класс автомодельных решений

$$\psi = r^{\beta}\overline{\psi}(\theta),\quad \varphi = r^{3\beta-2}\overline{\varphi}(\xi,\theta),\quad \xi = \frac{x}{r^{\beta}},$$

где β – произвольное число. Переход к автомодельным переменным позволяет уменьшить число независимых переменных от четырех до трех в нестационарном случае и от трех до двух в стационарном случае.

Для течений в неограниченной области решения должны удовлетворять условиям затухания возмущений вдали от тела (на бесконечности), например, при $r \to \infty$. Решение для случаев $\psi = \Gamma\theta$, $\psi = Q\ln r$, обладающее свойствами: V_x, V_r, $V_\theta \to 0$ при $r \to \infty$ (где $V_{(x)} = \varphi_x$, $V_{(r)} = \varphi_r$, $V_{(\theta)} = \frac{1}{r}\varphi_\theta$ – проекции вектора скорости) запишется в виде

$$\varphi = f(x,\theta)r^{-2} + g(r,\theta), \qquad \Delta g = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области (проекты № 18-41-730015, №19-41-730006).

Литература

1. Валькович С.В. К теории сопла Лаваля // ПММ. 1946. № 10. С. 503–512.

2. Karman Th. von The similarity law of transonic flow // J. Math. Phys. 1947. Vol. 26, № 3. P. 182–190.
3. Овсянников Л.В. Исследование газовых течений с прямой дозвуковой линией // Труды Ленинградской Военно-Воздушной инженерной академии им. А.Ф. Можайского. 1950. Вып. 33. С. 3–24.
4. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.
5. Гудерлей К.Г. Теория околозвуковых течений. М.: Издательство иностранной литературы, 1960. 421 с.
6. Lin C.C., Reissner E., Tsien H.S. On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid // Jour. Math. Phys. 1948. Vol. 27, № 3. P. 220–231.
7. Лифшиц Ю.Б., Рыжов О.С. Об асимптотическом типе плоскопараллельного течения в окрестности сопла Лаваля // Докл. АН СССР. 1964. Vol. 154, № 2. С. 290–293.
8. Лифшиц Ю.Б., Рыжов О.С. О причинах образования ударных волн в соплах Лаваля // Докл. АН СССР. 1964. Vol. 154, № 5. С. 1052–1055.
9. Лифшиц Ю.Б., Рыжов О.С. О некоторых точных решениях уравнений трансзвуковых течений газа // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. 1964. Т. 4, № 5. С. 954–958.
10. Рыжов О.С. Некоторые вырожденные околозвуковые течения // Приклад. математика и механика. 1958. Т. 22, вып. 2. С. 260–264.
11. Рыжов О.С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М.: ВЦ АН СССР, 1965. 238 с.
12. Рыжов О.С. О работе сопел Лаваля в нерасчетных режимах // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. 1967. Т. 7, № 4. С. 859–866.
13. Шифрин Э.Г. Потенциальные и вихревые трансзвуковые течения идеального газа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 320 с.
14. Adamson T.C. Unsteady transonic flows in two-dimensional channels // Journal of Fluid Mechanics. 1972. Vol. 52, issue 03. P. 437–449.
15. Вельмисов П.А., Фалькович С.В. Неустановившиеся течения газа в соплах Лаваля с местными сверхзвуковыми зонами // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 2. С. 271–279.
16. Вельмисов П.А. К вопросу о неустановившемся движении газа в соплах Лаваля // Известия вузов. Математика. 1976. № 12. С. 3–10.
17. Tomotika S. and Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluids // Part I, Quart.Appl.Math. 1949. Vol. 7, № 4. P. 381–397.
18. Tomotika S. and Hasimoto Z. On the transonic flow of a compressible fluid through an axially symmetrical nozzle // J. Math. Phys. 1950. Vol. 29, № 2. P. 105–117.
19. Вельмисов П.А. О единственности решения прямой задачи сопла Лаваля // Известия вузов. Математика. 1979. № 1. С. 15–17.

20. Вельмисов П.А., Маценко П.К. О некоторых задачах внешнего пространственного обтекания тел околозвуковым потоком газа // Известия вузов. Математика. 1986. № 9. С. 10–16.
21. Sichel M. Structure of weak non-hygoniot schocks // Phys. Fluids. 1963. Vol. 6, № 5. P. 653–662.
22. Sichel M. The effect of longitudinal viscosity on the flow at a nozzle throat // J. of Fluid. Mech. 1966. Vol. 25, № 4. P. 769–786.
23. Рыжов О.С., Шефтер Г.М. О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений // Приклад. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 6. С. 996–1007.
24. Вельмисов П.А., Фалькович С.В. К теории околозвуковых течений вязкого газа // Известия вузов. Математика. 1974. № 5. С. 52–61.
25. Рыжов О.С., Христианович С.А. О нелинейном отражении слабых ударных волн // ПММ. 1958. Т. 22, вып.5. С. 586-599.
26. Mogilevich L.I., Shindiapin G.P. On nonlinear diffraction of weak shock waves // PMM. 1971. Vol.35, №3. P. 492-498.
27. Могилевич Л.И. Об асимптотическом методе решения нелинейных задач газовой динамики со слабыми ударными волнами. Некоторые вопросы теории коротких волн // Изв. вузов. Математика. 1972. №12. С. 77-83.
28. Могилевич Л.И. О нелинейных эффектах вблизи фронтов слабых ударных волн // Изв.вузов. Математика. 1975. №3. С. 72-81.
29. Вельмисов П.А. Асимптотическое исследование нелинейных эффектов в задаче о нестационарном сверхзвуковом обтекании профиля // Прикладная математика и механика. 1979. Т.43. С. 30-37.
30. Заславский Б.И., Клепикова Н.А. Об одном классе точных частных решений уравнений околозвуковых течений газа // Прикладная математика и техническая физика. 1965. № 6. С. 65–68.
31. Vel’misov P.A., Todorov M.D., Kazakova Ju.A. Some classes of the solutions of aerohydromechanic equations // American Institute of Physics Conference Proceedings. 2009. Vol. 1067. P. 427–441.
32. Казакова Ю.А. О некоторых классах решений уравнений аэрогидромеханики // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат.науки. 2011. № 2 (23). С. 289–294.