Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/30-110
Ссылка для цитирования этой статьи:
Бочкарев А.В., Землянухин А.И., Ратушный А.В. Точные уединенные, периодические и рациональные решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2020. №2
Выполнено при поддержке грантов РФФИ 20-38-70158, 20-01-00123

УДК 534.1:517.957 DOI: 10.24411/2541-9269-2020-10201

ТОЧНЫЕ УЕДИНЕННЫЕ, ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Бочкарев А.В.[1], Землянухин А.И.[2], Ратушный А.В.[3]
[1]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, ab2009sar@list.ru
[2]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, zemlyanukhinai@sstu.ru
[3] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, sania.ratushnyy@gmail.com

EXACT SOLITARY, PERIODIC AND RATIONAL SOLUTIONS OF A NONLINEAR SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION

Bochkarev A.V.[1], Zemlyanukhin A.I.[2], Ratushnyi A.V.[3]
[1]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, ab2009sar@list.ru
[2]Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, zemlyanukhinai@sstu.ru
[3] Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, sania.ratushnyy@gmail.com

Аннотация. Метод геометрического ряда, первоначально предложенный авторами для нахождения уединенно – волновых решений, адаптирован к построению точных периодических и рациональных решений нелинейных дифференциальных уравнений. На примере уравнения второго порядка, содержащего нелинейности пятой и девятой степеней, продемонстрирована эффективность развиваемого подхода.

Ключевые слова: метод геометрического ряда, нелинейное дифференциальное уравнение, периодические решения, рациональные решения

Abstract. The geometric series method used by the authors for finding solitary wave solutions is adapted to the construction of periodic and rational solutions of nonlinear differential

equations. Using the example of a second-order equation containing nonlinearities of the fifth and ninth degrees, the effectiveness of the developed approach is demonstrated.

Keywords: geometric series method, nonlinear differential equation, periodic solutions, rational solutions

Введение

Уравнения Дуффинга и его расширенные версии являются базовыми моделями при верификации и сравнительном анализе асимптотических методов [1] в задачах теории колебаний [2], волновой динамики деформируемых систем [3,4,5]. Аналитическая структура этих уравнений и классы их точных и приближенных решений хорошо известны [6]. Обобщение уравнения Дуффинга, учитывающее член с пятой степенью зависимой переменной, исследовано достаточно подробно [7]. Дополнительный учет нелинейности седьмой степени приводит к сложной модели, допускающей только асимптотический и численный анализ [8]. В данной работе исследуется уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \alpha x + \beta x^5 + \delta x^9 = 0, \tag{1}$$

содержащее, наряду с линейным членом, нелинейные слагаемые пятой и девятой степеней. Целью исследования является расширение области применимости метода геометрического ряда (МГР) [9]. Задача состоит в построении точных уединенных, периодических и рациональных решений. Статья организована следующим образом. В первом параграфе на основе разложения по степеням вещественнозначных экспонент производится построение апериодического решения. Во втором параграфе построены точные вещественные периодические решения с использованием разложения по степеням комплекснозначных экспонент. Построение точных рациональных решений на основе прямого разложения по степеням независимой переменной проведено в третьем параграфе.

1. Уединенное решение

Подставляя в уравнение (1) функциональный ряд

$$x = \sum_{k=1} \varepsilon^k u_k(t), \tag{2}$$

где ε – формальный параметр, используемый для группировки слагаемых, $u_k(t)$ – неизвестные функции, в первом порядке по параметру ε получаем однородное линейное уравнение

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \alpha u_1 = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) при условии

$$\alpha = -\omega^2, \ \omega \in \mathbf{R} \tag{4}$$

имеет решение в форме экспоненциальной функции с вещественным показателем

$$u_1 = \mathrm{e}^{\omega t}. \tag{5}$$

В следующих порядках по ε, со второго по четвертый, имеем уравнения, аналогичные (3):

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \alpha u_n = 0, \ \ n = \overline{2,4}, \tag{6}$$

которым можно удовлетворить, положив $u_n = 0, \ n = \overline{2,4}$. В пятом порядке получаем неоднородное уравнение

$$\frac{d^2 u_5}{dt^2} + \alpha u_5 = -\beta u_1^5, \tag{7}$$

решение которого с учетом (4) и (5) имеет вид

$$u_5 = -\frac{\beta}{24\omega^2}\mathrm{e}^{5\omega t}. \tag{8}$$

Аналогичным образом продолжим решать уравнения, оставляя ненулевые решения только в порядках по параметру ε, равными $4n+1, \ n \in \mathbb{N}$. Это позволяет представить функциональный ряд (2) в форме степенного ряда по степеням экспоненциальной функции

$$\begin{aligned} x = {} & \varepsilon \mathrm{e}^{\omega t} - \frac{\varepsilon^5 \beta}{24\omega^2}\left(\mathrm{e}^{\omega t}\right)^5 + \frac{\varepsilon^9\left(-24\delta\omega^2 + 5\beta^2\right)}{1920\omega^4}\left(\mathrm{e}^{\omega t}\right)^9 - \\ & - \frac{\varepsilon^{13}\beta\left(-72\delta\omega^2 + 5\beta^2\right)}{27648\omega^6}\left(\mathrm{e}^{\omega t}\right)^{13} + \frac{\varepsilon^{17}\left(5184\delta^2\omega^4 - 5040\beta^2\delta\omega^2 + 175\beta^4\right)}{13271040\omega^8}\left(\mathrm{e}^{\omega t}\right)^{17} - \\ & - \frac{\varepsilon^{21}\beta\left(5184\delta^2\omega^4 - 1680\beta^2\delta\omega^2 + 35\beta^4\right)}{35389440\omega^{10}}\left(\mathrm{e}^{\omega t}\right)^{21} + \ldots \end{aligned} \tag{9}$$

Покажем, что ряд (9) после несложных преобразований становится геометрическим рядом.

Подстановка $x = a_0 t^{-p}$ в уравнение (1) показывает, что баланс ведущих членов уравнения, включающих производную по времени и старшую нелинейность, достигается при $p = \frac{1}{4}$, то есть, решение (9) уравнения (1) имеет дробный порядок полюса. Чтобы перейти к функции, имеющей полюс целого порядка, достаточно возвести ряд (9) в четвертую степень:

$$\begin{aligned} x^4 = {} & z - \frac{\beta}{6\omega^2}z^2 + \frac{-12\delta\omega^2 + 5\beta^2}{240\omega^4}z^3 - \frac{\beta\left(-36\delta\omega^2 + 5\beta^2\right)}{2160\omega^6}z^4 + \\ & + \frac{1296\delta^2\omega^4 - 1800\beta^2\delta\omega^2 + 125\beta^4}{518400\omega^8}z^5 - \frac{\beta\left(1296\delta^2\omega^4 - 600\beta^2\delta\omega^2 + 25\beta^4\right)}{1036800\omega^{10}}z^6 + \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

где $z=\left(\varepsilon\,\mathrm{e}^{\omega t}\right)^4$.

Известно, что для геометрического степенного ряда последовательные диагональные аппроксиманты Паде $[P,P]$, $[P+1,P+1]$, $[P+2,P+2]$,... совпадают между собой, начиная с некоторого порядка P, и определяют точную сумму ряда [9]. Вычислим три первых диагональные аппроксиманты Паде для ряда (10):

$$[1,1]=\frac{6\omega^2 z}{6\omega^2+\beta z},$$

$$[2,2]=\frac{720\omega^4 z}{720\omega^4+120\omega^2\beta z+\left(5\beta^2+36\delta\omega^2\right)z^2}, \qquad (11)$$

$$[3,3]=[2,2].$$

Совпадение двух последовательных аппроксимант $[2,2]$ и $[3,3]$ свидетельствует в пользу гипотезы о геометричности ряда (10). Нахождение аппроксимант Паде высоких порядков P является вычислительно затратной процедурой и требует знания первых $2P$ членов ряда. Поэтому, не вычисляя аппроксимант $[4,4]$, $[5,5]$ и так далее, проверим, дает ли выражение для аппроксиманты $[2,2]$ из (11) точное решение. Для этого проведем в выражении обратные замены $z=\left(\varepsilon\,\mathrm{e}^{\omega t}\right)^4$, $\omega=\sqrt{-\alpha}$, извлечем корень 4-й степени:

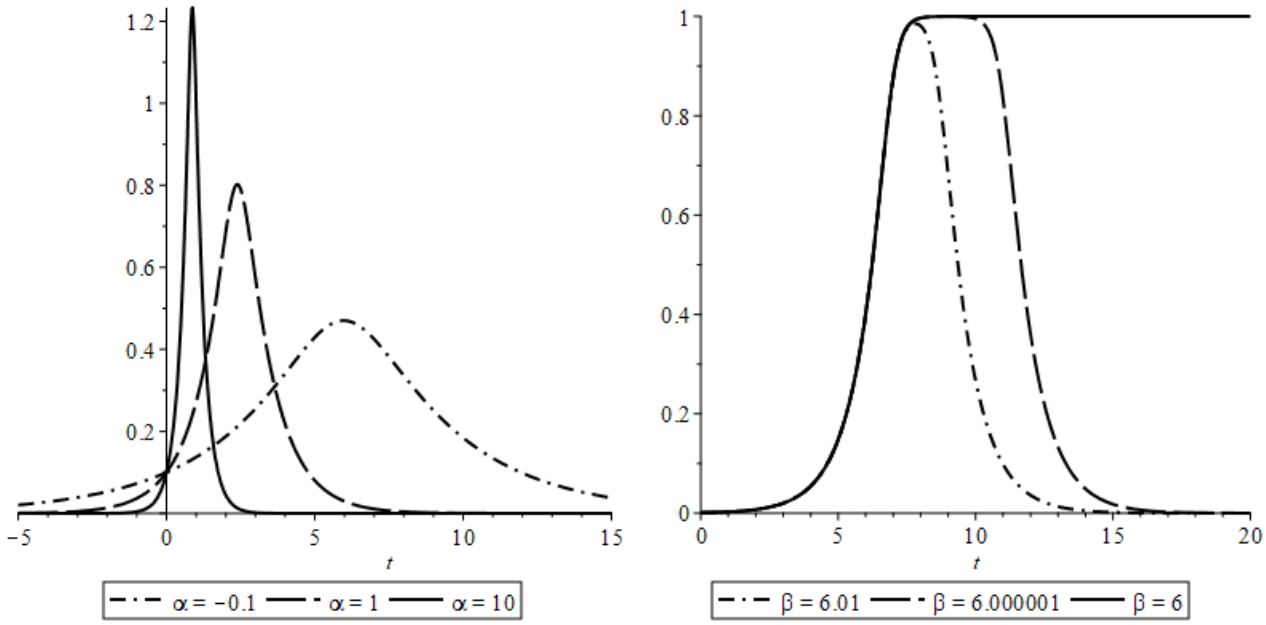
$$x=\pm\frac{\sqrt[4]{720}\sqrt{-\alpha}\,\varepsilon\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\alpha}t}}{\sqrt[4]{720\alpha^2-120\alpha\beta\varepsilon^4\,\mathrm{e}^{4\sqrt{-\alpha}t}+\left(5\beta^2-36\alpha\delta\right)\varepsilon^8\,\mathrm{e}^{8\sqrt{-\alpha}t}}} \qquad (12)$$

и подставим вместо зависимой переменной в (1). Уравнение (1) при этом обращается в тождество, следовательно, (12) является его точным решением, а ряд (10) – геометрическим рядом.

Решение (12) содержит 4 произвольных параметра – три коэффициента α,β,δ уравнения (1) и формальный параметр ε. Изменение значения ε в силу очевидного равенства $\varepsilon\,\mathrm{e}^{\omega t}=\mathrm{e}^{\omega\left(t+\frac{\ln\varepsilon}{\omega}\right)}$ приводит к сдвигу профиля решения вдоль оси времени и отражает свойство автономности уравнения (1). Решение (12) является вещественным, ограниченным и имеет солитоноподобную форму в двух случаях – при $\alpha<0$, $\delta>0$ или при $\alpha<0$, $\delta<0$ и $\beta>\frac{6}{\sqrt{5}}\sqrt{\alpha\delta}$. Увеличение абсолютного значения α приводит к одновременному увеличению амплитуды и уменьшению ширины “солитона” (Рис. 1а); параметры β,δ влияют только на амплитуду “солитона”. Приближение β сверху к своему наименьшему допустимому значению $\beta_{\min}=\frac{6}{\sqrt{5}}\sqrt{\alpha\delta}$ в области отрицательных

ISSN 2541-9269

значений δ приводит к появлению у “солитона” плоской вершины (рис. 1б). При $\beta = \beta_{\min}$ решение становится кинкоподобным.



(а) (б)

Рис.1. Графики решения (12) при а) $\beta = 6$, $\delta = 5$, $\varepsilon = 0.1$; б) $\alpha = -1$, $\delta = -5$, $\varepsilon = 0.001$

2. Периодическое решение

Для построения периодического точного решения при помощи метода геометрического ряда заметим, что линейное уравнение (3), возникающее в первом порядке по формальному параметру ε, имеет периодическое комплексное решение

$$u_1 = \mathrm{e}^{i\omega t} \tag{13}$$

при условии

$$\alpha = -\omega^2, \ \omega \in \mathbf{R}. \tag{14}$$

Последовательно решая уравнения, возникающие в следующих порядках по ε, для функционального ряда (2) получим

$$x = \varepsilon \mathrm{e}^{i\omega t} + \frac{\varepsilon^5 \beta}{24\omega^2}\left(\mathrm{e}^{i\omega t}\right)^5 + \frac{\varepsilon^9\left(24\delta\omega^2 + 5\beta^2\right)}{1920\omega^4}\left(\mathrm{e}^{i\omega t}\right)^9 +$$
$$+\frac{\varepsilon^{13}\beta\left(72\delta\omega^2 + 5\beta^2\right)}{27648\omega^6}\left(\mathrm{e}^{i\omega t}\right)^{13} + \frac{\varepsilon^{17}\left(5184\delta^2\omega^4 + 5040\beta^2\delta\omega^2 + 175\beta^4\right)}{13271040\omega^8}\left(\mathrm{e}^{i\omega t}\right)^{17} + \tag{15}$$
$$+\frac{\varepsilon^{21}\beta\left(5184\delta^2\omega^4 + 1680\beta^2\delta\omega^2 + 35\beta^4\right)}{35389440\omega^{10}}\left(\mathrm{e}^{i\omega t}\right)^{21} + \ldots$$

ISSN 2541-9269

Ряд (15) отличается от ряда (9) наличием мнимой единицы в показателях экспонент и противоположными знаками перед членами, содержащими $\omega^2,\ \omega^6,\ \omega^{10},...$

Ряд (15), возведенный в 4-ю степень

$$x^4 = z + \frac{\beta}{6\omega^2} z^2 + \frac{12\delta\omega^2 + 5\beta^2}{240\omega^4} z^3 + \frac{\beta\left(36\delta\omega^2 + 5\beta^2\right)}{2160\omega^6} z^4 + \\ + \frac{1296\delta^2\omega^4 + 1800\beta^2\delta\omega^2 + 125\beta^4}{518400\omega^8} z^5 + \frac{\beta\left(1296\delta^2\omega^4 + 600\beta^2\delta\omega^2 + 25\beta^4\right)}{1036800\omega^{10}} z^6 + ... \tag{16}$$

где $z = \left(\varepsilon\, \mathrm{e}^{i\omega t}\right)^4$, имеет совпадающие аппроксиманты Паде $[2,2]$ и $[3,3]$:

$$[2,2] = [3,3] = \frac{720\omega^4 z}{720\omega^4 - 120\omega^2\beta z + \left(5\beta^2 - 36\delta\omega^2\right) z^2}. \tag{17}$$

После возвращения к исходным переменным выражение (17) дает точное периодическое решение уравнения (1):

$$x = \pm \frac{\sqrt[4]{720}\sqrt{\alpha}\,\varepsilon\, \mathrm{e}^{i\sqrt{\alpha}t}}{\sqrt[4]{720\alpha^2 - 120\alpha\beta\varepsilon^4\, \mathrm{e}^{4i\sqrt{\alpha}t} + \left(5\beta^2 - 36\alpha\delta\right)\varepsilon^8\, \mathrm{e}^{8i\sqrt{\alpha}t}}}. \tag{18}$$

Чтобы из комплексного решения получить вещественное, приравняем нулю мнимую часть четвертой степени решения (18). Несложно убедиться, что это достигается при выполнении равенства

$$\delta = \frac{5}{36}\frac{\beta^2\varepsilon^8 - 144\alpha^2}{\alpha\varepsilon^8}. \tag{19}$$

и решение (18) принимает вид

$$x = \pm\sqrt[4]{6\alpha}\,\varepsilon \left(\frac{12\alpha - \beta\varepsilon^4 - 24\alpha\sin^2 2\sqrt{\alpha}t}{\left(\beta\varepsilon^4 - 12\alpha\cos 4\sqrt{\alpha}t\right)^2} \right)^{\frac{1}{4}}. \tag{20}$$

Выражение (20) содержит три произвольные постоянные $\alpha > 0, \beta, \varepsilon$ и является вещественным и ограниченным при соблюдении условия

$$\beta < \beta_{\max} = -\frac{12\alpha}{\varepsilon^4}. \tag{21}$$

Как и ранее, изменение значения ε влияет только на сдвиг профиля решения вдоль оси времени. При больших отрицательных значениях коэффициента β профиль волны близок к синусоидальному и имеет малую амплитуду. По мере приближения к $\beta_{\max}$ амплитуда возрастает и максимумы решения “заостряются” – график решения становится похожим на кноидальную волну (Рис. 2).

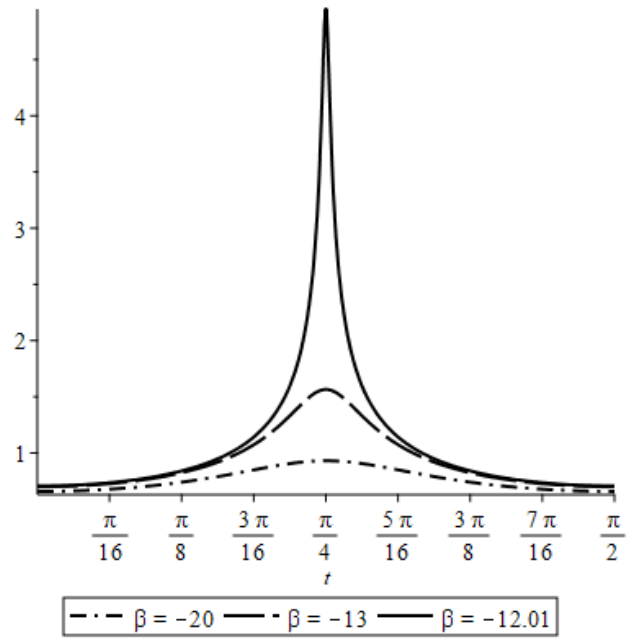


Рис.2. Графики одного периода решения (20) при $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$.

3. Рациональное решение

Подставим в уравнение (1) ряд по степеням независимой переменной

$$x = \sum_{k=0} a_k t^k \tag{22}$$

и сгруппируем результат по степеням *t*. Приравнивая нулю постоянный член, не зависящий от *t*, получим

$$a_2 = -\frac{a_0}{2}\left(\delta a_0^8 + \beta a_0^4 + \alpha\right). \tag{23}$$

Последовательно приравнивая нулю коэффициенты при $t^1, t^2, t^3, \ldots$, имеем

$$a_3 = -\frac{a_1}{6}\left(9\delta a_0^8 + 5\beta a_0^4 + \alpha\right), \tag{24}$$

$$a_4 = \frac{a_0}{24}\left(9\delta a_0^{16} + 14\beta\delta a_0^{12} + (10\alpha\delta + 5\beta^2)a_0^8 - 72\delta a_0^6 a_1^2 + 6\alpha\beta a_0^4 - \right.$$
$$\left. -20\beta a_0^2 a_1^2 + \alpha^2\right), \tag{25}$$

$$a_5 = \frac{a_1}{120}\left(297\delta^2 a_0^{16} + 366\beta\delta a_0^{12} + (234\alpha\delta + 85\beta^2)a_0^8 - 504\delta a_0^6 a_1^2 + 70\alpha\beta a_0^4 - \right.$$
$$\left. -60\beta a_0^2 a_1^2 + \alpha^2\right) \tag{26}$$

и так далее. Вычислив коэффициенты ряда (22) вплоть до a_7, возведем частичную сумму ряда, содержащую 8 слагаемых, в четвертую степень

ISSN 2541-9269

$$x^4=\left(\sum_{k=0}^{7}a_k t^k\right)^4=a_0^4+4a_0^3a_1t-2a_0^2\left(\delta a_0^{10}+\beta a_0^6+\alpha a_0^2-3a_1^2\right)t^2-$$

$$-\frac{4}{3}a_0a_1\left(9\delta a_0^{10}+7\beta a_0^6+5\alpha a_0^2-3a_1^2\right)t^3+\left(3\delta^2a_0^{20}+\frac{16}{3}\beta\delta a_0^{16}-36a_0^{10}\delta a_1^2+\right. \qquad (27)$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(14\alpha\delta+7\beta^2\right)a_0^{12}+4a_0^8\alpha\beta-\frac{58}{3}a_0^6\beta a_1^2+\frac{5}{3}a_0^4\alpha^2-8a_0^2\alpha a_1^2+a_1^4\right)t^4+\ldots$$

(в выражении (27) по причине громоздкости выписаны только первые 5 членов). Анализ показывает, что разности $[3,3]-[2,2]$ и $[4,4]-[3,3]$ последовательных диагональных аппроксимант Паде для ряда (27) обращаются в нуль при

$$\alpha=0,\quad \delta=-\frac{5}{3}\frac{\beta a_0^6+3a_1^2}{a_0^{10}}. \qquad (28)$$

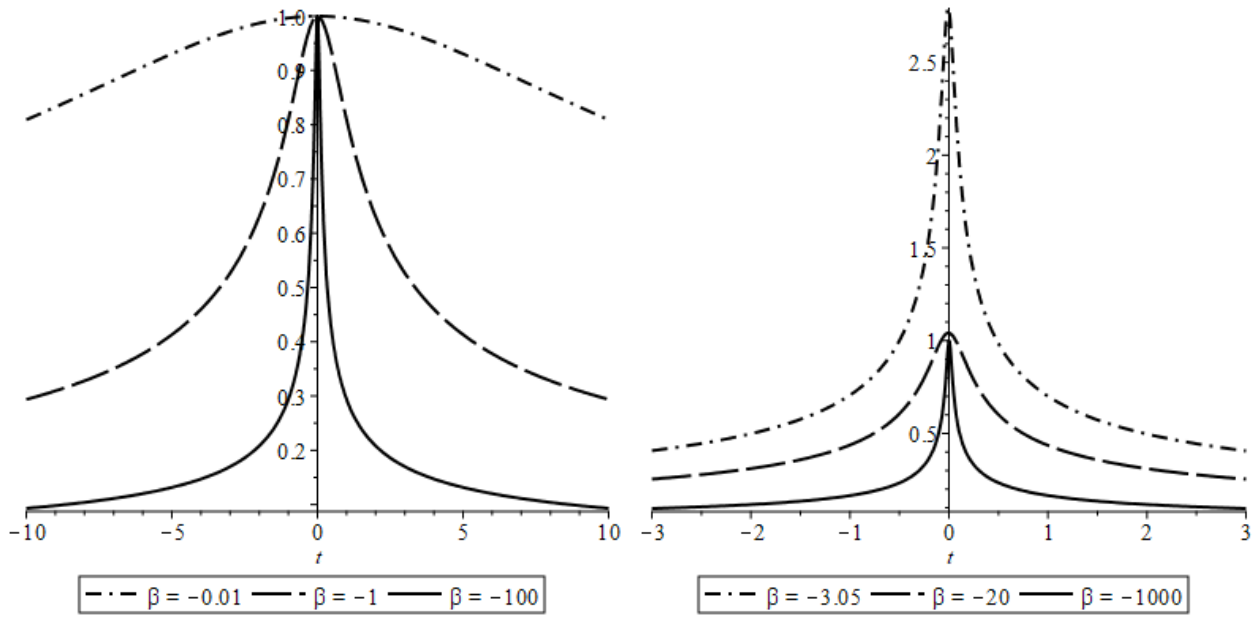
Проверка подтверждает, что при выполнении условий (28) аппроксиманта

$$[2,2]=\frac{3a_0^5}{3a_0-12a_1t-4a_0^5\beta t^2} \qquad (29)$$

дает точное рациональное решение уравнения (1):

$$x=\left(\frac{3a_0^5}{3a_0-12a_1\left(t-t_0\right)-4a_0^5\beta\left(t-t_0\right)^2}\right)^{\frac{1}{4}}. \qquad (30)$$

Автономное уравнение (1) допускает сдвиг по независимой переменной $t\to\left(t-t_0\right)$ в своем решении.



(а) (б)

Рис. 3. Графики решения (30) при а) $a_1=0$, $a_0=1$; б) $a_1=1$, $a_0=1$

Решение (30) является вещественной ограниченной функцией при

$$\beta < -\frac{3a_1^2}{a_0^6}. \qquad (31)$$

Примеры графиков рационального решения (30) показаны на рис. 3.

Обсуждение

Методы возмущений всегда считались эффективным инструментом построения приближенных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Однако, несколько первых членов асимптотического ряда не всегда позволяют получить исчерпывающую информацию о поведении решения, а построение высших приближений усложняется громоздкостью вычислений. С развитием компьютерной техники эта проблема отошла на второй план, и современные пакеты символьной математики позволяют получать любое число членов ряда. Метод геометрического ряда имеет несколько существенных отличий от классических методов возмущений.

1. Идеология МГР базируется на методе бесконечных степенных рядов Ньютона, сходящихся как геометрическая прогрессия [10, 11].

2. МГР может трактоваться как асимптотический, однако позволяет получать точные решения нелинейных дифференциальных уравнений, используя конечное число членов ряда. Обычно хватает первых $4P$ членов ряда, где P – порядок полюса искомого решения. Большинство возникающих в приложениях уравнений имеют решения с полюсами не выше второго порядка [12]. Здесь можно провести аналогию с методом сопряженных градиентов решения систем линейных алгебраических уравнений. Этот метод, итерационный по структуре, позволяет получать решение за конечное число шагов [13].

3. Параметр, по степеням которого производится суммирование, не обязательно должен быть малым [14, 15, 16]. При суммировании по степеням экспонент или независимой переменной, необходимость в формальном малом параметре отпадает в принципе.

В данной статье дальнейшее развитие получил метод геометрического ряда – на его основе получены точные уединенные, периодические и рациональные решения нелинейного дифференциального уравнения. Вычисления проведены с использованием оригинального программного комплекса на платформе Maple. Простота внутренней структуры и легкость алгоритмизации свидетельствуют об эффективности МГР при решении задач нелинейной математической физики.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 20-38-70158, 20-01-00123.

Литература

1. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
2. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988, 328 с.
3. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I., Andrianov I.V. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Nonlinear Dynamics. 2019. Т. 98. № 1. С. 185-194.
4. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М. Нелинейные продольные магнитоупругие волны в стержне // Нелинейный мир. 2009. Т. 7. № 7. С. 533-540.
5. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Journal of Sound and Vibration. 2021. Т. 491. 115752.
6. Конт Р.М., Мюзетт М. Метод Пенлеве и его приложения. М.: Институт компьютерных исследований; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011, 340 с.
7. Elias-Zuniga A. Exact solution of the cubic-quintic Duffing oscillator // Applied Mathematical Modelling. 2013. Т. 37. С. 2574–2579.
8. Remmi S.K., Latha M.M. Cubic quintic septic Duffing oscillator: An analytical study // Chinese Journal of Physics. 2018. Т. 56. №5. С. 2085-2094.
9. Бочкарев А.В., Землянухин А.И. Метод геометрического ряда построения точных решений нелинейных эволюционных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 7, С. 1113–1125.
10. Ньютон И. Математические работы. Москва–Ленинград: ОНТИ, 1937. 478 с.
11. Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук – первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. Серия "Современная математика для студентов". М.: Наука, 1989, 96 с.
12. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. дом “Интеллект”, 2010. 368 с.
13. Ортега Д., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 1986.
14. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Weichert D. Improved continuous models for discrete media // Math. Prob. Eng. 2010, 986242.
15. Awrejcewicz J., Andrianov I.V., Manevitch L.I. Asymptotic Approaches in Nonlinear Dynamics: New Trends and Applications. Berlin: Springer, 1998.
16. Андрианов И., Аврейцевич Я. Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 276 с.