Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: **mathmod.esrae.ru/31-114**
Ссылка для цитирования этой статьи:
Ерофеев В.И., Мальханов А.О. Влияние упругой нелинейности на волновые процессы в средах с дислокациями // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2020. № 3

УДК 539.3 DOI: 10.24411/2541-9269-2020-10301

ВЛИЯНИЕ УПРУГОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В СРЕДАХ С ДИСЛОКАЦИЯМИ

Ерофеев В.И.[1], Мальханов А.О.[2]
[1]Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия, erof.vi@yandex.ru
[2]Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия, alexey.malkhanov@gmail.com

THE INFLUENCE OF ELASTIC NONLINEARITY ON WAVE PROCESSES IN MEDIA WITH DISLOCATIONS

Erofeev V.I.[1], Malkhanov A.O.[2]
[1]Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia, erof.vi@yandex.ru
[2]Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia, alexey.malkhanov@gmail.com

Аннотация. В рамках математической модели, учитывающей взаимное влияние поля деформаций и ансамбля дислокаций в твердых телах, определены условия возникновения упругой волны удвоенной частоты и получены выражения, описывающие характерную длину, которая отвечает значительной перекачке энергии основной волны в энергию второй гармоники. Проанализирована зависимость этой характерной длины от частоты основной волны, массы дислокаций и коэффициента акустодислокационного взаимодействия в условиях проявления упругой нелинейности. Получены выражения, описывающие зависимость ширины солитона дислокационного смещения от величины эффективной массы единицы длины дислокации и коэффициента акустодислокационного взаимодействия.

Ключевые слова: деформируемое твердое тело, упругая нелинейность, дислокации, волновые процессы.

Abstract. Within the framework of a mathematical model that takes into account the mutual influence of the deformation field and an ensemble of dislocations in solids, the conditions for the appearance of an elastic wave of double frequency are determined and expressions are obtained that describe the characteristic length at which a significant transfer of the energy of the fundamental wave to the energy of the second harmonic should be expected. The dependence of this characteristic length on the frequency of the fundamental wave, the mass of dislocations, and the coefficient of acoustodislocation interaction under conditions of manifestation of elastic nonlinearity is analyzed. Expressions are obtained that describe the dependence of the width of the dislocation displacement soliton on the effective mass per unit length of the dislocation and on the coefficient of acoustodislocation interaction.

Key words: deformable solid, elastic nonlinearity, dislocations, wave processes.

1.Введение

С середины прошлого века активно ведется экспериментальное и теоретическое изучение закономерностей распространения упругих волн в твердом теле с дислокациями. Данная задача представляет большой научный и практический интерес. Известно, что дислокации, т.е. линейные дефекты кристаллической решетки, нарушающие правильное чередование атомных плоскостей, влияют на процессы пластического деформирования и разрушения материалов под воздействием напряжений. Однако дислокации влияют не только на прочность твердых тел, но и на их электросопротивление, внутреннюю энергию, оптические, полупроводниковые, магнитные и другие свойства [1, 2], определяют мозаичную структуру реальных кристаллов, топографию поверхности и характер роста кристаллов при малых пересыщениях. Между характеристиками распространения упругих волн в материале и параметрами дислокационной микроструктуры существует взаимосвязь, что подтверждается результатами экспериментальных исследований. Эта взаимосвязь делает возможным применение неразрушающих методов для изучения дислокационной микроструктуры, что имеет большую практическую ценность. Поэтому оценку механических свойств материала прогнозирование остаточного ресурса можно осуществлять при помощи анализа характеристик распространения упругих волн в твердом теле, отслеживая изменения, происходящие с дислокационной микроструктурой. Таким образом, задача развития теоретических основ описания распространение упругих волн в твердом теле с дислокациями, представляется актуальной.

Следует заметить, что в теории упругих дислокаций существуют проблемы, для описания которых, требуется учет нелинейных эффектов. Во-первых, необходимость решать задачи о равновесии и устойчивости тел, испытывающих конечные деформации и содержащих дефекты. Во-вторых, моделирование ситуаций, когда величины характеристик дефектов (векторов Бюргерса, Франка) не являются малыми. В-третьих, следует упомянуть факт, что в линейной теории упругости вблизи дефекта деформации и напряжения неограниченно возрастают, так что эти гипотезы в рассматриваемом случае не приемлемы.

Решение различных задач о дислокациях в нелинейно-упругих телах рассматривается в работах 3. Веселовски, Б. К. Д. Гэролы, А. Зегера, А. А. Зеленина, Л. М. Зубова, М. И. Карякина, 3. Кнесла, А. М. Косевича, В. А. Стрельцова, К. Теодосиу, В. В. Токия, Ф. Цемелы, В. Т. Шматова и др. (обзор полученных результатов можно найти в диссертации [3]). Точные решения таких задач найдены лишь в исключительных случаях; в основном это относится

ISSN 2541-9269

к несжимаемым материалам. В случае сжимаемых материалов известны только два точных решения в задачах о клиновой дисклинации — для полулинейного материала и упрощенного варианта материала Блейтца и Ко.

Кроме этого, необходимо учитывать процессы, протекающие в ядре дислокации – области, тесно примыкающей к ее оси, где линейная теория упругости неприменима. Существует несколько «упругих» моделей ядра — полость, полость с жидкостью, модель линейного расширения, включение другой фазы и т.д. Поскольку область вблизи оси дислокации является областью с высокой концентрацией напряжений, то для построения модели, учитывающей нелинейно-упругие свойства среды, необходим анализ поведения упругих полей дислокации вблизи её оси.

2.Математическая модель

Для описания распространения ультразвука в твердом теле, с учетом наличия в нем дислокаций, была предложена следующая система уравнений [4]:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_i = \frac{\partial}{\partial x_k} P_{ik} , \tag{1}$$

$$A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi_i + B \frac{\partial}{\partial t} \xi_i = f_i. \tag{2}$$

Запишем свободную энергию кристалла F как функцию переменных деформаций U_{ij} и акустического смещения ξ_i:

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{ijkl}U_{ij}U_{kl} + \frac{1}{2}c_{ik}\xi_i\xi_k + \frac{1}{2}\beta c_{ijkl}\left(b_i\xi_j + b_j\xi_i\right)U_{kl}, \tag{3}$$

(где λ_{ijkl} – модули упругости, c_{ik} – модули «жесткости» дислокации, β_{ijkl} – тензор акустодислокационного взаимодействия, b_j – вектор Бюргерса) и используя равенства:

$$P_{ik} = \frac{\partial}{\partial U_{ik}} F, f_i = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} F, \tag{4}$$

можно, с учетом выражения для свободной энергии кристалла F, вычислить правые части в уравнениях (1) и (2).

Рассматривая далее плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x в кубическом кристалле, однородном вдоль осей y и z, получим следующие уравнения движения ($U_k = U$, $\xi_i = \xi$, $i,k = 1$):

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} U = \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \xi, \\ A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi + B \frac{\partial}{\partial t} \xi = -\beta \frac{\partial}{\partial x} U, \end{gathered} \tag{5}$$

Учтем упругую нелинейность подсистемы, тогда система сводиться к одному уравнению относительно упругого смещения:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial t^4} - c^2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{B}{A}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - c^2\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}\right) + \frac{\beta^2}{A\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \\ = \frac{c^2\alpha}{2}\frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \frac{c^2\alpha}{2}\frac{B}{A}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \qquad (6)$$

где c – скорость продольной волны в материале, а $\beta = \beta_{ijkl} \cdot b_j$ – коэффициент акустодислокационного взаимодействия, $\alpha = \frac{3\lambda+6\mu+\nu_1+6\nu_2+8\nu_3}{\lambda+\mu}$- коэффициент, характеризующий нелинейность материала, λ, μ - константы Ламе второго порядка, ν_{1-3}- константы Ламе третьего порядка [5, 6].

3. Генерация квазигармонической волны удвоенной частоты (второй гармоники)

Уравнение (6) содержит квадратичную нелинейность. Известно, что возможен процесс генерации второй гармоники в среде, обладающей квадратичной нелинейностью. Считаем, что можно пренебречь другими нелинейными эффектами такими как самовоздействие, генерация высших гармоник и т.д. Тогда, в среде распространяются только две волны: на основной ω, и удвоенной 2ω частотах. В слабо нелинейной среде амплитуды волн при прохождении волной расстояния порядка длины волны будут медленно меняющимися функциями координат [7, 8]. Решение уравнения (6) будем искать в виде:

$$U = U_1(\varepsilon x)e^{i(\omega t - kx)} + U_2(\varepsilon x)e^{2i(\omega t - kx)} + c.c., \qquad (7)$$

где через «с.с.» обозначены комплексно – сопряженные члены, U_1, U_2 - комплексные амплитуды; ε - малый параметр; ω – частота основной волны; k – волновое число.

После подстановки выражения (7) в уравнение (6), сохраняя слагаемые порядка малости ε получим следующую систему уравнений для амплитуд:

$$\frac{dU_1}{dx} = \frac{c^2\alpha k^2\omega^2\rho A}{\varepsilon(-c^2\omega^2 A\rho - \beta^2)} U_2 U_1^*, \qquad (8)$$

$$\frac{dU_2}{dx} = \frac{c^2\alpha k^2\omega^2\rho A}{\varepsilon\cdot 4(-c^2\omega^2 A\rho - \beta^2)} U_1^2, \qquad (9)$$

видно, что взаимодействие первой и второй гармоник имеет несимметричный характер. В уравнение для второй гармоники в виде вынуждающей силы входит квадрат амплитуды первой гармоники. Амплитуда второй гармоники входит в уравнение для первой гармоники в виде параметра. Следовательно, вторая гармоника воздействует на первую лишь при наличии сигнала первой гармоники, в то время как первая гармоника всегда генерирует вторую гармонику.

Полагаем, что на границе материала *x=0* была возбуждена только волна частоты ω, в то время как волна удвоенной частоты на границе отсутствовала. Это позволяет задать следующие условия:

$$U_1(0) = U_0, \quad U_2(0) = 0. \tag{10}$$

Изучим генерацию гармоники в случае, когда ее амплитуда мала по сравнению с амплитудой основной волны $|U_2| << |U_1|$. В этом случае, пренебрегается обратным влиянием второй гармоники на основную волну, и правая часть в (8) полагается равной нулю. Следовательно, вторая гармоника возбуждается в заданном поле основной волны:

$$\frac{dU_2}{dx} = -\frac{\theta}{4}U_0^2, \tag{11}$$

где $\theta = \frac{c^2\alpha k^2\omega^2\rho A}{\varepsilon(-c^2\omega^2 A\rho - \beta^2)}$, а амплитуда основной волны не меняется $(U_1(x) \approx U_0)$. Интегрируя последнее уравнение, находим:

$$|U_2| = \frac{\theta}{4}U_0^2 x. \tag{12}$$

Амплитуда гармоники растет пропорционально пройденному расстоянию. В силу наложенного условия $|U_2| << |U_1|$ формула (12) справедлива до длины $x << L_{нл}$, где

$$L_{нл} = \frac{2\varepsilon\left[1+\frac{\beta^2}{c^2\omega^2\rho A}\right]}{U_0 k^2\alpha}. \tag{13}$$

Из закона дисперсии следует, что значение волнового числа k равно:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2\left(1+\frac{\beta^2}{A\rho c^2\omega^2}\right)}. \tag{14}$$

Тогда выражение для длины $L_{нл}$ примет вид:

$$L_{нл} = \frac{2\varepsilon\cdot c^2\left[1+\frac{\beta^2}{c^2\omega^2\rho A}\right]^2}{U_0\omega^2\alpha}. \tag{15}$$

Таким образом $L_{нл} \sim \frac{1}{U_0}$. При длине $x << L_{нл}$, амплитуда второй гармоники равна половине значения U_0,т.е.

$$U_2 = \frac{1}{2}U_0. \tag{16}$$

При $x \to \infty$ энергия основной волны полностью перекачивается в энергию второй гармоники. Значительную перекачку энергии основной волны в энергию второй гармоники следует ожидать на длине:

$$L_{нл} = \frac{2}{\theta U_0} = \frac{2\varepsilon(c^2\omega^2 A\rho+\beta^2)}{U_0(c^2\alpha k^2\omega^2\rho A^2)}. \quad (17)$$

Проанализируем зависимость $L_{нл}$ от частоты ω, массы дислокации A коэффициента акустодислокационного взаимодействия β, и коэффициента нелинейности α.

Рассмотрим зависимость длины $L_{нл}$ от частоты основной волныw. При малых значениях ω: $L_{нл} \approx \frac{\beta^4}{c^4\rho^2A^4\omega^8}$, т.е. $L_{нл}\sim\frac{1}{\omega^8}$; больших значениях w: $L_{нл}\sim\frac{1}{\omega^2}$.

Аналогично рассмотрим зависимости $L_{\text{нл}}$ от массы дислокаций. При малых значениях A: $L_{\text{нл}}\sim\frac{1}{A^2}$; при больших значениях A $L_{\text{нл}}$ от нее не зависит: $L_{нл}\sim\frac{c^2}{U_0\omega^2} = const.$

Рассмотрим также зависимости $L_{\text{нл}}$ от коэффициента нелинейностиα. Длина $L_{\text{нл}}$ обратно пропорциональна α: $L_{нл}\sim\frac{1}{\alpha}$.

Кроме того, при малых значениях β длина волны не зависит от коэффициента акустодислокационного взаимодействия: $L_{нл} \approx \frac{c^2}{\xi_0\omega^2} = const$; при больших β: $L_{\text{нл}} \approx \frac{\beta^4}{c^4\xi_0\omega^8\rho^2A^2}$, т.е. $L_{нл}\sim\beta^4$.

4. Нелинейные стационарные волны

Если влияние диссипации на эволюцию волновых процессов в (6) мало $\frac{B}{A} \to 0$, то в результате конкуренции дисперсионных и нелинейных факторов в системе могут сформироваться стационарные волны.

Решение уравнения (6) будем искать в виде:

$$U(x,t) = U(\eta), \quad (18)$$

где $\eta = x - Vt.$

V- скорость стационарной волны (заранее не известна). Волна смещения в этом случае описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{\beta^2 U}{A\rho V^4\left[1-\frac{c^2}{V^2}\left(1+\alpha\frac{dU}{d\eta}\right)\right]} = 0. \tag{19}$$

Если $V > c$, т.е. если нелинейная волна распространяется быстрее, чем линейная, то заместитель во втором, слагаемом этого уравнения можно разложить в ряд Тейлора, и (19) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2U}{d\eta^2} + m_1 U + m_2\frac{d(U^2)}{d\eta} = 0, \tag{20}$$

$$m_1 = \frac{\beta^2\left(1+\frac{c^2}{V^2}\right)}{A\rho V^4}, \quad m_2 = \frac{\beta^2 c^2\alpha}{2A\rho V^6}. \tag{21}$$

Первая из констант всегда положительна $(m_1 > 0)$.Знак второй константы определяется знаком коэффициента нелинейности α. Для большинства металлов и их сплавов $\alpha < 0, (m_2 < 0)$ [7, 8], для некоторых композитов $\alpha > 0, (m_2 > 0)$.

Анализ уравнения (20) на фазовой плоскости $\left(U, \frac{dU}{d\eta}\right)$ показывает, что в начале координат имеется особая точка типа «центр». Прямая $\left(\frac{dU}{d\eta} = \varepsilon *\right)$ определяет устойчивые движения (замкнутые фазовые траектории). Эта величина характеризует максимальную осевую деформацию, вызываемую распространением упругой волны:

$$\varepsilon * = \frac{m_1}{2m_2} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{V^2}{c^2} + 1\right). \tag{22}$$

По модулю деформация растет с увеличением относительного значения скорости нелинейной стационарной волны, т.е. $|\varepsilon *| \sim (V/c)^2$и уменьшается с увеличением α: $|\varepsilon *| \sim \frac{1}{|\alpha|}$.

Фазовый портрет позволяет оценить зависимость волнового числа нелинейной волны *(к)* от ее амплитуды *(а):*

$$\frac{k}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a/a_0}{\pi\varepsilon^*}\right)^2}}, \tag{23}$$

где k_0,a_0- волновое число и амплитуда гармонической (линейной) волны.

С возрастанием амплитуды волны относительное значение волнового числа убывает (длина волны растет). При $\frac{a}{a_0} \to \infty, \frac{k}{k_0} \to \frac{\varepsilon*}{a/a_0}$.

5. Заключение

Из приведенного выше материала следует, что учет упругой нелинейности при распространении акустической волны в твердом теле приводит к появлению квадратичной нелинейности, приводящей к возможности генерации волны удвоенной частоты, взаимодействие гармоник носит несимметричный характер. Первая гармоника всегда генерируется второй. Вторая гармоника влияет на первую только при наличии сигнала первой гармоники. Длина, на которой следует ожидать перекачку энергии основной волны в энергию второй гармоники, зависит от частоты основной волны ω, массы дислокаций A, коэффициента акустодислокационного взаимодействия β. Рассмотрены условия, при которых формируются нелинейные стационарные волны. Построен фазовый портрет, оценена зависимость волнового числа нелинейной волны от ее амплитуды.

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 20-38-70158-стабильность, № 19-08-00965-а).

Литература

1. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М. Нелинейные продольные магнитоупругие волны в стержне // Нелинейный мир. 2009. Т. 7. № 7. С. 533-540.
2. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Мальханов А.О. Нелинейные продольные локализованные волны в пластине, взаимодействующей с магнитным полем // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3. № 4. С. 5-15.
3. Пустовалова О.Г. Разрывные решения задач нелинейной теории упругих дислокаций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ростов-на-Дону: ЮФУ. 2008. 106 с.
4. Бурлак Г.Н., Островский И.В. Гистерезисные акустические явления, связанные с дислокационной нелинейностью в кристаллах // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. №18. С.69-74.
5. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 520 с.
6. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
7. Дж. Уизем, Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
8. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.