Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" http://mathmod.esrae.ru/
URL статьи: mathmod.esrae.ru/31-116
Ссылка для цитирования этой статьи:
Бочкарев А.В., Землянухин А.И., Ратушный А.В. Некоторые двумерные аналитически разрешимые модели нелинейной волновой динамики деформируемых систем// Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2020. №3
Выполнено при поддержке гранта РФФИ 20-01-00123

УДК 534.1:517.957 DOI: 10.24411/2541-9269-2020-10303

НЕКОТОРЫЕ ДВУМЕРНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИ РАЗРЕШИМЫЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Бочкарев А.В.[1], Землянухин А.И.[2], Ратушный А.В.[3]
[1]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, ab2009sar@list.ru
[2]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, zemlyanukhinai@sstu.ru
[3] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, sania.ratushnyy@gmail.com

SOME TWO-DIMENSIONAL ANALYTICALLY SOLVABLE MODELS OF NONLINEAR WAVE DYNAMICS OF DEFORMABLE SYSTEMS

Bochkarev A.V.[1], Zemlyanukhin A.I.[2], Ratushnyi A.V.[3]
[1]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, ab2009sar@list.ru
[2]Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, zemlyanukhinai@sstu.ru
[3] Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, sania.ratushnyy@gmail.com

Аннотация. Рассмотрены аналитически разрешимые пространственно – двумерные обобщения неинтегрируемых уравнений Шамеля – Кавахары, мКдВ – Кавахары и мКдВ – Кавахары – синус Гордона, моделирующие распространение слабодвумерных волн в деформируемых системах. Построены классы их точных решений, обсуждена важность исследования их устойчивости относительно поперечных возмущений, установлены условия их физической реализуемости.

Ключевые слова: аналитически разрешимые модели, нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, точные решения, эллиптические функции Якоби

Abstract. Analytically solvable spatially two-dimensional generalizations of the non-integrable equations of Schamel - Kawahara, mKdV - Kawahara and mKdV - Kawahara – sine -

Gordon are considered, which simulate the propagation of weakly two-dimensional waves in deformable systems. Classes of their exact solutions are constructed, and the importance of studying their stability against transverse perturbations is discussed, the conditions for their physical feasibility are established.

Keywords: analytically solvable models, nonlinear partial differential equations, exact solutions, Jacobi elliptic functions

Введение

Большинство фундаментальных результатов в области нелинейной волновой динамики получено при анализе локализованных или уединенных волн в пространственно – одномерных системах [1]. В двумерном случае, помимо локализации вдоль направления распространения возмущения, приводящей к образованию плоской уединенной волны, возможна локализация в поперечном направлении [2]. Это приводит к необходимости исследования устойчивости плоских волн к поперечным возмущениям. Здесь основные результаты получены для уравнения Кадомцева – Петвиашвили (КП) и его простейших обобщений. В [3] показано, что уединенные и периодические стационарные волны в среде с отрицательной дисперсией устойчивы, а с положительной дисперсией – неустойчивы относительно поперечных возмущений. В случае двумерного обобщения уравнения Гарднера, в отличие от модели КП, неустойчивость уединенной волны в среде с отрицательной дисперсией оказывается возможной и определяется знаком кубически нелинейного слагаемого [2]. В [4] проведено сравнение двумерного обобщения уравнения Шамеля [5] с уравнением КП и установлены качественные отличия в выводах о поперечной устойчивости уединенных волн.

При моделировании сред с неклассическими свойствами возникают неинтегрируемые квазигиперболические уравнения сложной аналитической структуры [6-13], и на первый план выходит проблема построения аналитически разрешимых моделей. Нахождение классов точных и приближенных решений таких моделей – это важная самостоятельная задача, решение которой необходимо для дальнейшего анализа.

В данной статье вводятся в рассмотрение и исследуются двумерные неинтегрируемые обобщения уравнений Шамеля и мКдВ, моделирующие распространение слабодвумерного пучка продольных волн в нелинейно – упругой неоднородной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с внешней нелинейно – упругой средой. Статья организована следующим образом. В первом параграфе найдены точные уединенно – волновые решения двумерных версий уравнений Шамеля – Кавахары и КдВ – Шамеля - Кавахары. Во втором параграфе, с использованием аппарата эллиптических функций, построены классы точных уединенно – волновых и периодических решений двумерного уравнения мКдВ – Кавахары с источником, проанализирована их физическая реализуемость. В третьем параграфе найдены точные кинкоподобные решения обобщенной двумерной модели мКдВ – Кавахары –

синус Гордона. В заключении приведены основные результаты и выводы.

1. Двумерное уравнение Шамеля-Кавахары

Уравнение Шамеля – Кавахары, впервые появившееся при моделировании осесимметричных продольных волн в нелинейно – упругой цилиндрической оболочке, усиленной системой стрингеров и шпангоутов [11], имеет вид

$$u_\tau + c_1 |u|^{1/2} u_\xi + c_2 u_{\xi\xi\xi} - c_3 u_{\xi\xi\xi\xi\xi} = 0. \qquad (1)$$

Дополнительный учет поперечной пространственной координаты, вдоль которой изменение параметров волны предполагается медленным [6], приводит к обобщенному уравнению Шамеля – Кавахары – Кадомцева – Петвиашвили

$$\left(u_\tau + c_1 |u|^{1/2} u_\xi + c_2 u_{\xi\xi\xi} - c_3 u_{\xi\xi\xi\xi\xi}\right)_\xi = u_{\eta\eta}. \qquad (2)$$

После перехода в систему координат бегущей волны $z = \xi + k_1\eta - V\tau$ легко показать, что точное уединенно – волновое решение этого уравнения имеет вид

$$u(z) = \frac{324\beta^4}{\alpha^2 \left[\cosh\left(\sqrt{\beta} z + \ln\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{2}\beta}\right)\right) + 1\right]^4}, \qquad (3)$$

где

$$\alpha = \frac{c_1}{165 c_3}, \quad \beta = \frac{c_2}{41 c_3}, \qquad (4)$$

ε – произвольная постоянная и выполняется условие

$$V = 400 c_3 \beta^2. \qquad (5)$$

Известно, что солитоноподобные решения стандартного двумерного уравнения Шамеля устойчивы относительно поперечных возмущений [14]. Для нового уравнения (2), содержащего дополнительный член, характеризующий влияние высокочастотной дисперсии на волновой процесс, вопрос о поперечной устойчивости уединенных волн пока остается открытым.

Одновременный учет квадратичной физической нелинейности материала оболочки и нелинейности «типа Шамеля» позволяет получить для компоненты продольного смещения обобщенное уравнение КдВ – Шамеля – Кавахары – КП

$$\left(u_\tau + c_1 |u|^{1/2} u_\xi + c_4 u u_\xi + c_2 u_{\xi\xi\xi} - c_3 u_{\xi\xi\xi\xi\xi}\right)_\xi = u_{\eta\eta}. \qquad (6)$$

В данном случае точное солитоноподобное решение имеет вид

$$u(z) = \frac{\left(\beta\sqrt{105\delta} - 14\alpha\right)^2}{169\delta^2 \left[\cosh\left((283920\delta)^{-1/4} \left(\beta\sqrt{105\delta} - 14\alpha\right)^{1/2} z\right)\right]^4}, \qquad (7)$$

где

ISSN 2541-9269

$$\alpha=\frac{c_1}{c_3},\quad \beta=\frac{c_2}{c_3},\quad \delta=\frac{c_4}{c_3}. \tag{8}$$

Для более адекватного анализа волнового процесса в деформируемых системах, нередко приходится учитывать влияние внешней нелинейно – упругой среды. При этом, в правых частях уравнений (2), (6) возникает полином по степеням (обычно целым) зависимой переменной. Точных решений в этих условиях построить не удается, а подбор экзотических полиномов по дробным степеням не позволяет получить физически состоятельных результатов.

2. Двумерное уравнение мКдВ – Кавахары

Физическая нелинейность материала деформируемых систем часто моделируется на основе кубической зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций [15]. Использование аналогичной зависимости для учета влияния окружающей нелинейно – упругой среды, приводит, в пространственно – двумерном случае к неинтегрируемому квазигиперболическому уравнению для компоненты продольного смещения

Перейдем в уравнении

$$u_{xt}+c_1u_{xx}+c_2u_x^2u_{xx}+c_3u_{xxxx}+c_4u_{xxxxxx}=c_5u_{yy}+d_1u+d_2u^3 \tag{9}$$

к переменной бегущей волны $z=x+k_1y-Vt$:

$$\left(c_1-V-c_5k_1^2\right)u_{zz}+c_2u_z^2u_{zz}+c_3u_{zzzz}+c_4u_{zzzzzz}=d_1u+d_2u^3. \tag{10}$$

Подстановка степенной функции $u=a_0z^{-p}$ в уравнение (10) показывает, что баланс его ведущих членов достигается при $p=1$. Следовательно, искомое точное решение уравнения имеет простой полюс.

Будем искать решение уравнения (10) в форме

$$u=A\,\mathrm{sn}\left(Kz,m\right), \tag{11}$$

где sn() – эллиптический синус, A,K,m – произвольные постоянные. Подстановка (11) в уравнение (10) после группировки по степеням q функции $\mathrm{sn}\left(Kz,m\right)$ дает

$$\begin{aligned}
q=6:&\quad K^4m^4\left(360K^2c_4m^2+A^2c_2\right)=0,\\
q=4:&\quad K^4m^2\left(280K^2c_4m^4+\left(A^2c_2+280K^2c_4-8c_3\right)m^2+A^2c_2\right)=0,\\
q=2:&\quad 182m^2c_4K^6\left(m^4+\frac{62}{13}m^2+1\right)-2m^2K^2\left(c_5k_1^2+V-c_1\right)-A^2d_2+\\
&\quad+K^4\left(m^4\left(A^2c_2-20c_3\right)+4m^2\left(A^2c_2-5c_3\right)+A^2c_2\right)=0,\\
q=0:&\quad -c_4K^6\left(m^2+1\right)\left(m^4+134m^2+1\right)+K^2\left(m^2+1\right)\left(c_5k_1^2+V-c_1\right)-d_1+\\
&\quad+K^4\left(m^4c_3+m^2\left(14c_3-A^2c_2\right)-A^2c_2+c_3\right)=0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Решение системы нелинейных уравнений (12) имеет две ветви Br_1 и Br_2:

$$Br_1 = \left\{ d_1 = -K^2 \left(A^2K^2c_2 + K^4c_4 - K^2c_3 - c_5k_1^2 - V + c_1 \right), \quad d_2 = K^4c_2, \quad m = 0 \right\},$$

$$\begin{aligned} Br_2 = \{ & c_2 = -360m^2c_4A^{-2}K^2, \quad c_3 = -10c_4K^2\left(m^2+1\right), \\ & d_1 = -K^2\left(m^2+1\right)\left(K^4c_4\left(11m^4 - 86m^2 + 11\right) - c_5k_1^2 - V + c_1\right), \\ & d_2 = 2m^2A^{-2}K^2\left(K^4c_4\left(11m^4 - 86m^2 + 11\right) - c_5k_1^2 - V + c_1\right)\}. \end{aligned} \qquad (13)$$

Первая ветвь Br_1 определяет периодическое вещественное решение $u = A\,\mathrm{sn}(Kz, 0) \equiv A\sin(Kz)$ для случая нелинейной окружающей среды ($d_2 \neq 0$). В зависимости от знака коэффициента c_2 нелинейность среды может быть как мягкого ($d_2 < 0$), так и жесткого ($d_2 > 0$) типа. Физически содержательный случай, при котором сила реакции упругой среды имеет противоположный знак с ее деформацией, достигается при $d_1 > 0$, что приводит к неравенству для скорости волны

$$V > c_1 - c_5k_1^2 + K^2\left(A^2c_2 + K^2c_4 - c_3\right). \qquad (14)$$

Вторая ветвь Br_2 соответствует более общему случаю периодического решения, которое возникает только при мягкой нелинейности окружающей среды, поскольку из (13) следует $d_1d_2 < 0$. Зависимость “перемещение - усилие” для нелинейно-упругой среды с кубическим законом нелинейности $F = d_1u + d_2u^3$ имеет физический смысл, если является монотонно возрастающей во всем диапазоне изменения величины u и коэффициент при линейном слагаемом является положительным ($d_1 > 0$). Эти требования приводят к двум условиям:

$$\left\{ V > c_1 - c_5k_1^2 + K^4c_4\left(11m^4 - 86m^2 + 11\right), \quad m^2 < \frac{1}{5} \right\}. \qquad (15)$$

Таким образом, требования физичности приводят к невозможности существования периодических волн, профиль которых существенно отличается от синусоидального. В частности, не реализуется случай кинкоподобной волны $u = A\,\mathrm{sn}(Kz, 1) \equiv A\,\mathrm{th}(Kz)$. Отметим, что ветвь Br_2 (13) при $m = 1$ дает для уравнения (10) точное решение $A\,\mathrm{th}(Kz)$. Однако такое решение требует существования ненулевых стационарных решений $u = u_0 = const$, что не физично, если уравнение (10) моделирует распространение волн в оболочке при наличии внешней упругой среды, наличие нескольких состояний равновесия для которой вряд ли представляется возможным.

Чтобы выяснить, существуют ли периодические решения уравнения (10) при жестком типе нелинейности ($d_1d_2 > 0$), будем искать решение в форме

$$u = A\,\mathrm{cn}(Kz, m). \qquad (16)$$

Подстановка (16) в (10) приводит к системе уравнений

$$
\begin{aligned}
q=6:&\quad K^4m^4\left(-360K^2c_4m^2+A^2c_2\right)=0,\\
q=4:&\quad K^4m^2\left(-160K^2c_4m^4+\left(-280K^2c_4+8c_3\right)m^2+A^2c_2\right)=0,\\
q=2:&\quad 32m^2c_4K^6\left(m^4+14m^2+\frac{91}{16}\right)-2m^2K^2\left(c_5k_1^2+V-c_1\right)+A^2d_2-\\
&\quad -K^4\left(8c_3m^4+A^2c_2+20c_3m^2\right)=0,\\
q=0:&\quad -c_4K^6\left(16m^4+44m^2+1\right)+K^4\left(4c_3m^2+c_3\right)+\left(c_5k_1^2+V-c_1\right)K^2-\\
&\quad -A^2d_2-d_1=0,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

решение которой также имеет две ветви

$$
\begin{aligned}
&Br_1=\left\{d_1=-K^2\left(A^2K^2c_2+K^4c_4-K^2c_3-c_5k_1^2-V+c_1\right),\quad d_2=K^4c_2,\quad m=0\right\},\\
&Br_2=\left\{c_2=360m^2c_4A^{-2}K^2,\quad c_3=10c_4K^2\left(2m^2-1\right),\right.\\
&\qquad d_1=2K^2\left(\frac{1}{2}-m^2\right)\left(c_4K^4\left(64m^4-64m^2-11\right)+c_5k_1^2+V-c_1\right),\\
&\qquad \left.d_2=2m^2A^{-2}K^2\left(c_4K^4\left(64m^4-64m^2-11\right)+c_5k_1^2+V-c_1\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Первые ветви Br_1 из (13) и (18) совпадают, что легко объясняется. При $m=0$ эллиптические функции $\operatorname{sn}(x,m)$ и $\operatorname{cn}(x,m)$ вырождаются в $\sin(x)$ и $\cos(x)$, соответственно. Уравнение (10) является автономным и, если функция $\sin(x)$ является его решением при определенном выборе коэффициентов, то функция $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$ также является решением.

Вторая ветвь Br_2 (18) определяет периодическое решение для случая жесткой нелинейности. В самом деле, если предположить

$$m^2<\frac{1}{2}, \tag{19}$$

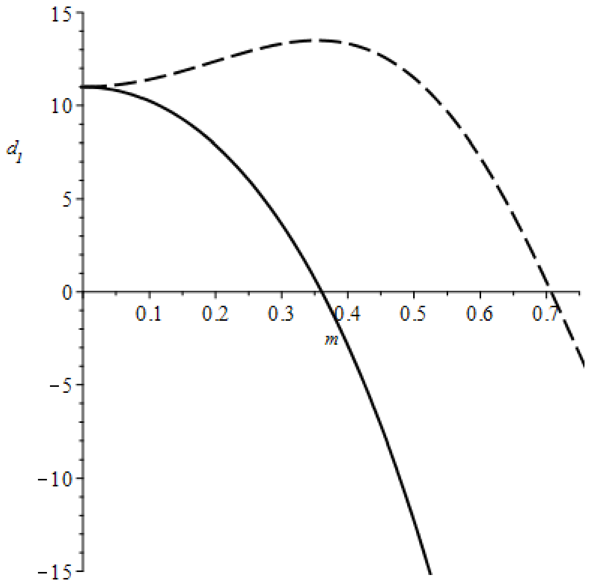
то из условия физичности $d_1>0$ следует, что

$$V>c_1-c_5k_1^2-c_4K^4\left(64m^4-64m^2-11\right) \tag{20}$$

и $d_2>0$. Кубический закон нелинейности упругой среды в жестком случае всегда представляется монотонно возрастающей функцией и никаких дополнительных требования на коэффициенты, кроме (19) и (20), не возникает.

Если предположить, что $m^2>\frac{1}{2}$, то получаем случай мягкой нелинейности ($d_2<0$), соблюсти для которой требование монотонного возрастания невозможно ни при каком выборе параметра m, то есть, этот случай следует признать физически несостоятельным. Заметим, что требование монотонности нелинейного закона деформирования внешней среды запрещает существование уединенно-волновых решений $u(x,t)$, для которых не соблюдается условие нулевой массы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,dx = 0$, аналогично, как это наблюдается для уравнения Островского.

Интересно отметить, что вторые ветви Br_2 в (13) и (18) при $m=0$ совпадают: $\{c_2 = d_2 = 0,\ c_3 = -10K^2 c_4,\ d_1 = -11K^2\left(K^4 c_4 + c_5 k_1^2 + V - c_1\right)\}$ и определяют синусоидальное решение линеаризованного уравнения (10). Графики зависимостей коэффициентов d_1 и d_2, характеризующих закон деформирования внешней упругой среды, от параметра m, представлены на рис. 1.



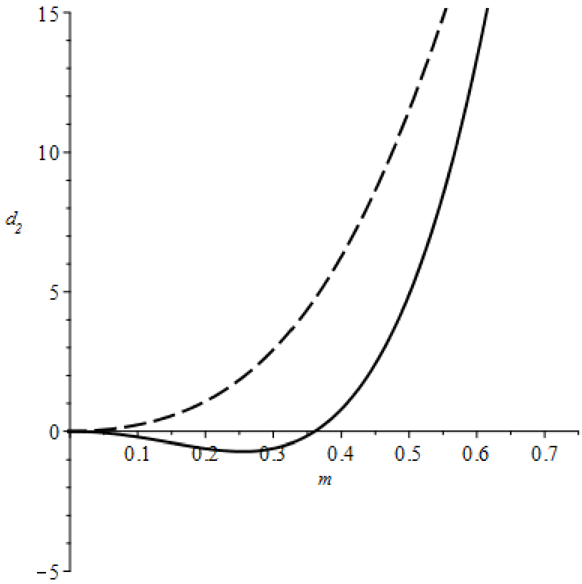


Рис. 1. Зависимости d_1 и d_2 от m в решениях Br_2 (13) (сплошная линия) и Br_2 (18) (пунктирная линия) при $K = A = 1,\ c_4 = -1,\ V = c_1$.

3. Двумерное уравнение мКдВ – Кавахары - синус - Гордона

В ряде случаев формальное усложнение математической модели позволяет получить дополнительную информацию, отсутствующую в упрощенном случае. Подобный подход эффективно использовался в ряде задач нелинейной акустики [16]. Заменяя в правой части (9) кубический полином нелинейной периодической функцией, получаем двумерное комбинированное уравнение мКдВ – Кавахары – синус Гордона. Такое уравнение может появиться в результате континуализации двумерной нелинейной цепочки на основе моделей Френкеля – Конторовой и Ферми – Паста – Улама:

$$u_{xt} + c_1 u_{xx} + c_2 u_x^2 u_{xx} + c_3 u_{xxxx} + c_4 u_{xxxxxx} = c_5 u_{yy} + d_1 \sin(u). \qquad (21)$$

После перехода к переменной бегущей волны $z = x + k_1 y - Vt$ имеем

$$\left(c_1 - c_5 k_1^2 - V\right)u_{zz} + c_2 u_z^2 u_{zz} + c_3 u_{zzzz} + c_4 u_{zzzzzz} = d_1 \sin(u). \qquad (22)$$

Разложение функции $\sin(u)$ в ряд Тейлора по степеням u с последующей подстановкой $u = a_0 z^{-p}$ показывает, что решение уравнения (22) имеет полюс нулевого порядка. В данной ситуации решение уравнение принято искать в форме

$$u = 2N \arctan\left(\exp(Kz)\right), \quad N \in \mathbb{N}, \qquad (23)$$

поскольку в этом случае как $\sin(u)$, так и производные по z любого порядка представляются рациональными функциями по степеням $\exp(Kz)$.

Подстановка (23) при $N = 2$ в уравнение (22) дает систему из трех нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned}
&e^{10Kz}, e^{0Kz}: \ -c_4 K^6 - c_3 K^4 + \left(c_5 k_1^2 + V - c_1\right)K^2 + d_1 = 0,\\
&e^{8Kz}, e^{2Kz}: \ 79 c_4 K^6 + \frac{1}{3}\left(21 c_3 - 16 c_2\right)K^4 + \left(c_5 k_1^2 + V - c_1\right)K^2 + d_1 = 0, \qquad (24)\\
&e^{6Kz}, e^{4Kz}: \ -841 c_4 K^6 + \left(11 c_3 - 8 c_2\right)K^4 + \left(c_5 k_1^2 + V - c_1\right)K^2 + d_1 = 0,
\end{aligned}$$

решение которой

$$c_2 = \frac{3}{2} c_3, \quad c_4 = 0, \quad d_1 = K^2\left(K^2 c_3 - c_5 k_1^2 - V + c_1\right) \qquad (25)$$

требует, чтобы коэффициент c_4 при старшей производной обратился в нуль.

Подстановка (15) при $N = 4$ в уравнение (22) дает систему:

$$\begin{aligned}
&e^{10Kz}, e^{0Kz}: \ -c_4 K^6 - c_3 K^4 + \left(c_5 k_1^2 + V - c_1\right)K^2 + d_1 = 0,\\
&e^{8Kz}, e^{2Kz}: \ 237 c_4 K^6 + \left(21 c_3 - 64 c_2\right)K^4 + 3\left(c_5 k_1^2 + V - c_1\right)K^2 - 5 d_1 = 0, \qquad (26)\\
&e^{6Kz}, e^{4Kz}: \ -841 c_4 K^6 + \left(11 c_3 - 32 c_2\right)K^4 + \left(c_5 k_1^2 + V - c_1\right)K^2 - 3 d_1 = 0,
\end{aligned}$$

решение которой

$$c_2 = \frac{2K^2 c_3 + c_5 k_1^2 + V - c_1}{8K^2}, \quad c_4 = 0, \quad d_1 = K^2\left(K^2 c_3 - c_5 k_1^2 - V + c_1\right) \qquad (27)$$

также требует, чтобы коэффициент c_4 при старшей производной обратился в нуль.

Наконец, подстановка (23) при $N = 6$ в уравнение (22) дает систему

$$\begin{aligned}
&e^{10Kz}, e^{0Kz}: \ -c_4 K^6 - c_3 K^4 + \left(c_5 k_1^2 + V - c_1\right)K^2 + d_1 = 0,\\
&e^{8Kz}, e^{2Kz}: \ 711 c_4 K^6 + \left(63 c_3 - 432 c_2\right)K^4 + 9\left(c_5 k_1^2 + V - c_1\right)K^2 - 55 d_1 = 0, \qquad (28)\\
&e^{6Kz}, e^{4Kz}: \ -841 c_4 K^6 + \left(11 c_3 - 72 c_2\right)K^4 + \left(c_5 k_1^2 + V - c_1\right)K^2 + 33 d_1 = 0,
\end{aligned}$$

которая имеет решение

$$c_2 = \frac{23K^2c_3 + 20\left(c_5k_1^2 + V - c\right)_1}{258K^2}, \quad c_4 = \frac{2}{43}\frac{K^2c_3 - c_5k_1^2 - V + c_1}{K^4},$$
$$d_1 = \frac{45}{43}K^2\left(K^2c_3 - c_5k_1^2 - V + c_1\right). \tag{29}$$

При других значениях параметра N система несовместна или имеет только тривиальное решение. Отметим, что для решения (29) наличие $\sin()$ в правой части уравнения (21) является определяющим: при $d_1 = 0$ коэффициент при старшей производной c_4 также должен обратиться в нуль.

Заключение

В статье введены в рассмотрение аналитически разрешимые пространственно – двумерные обобщения неинтегрируемых уравнений Шамеля – Кавахары, мКдВ – Кавахары и мКдВ – Кавахары – синус Гордона, моделирующие распространение слабодвумерных волн в деформируемых системах. Построены классы их точных решений, обсуждена важность исследования их устойчивости относительно поперечных возмущений, установлены условия их физической реализуемости. Показано, что уравнение (9) с правой частью в форме кубического полинома имеет точные решения периодического типа, выражающиеся через эллиптические функции Якоби. Эти решения существуют как для мягкого, так и для жесткого типа нелинейности. Выявлены ограничения на значения параметра эллиптической функции, при которых эти решения не нарушают требования физичности. Установлено, что уравнение (21) с правой частью в форме синуса от зависимой переменной также имеет три ветви точных кинкоподобных решений, отличающиеся амплитудой. Коэффициент при старшей производной в уравнении остается ненулевым только для решения с максимальной амплитудой.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 20-01-00123.

Литература

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 479 с.
2. Порубов А.В. О локализации двумерных нелинейных внутренних волн в двухслойной жидкости // Журнал технической физики. 2005. Т. 75. № 7. С. 48-51.
3. Zakharov V.E., Kuznetsov EA., Ruhenchik A.M. Soliton stability // Prepr. Inst. Automaton & Electrometry SB AN USSR. 1983. № 199. 62 p.
4. O’Keir I.S., Parkes E.J. The derivation of a modified Kadomtzev-Petviashvili equation and the stability of its solutions // Physica Scripta. 1997. Vol. 55. P. 135-142.

5. Schamel H. A modified Korteweg-de Vries equation for ion acousticwaves due to resonant electrons // J. Plasma Phys. 1973. Vol. 9. P. 377-387.
6. Потапов А.И., Солдатов И.Н. Квазиплоский пучок нелинейных продольных волн в пластине // Акустический журнал. 1984. Т. 30. Вып. 6. С. 819-822.
7. Дрейден Г.В., Порубов А.В., Самсонов А.М., Семенова И.В. Генерация и наблюдение солитона продольной деформации в пластине. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 21. С. 61-68.
8. Сокуринская Е.В. Некоторые точные решения задачи о нелинейных упругих волнах в пластине. // Письма в ЖТФ, 1994. Т. 20. Вып. 3. С. 36-41.
9. Шенявский Л.А. Влияние геометрической нелинейности на волны, распространяющиеся в свободной тонкой пластине // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 6. С. 1089-1094.
10. Erofeev V.I., Klyueva N.V. Solitons and nonlinear periodic strain waves in rods, plates and shells (a review) // Acoust. Phys. 2002. Vol. 48. № 6. P. 643–655.
11. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I., Andrianov I.V. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 98. № 1. P. 185-194.
12. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М. Нелинейные продольные магнитоупругие волны в стержне // Нелинейный мир. 2009. Т. 7. № 7. С. 533-540.
13. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Journal of Sound and Vibration. 2021. Vol. 491. 115752.
14. Yue Liu, Xiao-Ping Wang. Nonlinear stability of solitary waves of a generalized Kadomtsev-Petviashvili equation // Commun. Math. Phys. 1997. Vol. 183. P. 253-266.
15. Kauderer, H.: Nichtlineare Mechanik. Berlin: Springer, 1958.
16. Руденко О.В. “Экзотические” модели физики интенсивных волн: Линеаризуемые уравнения, точно решаемые задачи и неаналитические нелинейности // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26. № 3. С. 7-34.