

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/31-118

Ссылка для цитирования этой статьи:

Кондратов Д.В., Барулина М.А., Галкина С.А. Математическая модель круглого чувствительного элемента нанодатчика // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2020. №3

Выполнено при поддержке гранта РФФИ 19-08-00807

УДК 534.1:517.957

DOI: 10.24411/2541-9269-2020-10305

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КРУГЛОГО ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА НАНОДАТЧИКА

Кондратов Д.В.¹, Барулина М.А.², Галкина С.А.³

¹ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук (ИПТМУ РАН), г. Саратов, kondratovdv@yandex.ru

² Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук (ИПТМУ РАН), г. Саратов, marina@barulina.ru

³ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук (ИПТМУ РАН), г. Саратов, leokox@yandex.ru

MATHEMATICAL MODEL OF THE CIRCULAR SENSITIVE ELEMENT OF THE NANOSENSOR

Kondratov D.V.¹, Barulina M.A.², Galkina S.A.³

¹ Institute of Precision Mechanics and Control of the Russian Academy of Sciences (IPTMU RAS), Saratov, Russia, kondratovdv@yandex.ru

² Institute of Precision Mechanics and Control of the Russian Academy of Sciences (IPTMU RAS), Saratov, Russia, marina@barulina.ru

³ Institute of Precision Mechanics and Control of the Russian Academy of Sciences (IPTMU RAS), Saratov, Russia, leokox@yandex.ru

Аннотация. В работе приведены уравнения движения в перемещениях чувствительного элемента наноэлектромеханического датчика в виде круглой ортотропной размерно-зависимой нано-пластины. Наноэлектромеханические датчики являются логическим продолжением развития микроэлектромеханических датчиков в сторону уменьшения размеров компонентов датчика. Чувствительный элемент рассматривался как круглая пластина, находящаяся под действием распределенной силы. При выводе уравнений использовалась динамическая версия принципа виртуальных перемещений, теория ламинированных композитных пластин и оболочек третьего порядка и модифицированная теория парных напряжений.

Ключевые слова: наноэлектромеханические системы, математическая модель, круглая пластина, элементы датчиков, размерно-зависимые объекты, модифицированная теория

парных напряжений

Abstract. The article presents the equations of motion in the displacements of the round sensing element of a nanoelectromechanical sensor. The round sensing element was considered as a circular orthotropic size-dependent nano-plate under a distributed force applied to the top face of the plate. Nanoelectromechanical sensors are a logical stage of the evolution of microelectromechanical sensors towards reducing the size of sensor components. The equations were derived using a dynamic version of the principle of virtual displacements, the third-order theory of laminated composite plates and shells, and the modified couple stress theory.

Keywords: nanoelectromechanical systems, mathematical model, round plate, sensor elements, size-dependent objects, the modified couple stress theory

Введение

Нанотехнологии –относительно молодая область фундаментальной и прикладной науки, появление и успешное развитие которой в большой степени обусловили фундаментальные достижения в физике, материаловедении, биохимии, неклассической механике, сделанные еще в начале XX века. К настоящему времени нанотехнологии получили признание как один из приоритетов в развитии науки и технологии во многих странах. Одними из приоритетных направлений развития нанотехнологий являются создание компактных устройств нового поколения и разработка средств и математического обеспечения для компьютерного моделирования наноматериалов, наноустройств и нанотехнологий [1-4]. Такое внимание к наноустройствам вообще и нанодатчикам в частности обусловлено потенциальной возможностью создания на их основе систем, отличающихся сверхмалыми массогабаритными характеристиками и низким энергопотреблением. Такие системы были бы востребованы при разработке микро- и нанодронов, сверхмалых систем навигации или их подсистем, портативных звуко-, тепло-, газо-анализаторов, и т.д.

Под нанодатчиками понимаются устройства, компоненты которых не превышают 10 нм [5].

К настоящему времени создано и запатентовано большое количество различных видов нанодатчиков [6-9].

В работе [6] описывается нанодатчик, способный измерить вес одной молекулы. Нанодатчик представляет собой резонатор в виде консольной нанобалки (рис. 1а). Принцип действия этого нанодатчика основан на изменении собственной частоты нанобалки, когда на ней находится молекула другого вещества. По сдвигу частот можно судить о весе частицы на резонаторе (рис 1б).

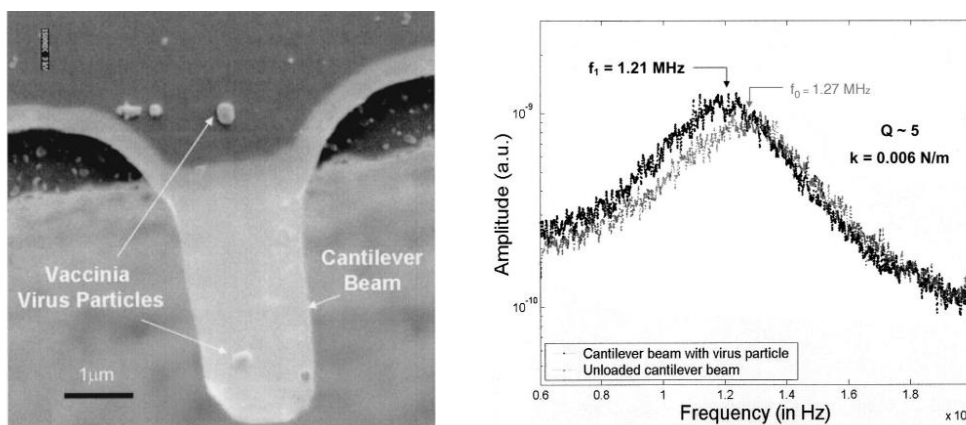


Рис. 1. Электронная микрофотография чувствительного элемента нанодатчика с частицами вируса вакцины от оспы (а); сдвиг частот в 60 кГц консольной нанобалки при наличии частицы вируса массой 5–8 фгг и без. Длина нанобалки 3.6 мкм, ширина 1.1 мкм

Наноэлектромеханический датчик (НЭМС) для масс-спектропии объектов размером с молекулу был запатентован исследователями из Калифорнийского технического университета [7]. Устройство представляет собой систему из Микрофлюидная система доставки и ионизации образца, NEMS резонатора и NEMS детектора (рис 2). Принцип действия этого датчика также основан на измерении сдвига собственных частот нанорезонатора при попадании на него объекта молекулярного размера.

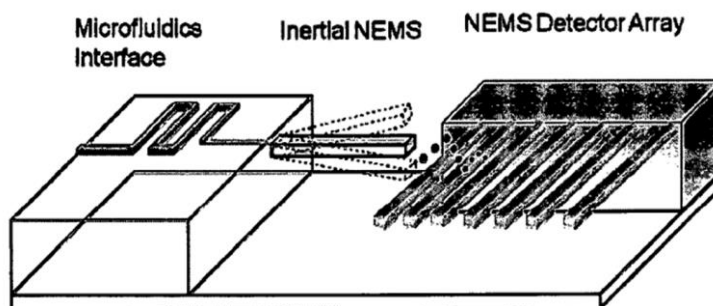


Рис. 2. НЭМС для масс-спектропии объектов размером с молекулу

В работе [8] описывается опыт разработки нанодатчика света. Нанодатчик представляет собой прямоугольную пластину (рис. 3а), сопротивление которой меняется при попадании на нее пучка лазера (рис 3б).

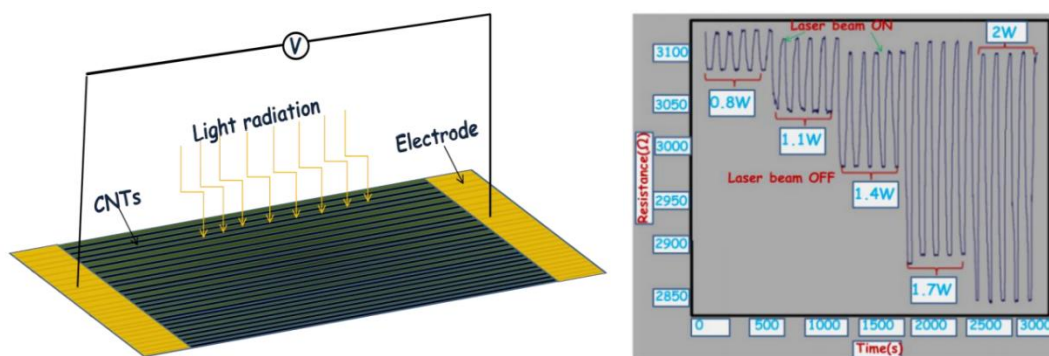


Рис. 3. Конструктивная схема оптического датчика (а) и изменение его сопротивления в зависимости от наличия 532 нм пучка лазера (б)

В формате нанодатчиков могут быть созданы чувствительные элементы, предназначенные для закрепления на теле пациента. Такие нанодатчики могут осуществлять мониторинг давления или температуры человека, следить за его дыханием человека (рис.4) и т.д. [9].

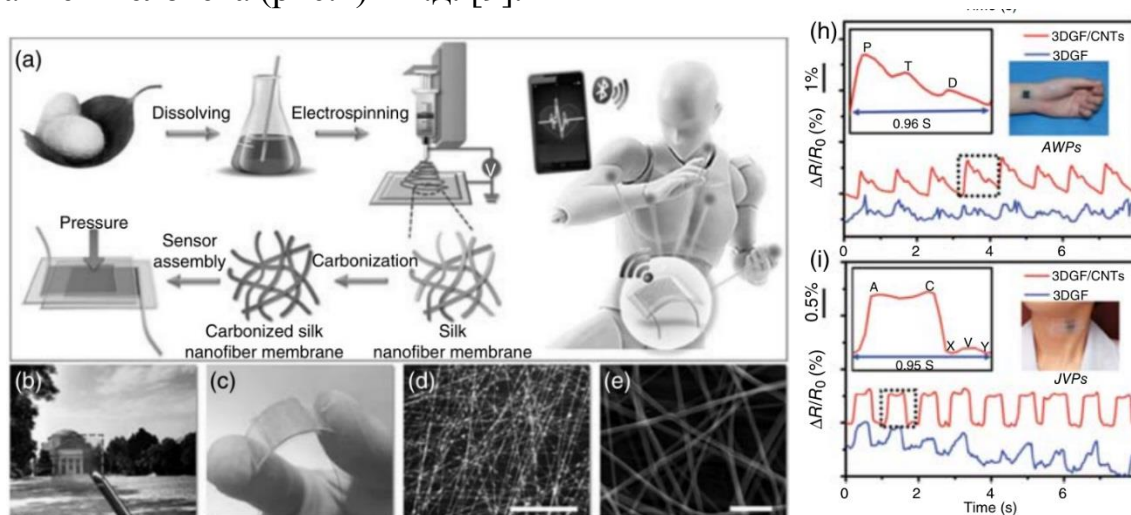


Рис. 4. Процесс производства (а) датчика давления из карбонизированной мембраны из шелкового нановолокна; демонстрация прозрачности (b) и гибкости (c) датчика; фотография датчика в масштабе 100 мкм (d) и 1 мкм (e); реакция датчика на пульс при установке на запястье (h) и шее (i)

Анализ литературы и патентов [6-11], посвященных разработке и исследованию нанодатчиков, показал, что наиболее распространенными форм факторами чувствительных элементов нанодатчиков являются балки и круглые и прямоугольные пластины. При этом существует довольно большое количество работ, посвященных изучению динамики нанобалок и нанопластин, например [12-19], в которых учитываются размерные эффекты, то есть эффекты, возникающие именно из-за нано размеров компонентов. К таким эффектам относятся, например, квантовые эффекты, анизотропность материала и необходимость учета его неоднородности. Но ряд вопросов к настоящему времени не были решены. Так к настоящему времени не было создано

математической модели круглой пластины, учитывающей как размерные, так и нелинейные эффекты. В данной работе восполняется этот пробел.

Постановка задачи

Рассмотрим круглую ортотропную нанопластину толщиной h (Рис. 5), находящуюся под действием распределенной нагрузки, приложенной на верхнюю грань пластины ($z = -h/2$). Начало системы координат положим в центре срединной поверхности нанопластины. Соответствующие декартова и цилиндрическая системы координат приведены на рис. 5. Положительное направление оси z – вниз от срединной плоскости по толщине пластины. Таким образом, координаты произвольной точки срединной плоскости имеют вид $(r, \varphi, 0)$. Плотность ρ_0 пластины принимаем однородной, не изменяющейся по толщине или длине пластины.

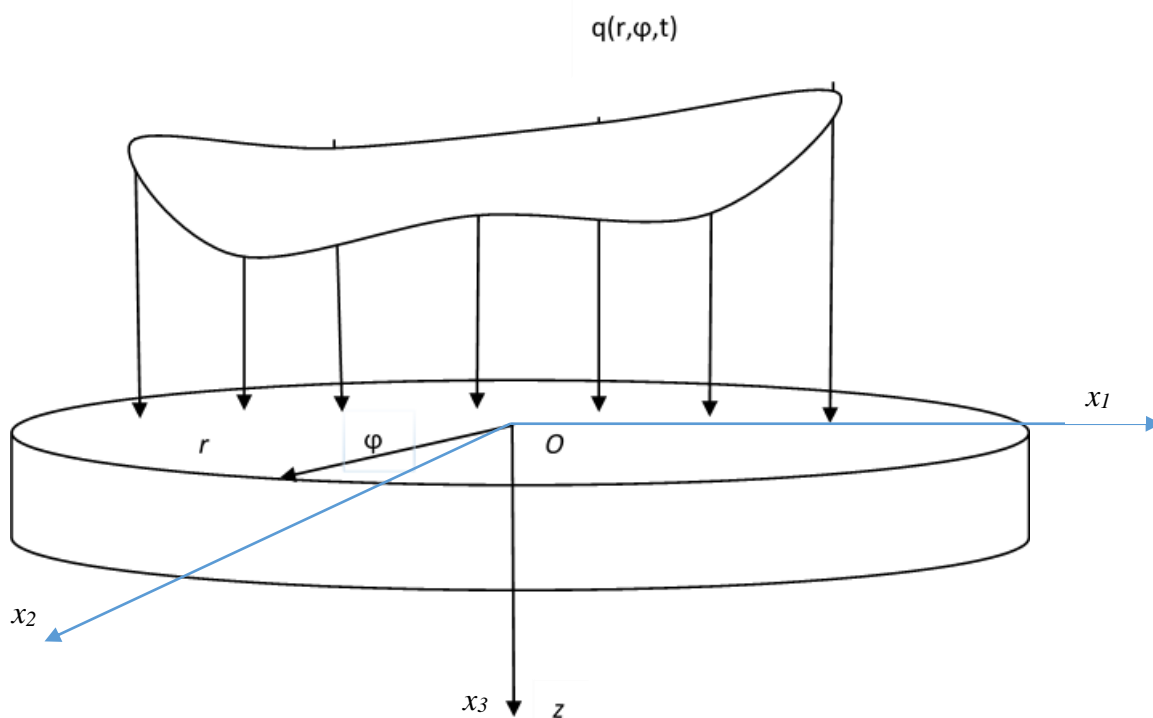


Рис. 5. Нанопластина с системой координат и приложенной нагрузкой

Ранее в [19] с помощью вариационного принципа Гамильтона были получены уравнения прямоугольной размерно-зависимой пластины с применением теории пластин третьего порядка. В представляемой работе были использованы основные соотношения и уравнения, полученные в [19], при этом переменные были приведены к безразмерному виду согласно формулам:

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{h}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где u_i – компоненты вектора перемещения произвольной точки нанопластины, определяющиеся согласно теории пластин третьего порядка следующими выражениями в декартовой системе координат [20]:

$$u_1(x_1, x_2, x_3, t) = u_0(x_1, x_2, t) + x_3 \phi_1(x_1, x_2, t) - \frac{4}{3h^2} x_3^3 \left(\phi_1(x_1, x_2, t) + \frac{\partial w_0(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} \right),$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3, t) = v_0(x_1, x_2, t) + x_3 \phi_2(x_1, x_2, t) - \frac{4}{3h^2} x_3^3 \left(\phi_2(x_1, x_2, t) + \frac{\partial w_0(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \right),$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3, t) = w_0(x_1, x_2, t),$$

где (u_0, v_0, w_0) – компоненты вектора перемещения точки срединной поверхности по координатным осям (x_1, x_2, x_3) , ϕ_1 и ϕ_2 – углы поворота поперечного сечения пластины, к которому принадлежит точка P, относительно осей x_2 и x_1 , соответственно.

Система уравнений в перемещениях

Используя приведенные выше соотношения для компонентов вектора и используя подход к построению систем уравнений движения нанопластины, описанной в [20], получим следующие пять уравнений динамики ортотропной круглой пластины в перемещениях относительно безразмерных переменных $\bar{u}_0, \bar{v}_0, \bar{w}_0, \bar{\phi}_1$ и $\bar{\phi}_2$ в цилиндрической системе координат (для краткости записи черта над переменными далее опущена):

Первое уравнение

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) (C11 - C44)}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} - \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) (-3\xi_3^2 h^2 + 4r^2 (C12 + C44))}{4r^3} \frac{\partial v_0}{\partial r} - \\ & - \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) \xi_3^2 h^2}{2r} \frac{\partial^4 u_0}{\partial r^3 \partial \varphi} + \frac{\xi_3^2 h^2 (-1 + 2(\cos(\varphi))^2)}{4r} \frac{\partial^4 v_0}{\partial r^3 \partial \varphi} - \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) \xi_3^2 h^2}{2r^3} \frac{\partial^4 u_0}{\partial \varphi^3 \partial r} + \\ & + \frac{1}{4} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \xi_3^2 h^2 \frac{\partial^4 v_0}{\partial r^4} - \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) (-2\xi_3^2 h^2 + r^2 (C12 + C44))}{r^4} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \varphi^2} - \\ & - \frac{(-2C11r^2 - 4\xi_3^2 h^2 (\cos(\varphi))^2 + 3\xi_3^2 h^2 - 2(\cos(\varphi))^2 C44r^2 + 2C11r^2 (\cos(\varphi))^2)}{2r^4} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} + \\ & + \frac{(4r^2 C44 + 4C11r^2 (\cos(\varphi))^2 - 3\xi_3^2 h^2 (\cos(\varphi))^2 + 2\xi_3^2 h^2 - 4(\cos(\varphi))^2 C44r^2)}{4r^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \\ & + \frac{\xi_3^2 h^2 (-1 + 2(\cos(\varphi))^2)}{4r^3} \frac{\partial^4 v_0}{\partial \varphi^3 \partial r} + \frac{1}{4} \xi_3^2 h^2 (-1 + \cos(\varphi)) (\cos(\varphi) + 1) \frac{\partial^4 u_0}{\partial r^4} - \frac{1}{4} \frac{\xi_3^2 h^2 (\cos(\varphi))^2}{r^4} \frac{\partial^4 u_0}{\partial \varphi^4} - \\ & - \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) (-2r^2 C44 - \xi_3^2 h^2 + 2C11r^2)}{r^3} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi \partial r} - \frac{1}{4} \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) \xi_3^2 h^2}{r^4} \frac{\partial^4 v_0}{\partial \varphi^4} + \\ & + \frac{1}{4} \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) (-3\xi_3^2 h^2 + 4r^2 C12 + 4r^2 C44)}{r^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} - \frac{1}{2} \frac{\xi_3^2 h^2 (3(\cos(\varphi))^2 - 2)}{r^3} \frac{\partial^3 u_0}{\partial \varphi^2 \partial r} + \\ & + \frac{3 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \xi_3^2 h^2}{2r^4} \frac{\partial^3 u_0}{\partial \varphi^3} - \frac{3 \xi_3^2 h^2 (-1 + 2(\cos(\varphi))^2)}{4r^4} \frac{\partial^3 v_0}{\partial \varphi^3} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(-1 + 2(\cos(\varphi))^2)(2r^2C44 - \xi_3 h^2 + 2r^2C12)}{2r^3} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \varphi \partial r} - \frac{1}{4} \frac{\xi_3 h^2}{r} \frac{\partial^3 u_0}{\partial r^3} - \frac{1}{4} \frac{\xi_3 h^2}{r^2} \frac{\partial^4 u_0}{\partial r^2 \partial \varphi^2} - \\
 & - \frac{(-1 + 2(\cos(\varphi))^2)(C44 + C12)}{r^2} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - \frac{3 \cos(\varphi) \sin(\varphi) \xi_3 h^2}{2 r^3} \frac{\partial^3 v_0}{\partial \varphi^2 \partial r} + \\
 & - \frac{1}{4} \frac{(-4C11r^2 - 4(\cos(\varphi))^2 C44r^2 + 4C11r^2 (\cos(\varphi))^2 - 3\xi_3 h^2 (\cos(\varphi))^2 + 2\xi_3 h^2)}{r^3} \frac{\partial u_0}{\partial r} = h^2 \rho_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2},
 \end{aligned}$$

Второе уравнение

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(-1 + 2(\cos(\varphi))^2)(C44 + C12)}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{4} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \xi_3 h^2 \frac{\partial^4 u_0}{\partial r^4} - \\
 & - \frac{1}{4} \xi_3 h^2 (\cos(\varphi))^2 \frac{\partial^4 v_0}{\partial r^4} - \frac{1}{4} \frac{\xi_3 h^2}{r^2} \frac{\partial^4 v_0}{\partial r \partial \varphi^2 \partial r} + \frac{1}{2} \frac{(-1 + 2(\cos(\varphi))^2)(2r^2C44 - \xi_3 h^2 + 2r^2C12)}{r^3} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi \partial r} + \\
 & + \frac{1}{4} \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) (-3\xi_3 h^2 + 4r^2C12 + 4r^2C44)}{r^2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) \xi_3 h^2}{r^3} \frac{\partial^4 v_0}{\partial \varphi^3 \partial r} - \\
 & - \frac{3 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \xi_3 h^2}{2 r^4} \frac{\partial^3 v_0}{\partial \varphi^3} - \frac{3 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \xi_3 h^2}{2 r^3} \frac{\partial^3 u_0}{\partial \varphi^2 \partial r} + \frac{1 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \xi_3 h^2}{2 r} \frac{\partial^4 v_0}{\partial r^3 \partial \varphi} + \\
 & + \frac{\xi_3 h^2 (-1 + 2(\cos(\varphi))^2)}{4r} \frac{\partial^4 u_0}{\partial r^3 \partial \varphi} - \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) \xi_3 h^2}{4r^4} \frac{\partial^4 u_0}{\partial \varphi^4} + \frac{\xi_3 h^2 (-1 + 2(\cos(\varphi))^2)}{4r^3} \frac{\partial^4 u_0}{\partial \varphi^3 \partial r} + \\
 & + \frac{\xi_3 h^2 (-1 + 3(\cos(\varphi))^2)}{2r^3} \frac{\partial^3 v_0}{\partial \varphi^2 \partial r} - \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) (-2\xi_3 h^2 + r^2C12 + r^2C44)}{r^4} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \varphi^2} - \\
 & - \frac{3 \xi_3 h^2 (-1 + 2(\cos(\varphi))^2)}{4 r^4} \frac{\partial^3 u_0}{\partial \varphi^3} + \frac{\xi_3 h^2 (-1 + \cos(\varphi)) (\cos(\varphi) + 1)}{4r^4} \frac{\partial^4 v_0}{\partial \varphi^4} + \\
 & + \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) (2r^2C22 - \xi_3 h^2 - 2r^2C44)}{r^3} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \varphi \partial r} - \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) (-3\xi_3 h^2 + 4r^2C12 + 4r^2C44)}{4r^3} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \\
 & - 2 \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) (-C44 + C22)}{r^2} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} - \frac{\xi_3 h^2}{4r} \frac{\partial^3 v_0}{\partial r^3} - \\
 & - \frac{(-3\xi_3 h^2 (\cos(\varphi))^2 - 4r^2C22 + 4(\cos(\varphi))^2 C22r^2 + \xi_3 h^2 - 4(\cos(\varphi))^2 C44r^2)}{4r^2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} + \\
 & + \frac{(\xi_3 h^2 - 2(\cos(\varphi))^2 C44r^2 + 2r^2C44 - 4\xi_3 h^2 (\cos(\varphi))^2 + 2(\cos(\varphi))^2 C22r^2)}{2r^4} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \varphi^2} + \\
 & + \frac{(4r^2C44 + \xi_3 h^2 + 4(\cos(\varphi))^2 C22r^2 - 4(\cos(\varphi))^2 C44r^2 - 3\xi_3 h^2 (\cos(\varphi))^2)}{4r^3} \frac{\partial v_0}{\partial r} = -h^2 \rho_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2},
 \end{aligned}$$

Третье уравнение

$$\frac{1}{315} \cos(\varphi) (4C11(\cos(\varphi))^2 - 8C44(\cos(\varphi))^2 + 8C44 - 4C12(\cos(\varphi))^2 + 4C12 + 63\xi_2 h^2) \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{315} \left(-30C44 + 55(\cos(\varphi))^4 C22 - 220C44(\cos(\varphi))^4 + 55C11(\cos(\varphi))^4 + \right. \\
 & \quad + 420r^2 h^2 \xi_2 - 110C12(\cos(\varphi))^4 - 15C12 + 168r^2 C55(\cos(\varphi))^2 + \\
 & \quad + 220C44(\cos(\varphi))^2 + 110C12(\cos(\varphi))^2 + 1176(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 - 882\xi_1 h^2 - \\
 & -45(\cos(\varphi))^2 C22 + 10C11 - 420r^2 (\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 - 168r^2 (\cos(\varphi))^2 C66 + 168C66r^2 - \\
 & -65C11(\cos(\varphi))^2 + 420r^2 (\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 - 1176(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + 294\xi_2 h^2 \left. \right) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} + \\
 & \quad + \frac{1}{630} \left(-15C11(\cos(\varphi))^2 - 30C12(\cos(\varphi))^4 - 294\xi_2 h^2 - 10C44 + \right. \\
 & \quad + 30C12(\cos(\varphi))^2 + 15C11(\cos(\varphi))^4 + 60C44(\cos(\varphi))^2 + 15(\cos(\varphi))^4 C22 - \\
 & \quad - 60C44(\cos(\varphi))^4 - 294\xi_1 h^2 - 15(\cos(\varphi))^2 C22 - 5C12 \left. \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3} + \\
 & + \frac{1}{630} \left(-15C11(\cos(\varphi))^2 - 30C12(\cos(\varphi))^4 - 294\xi_2 h^2 - 10C44 + 30C12(\cos(\varphi))^2 + \right. \\
 & \quad + 15C11(\cos(\varphi))^4 + 60C44(\cos(\varphi))^2 + 15(\cos(\varphi))^4 C22 - 60C44(\cos(\varphi))^4 - \\
 & \quad - 294\xi_1 h^2 - 15(\cos(\varphi))^2 C22 - 5C12 \left. \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial r^2 \partial \varphi^2} + \\
 & \quad + \frac{1}{1260} \left(15C11 - 1176\xi_1 h^2 + 1680r^2 h^2 \xi_2 - 1764(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + \right. \\
 & \quad + 300C44(\cos(\varphi))^2 - 20C12 + 1680r^2 (\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 - 40C44 + \\
 & + 75C11(\cos(\varphi))^4 - 90C11(\cos(\varphi))^2 - 60(\cos(\varphi))^2 C22 + 672r^2 C55(\cos(\varphi))^2 - \\
 & - 1680r^2 (\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + 1764(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 + 588\xi_2 h^2 - 300C44(\cos(\varphi))^4 + \\
 & \quad + 672C66r^2 + 150C12(\cos(\varphi))^2 - 150C12(\cos(\varphi))^4 + \\
 & \quad + 75(\cos(\varphi))^4 C22 - 672r^2 (\cos(\varphi))^2 C66 \left. \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial w_0}{\partial r} - \\
 & - \frac{1}{315} \cos(\varphi) \left(8C44(\cos(\varphi))^2 - 4(\cos(\varphi))^2 C22 - 63\xi_1 h^2 + \right. \\
 & \quad + 4C12(\cos(\varphi))^2 - 8C44 - 4C12 \left. \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial \varphi^3} + \\
 & + \frac{2}{315} \sin(\varphi) \left(-8C44 - 4C12 - 12(\cos(\varphi))^2 C22 - 63\xi_1 h^2 + \right. \\
 & \quad + 24C44(\cos(\varphi))^2 + 12C12(\cos(\varphi))^2 \left. \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varphi^2} - \\
 & - \frac{1}{315} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \left(-10C12(\cos(\varphi))^2 + 294\xi_1 h^2 - 294\xi_2 h^2 - 20C44(\cos(\varphi))^2 + \right. \\
 & \quad + 5C11(\cos(\varphi))^2 + 5(\cos(\varphi))^2 C22 - 5C11 + 5C12 + 10C44 \left. \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \varphi^3 \partial r} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{315} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \left(10C44 - 20C44(\cos(\varphi))^2 - 5C22 + 5C11(\cos(\varphi))^2 + \right. \\
 & + 5(\cos(\varphi))^2 C22 - 10C12(\cos(\varphi))^2 + 5C12 - 294\xi_1 h^2 + 294\xi_2 h^2 \left. \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^4 w_0}{\partial r^2 \partial \varphi \partial r} + \\
 & + \frac{2}{315} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \left(420r^2 \xi_1 h^2 - 20C11 - 70C12(\cos(\varphi))^2 + 294\xi_1 h^2 - \right. \\
 & - 420r^2 h^2 \xi_2 + 35C12 + 70C44 - 294\xi_2 h^2 - 168C66r^2 + 35(\cos(\varphi))^2 C22 - \\
 & - 15C22 + 168r^2 C55 - 140C44(\cos(\varphi))^2 + 35C11(\cos(\varphi))^2 \left. \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi \partial r} - \\
 & - \frac{1}{21} \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) \left(-1 + 2(\cos(\varphi))^2 \right) (C11 + C22 - 2C12 - 4C44)}{r^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial r \partial \varphi \partial r} - \\
 & - \frac{1}{1260} \left(588(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + 588\xi_1 h^2 - 10(\cos(\varphi))^2 C22 - 10C12(\cos(\varphi))^4 - \right. \\
 & - 20C44(\cos(\varphi))^4 - 588(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 + 5(\cos(\varphi))^4 C22 + 20C44(\cos(\varphi))^2 + \\
 & + 5C11(\cos(\varphi))^4 + 5C22 + 10C12(\cos(\varphi))^2 \left. \right) \frac{\partial^4}{\partial r^4} w_0(r, \varphi, t) \\
 & - \frac{4}{315} \sin(\varphi) \left(4C44 - 16C44(\cos(\varphi))^2 - 8C12(\cos(\varphi))^2 + 42C66r^2 + \right. \\
 & + 2C12 + 105r^2 h^2 \xi_2 + 8C11(\cos(\varphi))^2 - 2C11 \left. \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} - \\
 & - \frac{1}{630} \left(588\xi_2 h^2 + 300C44(\cos(\varphi))^2 + 150C12(\cos(\varphi))^2 + 1764(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 - \right. \\
 & - 300C44(\cos(\varphi))^4 - 150C12(\cos(\varphi))^4 - 1764(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 - \\
 & - 20C12 - 90C11(\cos(\varphi))^2 - 40C44 + 15C11 - 1176\xi_1 h^2 + \\
 & + 75(\cos(\varphi))^4 C22 - 60(\cos(\varphi))^2 C22 + 75C11(\cos(\varphi))^4 \left. \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \varphi^2 \partial r} - \\
 & - \frac{2}{105} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \left(140r^2 \xi_1 h^2 - 56C66r^2 + 10C12 + 56r^2 C55 - \right. \\
 & - 5C22 + 10(\cos(\varphi))^2 C22 - 140r^2 h^2 \xi_2 - 20C12(\cos(\varphi))^2 - \\
 & - 40C44(\cos(\varphi))^2 + 10C11(\cos(\varphi))^2 - 5C11 + 20C44 \left. \right) \frac{1}{r^4} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} + \\
 & + \frac{1}{315} \sin(\varphi) \left(-63\xi_2 h^2 - 4C11 - 4C12(\cos(\varphi))^2 + \right. \\
 & + 4C11(\cos(\varphi))^2 - 8C44(\cos(\varphi))^2 \left. \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \varphi^3} - \\
 & + \frac{1}{105} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \left(-10C12(\cos(\varphi))^2 + 294\xi_1 h^2 - 294\xi_2 h^2 - 20C44(\cos(\varphi))^2 + \right. \\
 & + 5C11(\cos(\varphi))^2 + 5(\cos(\varphi))^2 C22 - 5C11 + 5C12 + 10C44 \left. \right) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \varphi^3} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4}{315} \left(\cos(\varphi) 42r^2 C55 + 8C12(\cos(\varphi))^2 + 6C22 + 105r^2 \xi_1 h^2 + \right. \\
 & \left. 16C44(\cos(\varphi))^2 - 12C44 - 6C12 - 8(\cos(\varphi))^2 C22 \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi} - \\
 & - \frac{1}{1260} \left(-20C44(\cos(\varphi))^4 - 10C11(\cos(\varphi))^2 + 588(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 - \right. \\
 & - 588(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + 5C11(\cos(\varphi))^4 + 20C44(\cos(\varphi))^2 + 10C12(\cos(\varphi))^2 + \\
 & \left. + 588\xi_2 h^2 + 5C11 + 5(\cos(\varphi))^4 C22 - 10C12(\cos(\varphi))^4 \right) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \varphi^4} + \\
 & + \frac{1}{315} \sin(\varphi) \left(-4C12 - 63\xi_1 h^2 - 12(\cos(\varphi))^2 C22 + 420r^2 \xi_1 h^2 + \right. \\
 & \left. + 12C12(\cos(\varphi))^2 + 24C44(\cos(\varphi))^2 + 168r^2 C55 - 8C44 \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \\
 & + \frac{1}{315} \cos(\varphi) \left(8C12 - 63\xi_2 h^2 + 12C11(\cos(\varphi))^2 + 16C44 + 420r^2 h^2 \xi_2 - \right. \\
 & \left. - 12C11 - 12C12(\cos(\varphi))^2 - 24C44(\cos(\varphi))^2 + 168C66r^2 \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \\
 & - \frac{1}{315} \sin(\varphi) \left(-8C44 - 4C12 - 12(\cos(\varphi))^2 C22 - 63\xi_1 h^2 \right. \\
 & \left. + 24C44(\cos(\varphi))^2 + 12C12(\cos(\varphi))^2 \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial \varphi^2 \partial r} - \\
 & - \frac{1}{315} \cos(\varphi) \left(16C44 - 24C44(\cos(\varphi))^2 - 63\xi_2 h^2 - 12C11 - \right. \\
 & \left. - 12C12(\cos(\varphi))^2 + 8C12 + 12C11(\cos(\varphi))^2 \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \varphi^2 \partial r} + \\
 & + \frac{1}{315} \sin(\varphi) \left(8C12 + 16C44 - 36C12(\cos(\varphi))^2 - 63\xi_2 h^2 - \right. \\
 & \left. - 72C44(\cos(\varphi))^2 - 12C11 + 36C11(\cos(\varphi))^2 \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varphi \partial r} - \\
 & - \frac{1}{315} \cos(\varphi) \left(16C44 - 24C44(\cos(\varphi))^2 - 63\xi_2 h^2 - 12C11 - \right. \\
 & \left. - 12C12(\cos(\varphi))^2 + 8C12 + 12C11(\cos(\varphi))^2 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \\
 & + \frac{1}{315} \cos(\varphi) \left(24C44(\cos(\varphi))^2 - 16C44 + 12C22 + 63\xi_1 h^2 + \right. \\
 & \left. + 12C12(\cos(\varphi))^2 - 8C12 - 12(\cos(\varphi))^2 C22 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial r \partial \varphi \partial r} - \\
 & - \frac{1}{315} \cos(\varphi) \left(-36(\cos(\varphi))^2 C22 + 72C44(\cos(\varphi))^2 - 56C44 + \right. \\
 & \left. + 24C22 - 28C12 - 63\xi_1 h^2 + 36C12(\cos(\varphi))^2 \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varphi \partial r} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{315} \cos(\varphi) \left(16C44 - 24C44(\cos(\varphi))^2 - 63\xi_2 h^2 - 12C11 - \right. \\
 & \quad \left. - 12C12(\cos(\varphi))^2 + 8C12 + 12C11(\cos(\varphi))^2 \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varphi^2} - \\
 & - \frac{1}{315} \sin(\varphi) \left(12C11(\cos(\varphi))^2 + 8C44 - 24C44(\cos(\varphi))^2 + \right. \\
 & \quad \left. + 4C12 - 12C12(\cos(\varphi))^2 + 63\xi_2 h^2 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial r \partial \varphi \partial r} - \\
 & - \frac{1}{315} \sin(\varphi) \left(-8C44 - 4C12 - 12(\cos(\varphi))^2 C22 - 63\xi_1 h^2 \right. \\
 & \quad \left. + 24C44(\cos(\varphi))^2 + 12C12(\cos(\varphi))^2 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \\
 & + \frac{1}{315} \sin(\varphi) \left(8C44(\cos(\varphi))^2 + 4C12(\cos(\varphi))^2 - 4(\cos(\varphi))^2 C22 + 63\xi_1 h^2 + 4C22 \right) \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial r^3} = \\
 & = \frac{1}{1260} \frac{1}{r^2} 1 \left(6 \sin(\varphi) h^2 \rho_0 \left(\frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial t \partial r \partial t} \right) r^2 - 5 h^2 \rho_0 \frac{\partial^4 w_0}{\partial t \partial \varphi^2 \partial t} - 5 h^2 \rho_0 \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial t \partial r \partial t} \right) r - \right. \\
 & \quad \left. - 5 h^2 \rho_0 \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial t \partial r^2 \partial t} \right) r^2 + 1260 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) h^2 \rho_0 r^2 + 16 \cos(\varphi) \left(\frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial t \partial \varphi \partial t} \right) h^2 \rho_0 r - \right. \\
 & \quad \left. - 16 \sin(\varphi) h^2 \rho_0 \left(\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial t \partial \varphi \partial t} \right) r + 16 \cos(\varphi) \left(\frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial t \partial r \partial t} \right) h^2 \rho_0 r^2 + 1260 q(r, \varphi, t) r^2 \right),
 \end{aligned}$$

Четвертое уравнение

$$\begin{aligned}
 & - \frac{17}{630} \frac{\xi_3 h^2 \left(3(\cos(\varphi))^2 - 2 \right)}{r^3} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \varphi^2 \partial r} - \frac{17}{1260} \frac{\xi_3 h^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{r^4} \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial \varphi^4} - \\
 & - \frac{17}{630} \frac{\xi_3 h^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{r^3} \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial \varphi^3 \partial r} + \frac{17}{1260} \frac{\xi_3 h^2 \left(-1 + 2(\cos(\varphi))^2 \right)}{r} \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial r^2 \partial \varphi \partial r} - \\
 & - \frac{17}{630} \frac{\xi_3 h^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{r} \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial r^2 \partial \varphi \partial r} + \frac{17}{1260} \xi_3 h^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{\partial^4}{\partial r^4} \varphi_2(r, \varphi, t) + \\
 & + \frac{17}{210} \frac{\xi_3 h^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{r^4} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \varphi^3} + \frac{17}{1260} \xi_3 h^2 \left(-1 + \cos(\varphi) \right) \left(\cos(\varphi) + 1 \right) \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial r^4} - \\
 & - \frac{1}{315} \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) \left(17 r^2 C12 - 42 r^2 \xi_3 h^2 + 17 r^2 C44 - 34 \xi_3 h^2 \right)}{r^4} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varphi^2} - \\
 & - \frac{1}{315} \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) \left(34 C11 r^2 - 34 r^2 C44 - 17 \xi_3 h^2 - 84 r^2 \xi_3 h^2 \right)}{r^3} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varphi \partial r} - \\
 & - \frac{17}{420} \frac{\xi_3 h^2 \left(-1 + 2(\cos(\varphi))^2 \right)}{r^4} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial \varphi^3} - \frac{17}{210} \frac{\xi_3 h^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)}{r^3} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial \varphi^2 \partial r} + \\
 & + \frac{1}{1260} \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) \left(68 r^2 C12 + 68 r^2 C44 - 51 \xi_3 h^2 - 168 r^2 \xi_3 h^2 \right)}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{17}{1260} \frac{\xi_3 h^2 (-1 + 2(\cos(\varphi))^2)}{r^3} \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial \varphi^3 \partial r} - \frac{17}{1260} \frac{\xi_3 h^2 (\cos(\varphi))^2}{r^4} \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial \varphi^4} - \\
 & - \frac{1}{1260} \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) (68r^2 C12 + 68r^2 C44 - 51\xi_3 h^2 - 168r^2 \xi_3 h^2)}{r^3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \\
 & + \frac{2}{315} \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi) (-42\xi_3 h^2 - 17C44 + 17C11)}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} + \\
 & + \frac{1}{1260} (-168r^2 (\cos(\varphi))^2 \xi_3 h^2 + 68C11r^2 (\cos(\varphi))^2 + 68r^2 C44 + \\
 & + 168r^2 h^2 \xi_2 + 34\xi_3 h^2 + 168r^2 \xi_3 h^2 - 68(\cos(\varphi))^2 C44r^2 - 51\xi_3 h^2 (\cos(\varphi))^2) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} - \\
 & - \frac{1}{315} \cos(\varphi) (8C44 - 105(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + 4C12 + 4C11(\cos(\varphi))^2 - 8C44(\cos(\varphi))^2 - \\
 & - 4C12(\cos(\varphi))^2 + 168\xi_2 h^2 - 105\xi_1 h^2 + 105(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3} + \\
 & + \frac{2}{315} \sin(\varphi) (16C11(\cos(\varphi))^2 + 84C66r^2 + 105\xi_2 h^2 - 4C11 + 8C44 - 32C44(\cos(\varphi))^2 - \\
 & 16C12(\cos(\varphi))^2 + 210r^2 h^2 \xi_2 - 105\xi_1 h^2 + 420(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 - 420(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + 4C12) \frac{1}{r^3} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} - \\
 & - \frac{1}{315} \frac{(-1 + 2(\cos(\varphi))^2) (17C12 - 42\xi_3 h^2 + 17C44)}{r^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi} - \\
 & - \frac{1}{1260} (168r^2 (\cos(\varphi))^2 \xi_3 h^2 - 51\xi_3 h^2 (\cos(\varphi))^2 - 68C11r^2 + \\
 & + 68C11r^2 (\cos(\varphi))^2 - 168r^2 h^2 \xi_2 - 68(\cos(\varphi))^2 C44r^2 + 34\xi_3 h^2) \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \\
 & - \frac{1}{315} \cos(\varphi) (2C11(\cos(\varphi))^2 + 315(\cos(\varphi))^2 h^2 (\xi_1 - \xi_2) + 16C44 + 8C12 + 168C66r^2 - \\
 & - 24C44(\cos(\varphi))^2 + 147\xi_2 h^2 - 12C12(\cos(\varphi))^2 - 210\xi_1 h^2 + 420r^2 h^2 \xi_2 - 12C11) \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial r} - \\
 & - \frac{1}{315} \sin(\varphi) (-4C11 - 63\xi_2 h^2 + 4C11(\cos(\varphi))^2 - 4C12(\cos(\varphi))^2 - 8C44(\cos(\varphi))^2 + \\
 & + 105(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 - 105(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \varphi^3} - \frac{17}{1260} \frac{\xi_3 h^2}{r} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial r^3} + \\
 & + \frac{1}{315} \cos(\varphi) (-12C12(\cos(\varphi))^2 - 24C44(\cos(\varphi))^2 - 210\xi_1 h^2 + 315(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 - \\
 & - 315(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + 147\xi_2 h^2 + 8C12 + 16C44 - 12C11 + 12C11(\cos(\varphi))^2) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \\
 & - \frac{2}{315} \cos(\varphi) (12C12(\cos(\varphi))^2 - 24C44(\cos(\varphi))^2 - 210\xi_1 h^2 + 315(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 - \\
 & - 315(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + 147\xi_2 h^2 + 8C12 + 16C44 - 12C11 + 12C11(\cos(\varphi))^2) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{315}\sin(\varphi)\left(16C44+36C11(\cos(\varphi))^2-36C12(\cos(\varphi))^2-72C44(\cos(\varphi))^2+8C12- \right. \\
 & \quad \left. -945(\cos(\varphi))^2\xi_2h^2-210\xi_1h^2+147\xi_2h^2+945(\cos(\varphi))^2\xi_1h^2-12C11\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2w_0}{\partial\varphi\partial r}- \\
 & \quad -\frac{17}{1260}\frac{\xi_3h^2}{r^2}\frac{\partial^4\varphi_1}{\partial r^2\partial\varphi^2}-\frac{4}{15}(2C66+5\xi_2h^2)\varphi_1+ \\
 & \quad +\frac{1}{630}\frac{(-1+2(\cos(\varphi))^2)(-17\xi_3h^2+34r^2C12+34r^2C44-84r^2\xi_3h^2)}{r^3}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\varphi\partial r}+ \\
 & \quad +\frac{1}{315}\sin(\varphi)\left(-12C12(\cos(\varphi))^2+4C12+8C44+168\xi_2h^2-24C44(\cos(\varphi))^2- \right. \\
 & \quad \left. -315(\cos(\varphi))^2\xi_2h^2-105\xi_1h^2+12C11(\cos(\varphi))^2+315(\cos(\varphi))^2\xi_1h^2\right)\frac{1}{r}\frac{\partial^3w_0}{\partial r\partial\varphi\partial r}- \\
 & \quad +\frac{1}{315}\cos(\varphi)\left(-12C12(\cos(\varphi))^2-24C44(\cos(\varphi))^2-210\xi_1h^2+315(\cos(\varphi))^2h^2(\xi_1-\xi_2)+ \right. \\
 & \quad \left. +147\xi_2h^2+8C12+16C44-12C11+12C11(\cos(\varphi))^2\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3w_0}{\partial\varphi^2\partial r}- \\
 & \quad -\frac{1}{630}\left(34C11r^2(\cos(\varphi))^2-68\xi_3h^2(\cos(\varphi))^2+51\xi_3h^2-84r^2(\cos(\varphi))^2\xi_3h^2- \right. \\
 & \quad \left. -34(\cos(\varphi))^2C44r^2-84r^2h^2\xi_2-34C11r^2\right)\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varphi^2}= \\
 & \quad =-\frac{1}{315}\frac{h^2\rho_0\left(-17\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\right)r+4\cos(\varphi)\left(\frac{\partial^3w_0}{\partial t\partial r\partial t}\right)r-4\sin(\varphi)\frac{\partial^3w_0}{\partial t\partial\varphi\partial t}\right)}{r},
 \end{aligned}$$

Пятое уравнение

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4}{15}(5\xi_1h^2+2C55)\varphi_2-\frac{1}{1260}\frac{1}{r^2}\left(-168r^2\xi_1h^2+68(\cos(\varphi))^2C22r^2-68(\cos(\varphi))^2C44r^2+ \right. \\
 & \quad \left. +17\xi_3h^2-168r^2(\cos(\varphi))^2\xi_3h^2-68r^2C22-51\xi_3h^2(\cos(\varphi))^2\right)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2}+ \\
 & \quad +\frac{1}{1260}\left(-68(\cos(\varphi))^2C44r^2+68(\cos(\varphi))^2C22r^2+168r^2\xi_3h^2+168r^2\xi_1h^2- \right. \\
 & \quad \left. -168r^2(\cos(\varphi))^2\xi_3h^2+17\xi_3h^2+68r^2C44-51\xi_3h^2(\cos(\varphi))^2\right)\frac{1}{r^3}\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} \\
 & \quad +\frac{1}{630}\frac{(-1+2(\cos(\varphi))^2)(-17\xi_3h^2+34r^2C12+34r^2C44-84r^2\xi_3h^2)}{r^3}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\varphi\partial r}-\frac{17}{1260}\frac{\xi_3h^2}{r}\frac{\partial^3\varphi_2}{\partial r^3}+ \\
 & \quad +\frac{1}{315}\cos(\varphi)\left(-8C44+8C44(\cos(\varphi))^2+4C12(\cos(\varphi))^2+105\xi_2h^2-4C12-4(\cos(\varphi))^2C22- \right. \\
 & \quad \left. -105(\cos(\varphi))^2\xi_2h^2+105(\cos(\varphi))^2\xi_1h^2-168\xi_1h^2\right)\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3w_0}{\partial\varphi^3}+
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{315} \cos(\varphi) \left(72C44(\cos(\varphi))^2 - 945(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 - 798\xi_1 h^2 + 735\xi_2 h^2 + 24C22 + \right. \\
 & \left. + 945(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 + 36C12(\cos(\varphi))^2 - 56C44 - 28C12 - 36(\cos(\varphi))^2 C22 \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi \partial r} - \\
 & \quad - \frac{1}{315} \frac{(-1 + 2(\cos(\varphi))^2)(17C12 - 42\xi_3 h^2 + 17C44)}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} - \\
 & - \frac{1}{315} \sin(\varphi) \left(315(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 + 420r^2 \xi_1 h^2 - 168\xi_1 h^2 - 315(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + 12C12(\cos(\varphi))^2 - \right. \\
 & \quad \left. - 4C12 + 168r^2 C55 - 12(\cos(\varphi))^2 C22 + 105\xi_2 h^2 + 24C44(\cos(\varphi))^2 - 8C44 \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial w_0}{\partial r} - \\
 & - \frac{2\cos(\varphi)}{315} \left(-16(\cos(\varphi))^2 C22 - 12(C12 + C22) + 32C44(\cos(\varphi))^2 - 315\xi_1 h^2 + 420(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 + \right. \\
 & \quad \left. + 315\xi_2 h^2 - 24C44 + 16C12(\cos(\varphi))^2 + 210r^2 \xi_1 h^2 + 84r^2 C55 - 420(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} + \\
 & + \frac{1}{315} \sin(\varphi) \left(24C44(\cos(\varphi))^2 - 315(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + 12C12(\cos(\varphi))^2 - 4C12 + 105\xi_2 h^2 + \right. \\
 & \quad \left. + 315(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 - 12(\cos(\varphi))^2 C22 - 8C44 - 168\xi_1 h^2 \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \varphi^2 \partial r} + \\
 & + \frac{1}{1260} \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) (68r^2 C12 + 68r^2 C44 - 51\xi_3 h^2 - 168r^2 \xi_3 h^2)}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} - \\
 & - \frac{1}{315} \cos(\varphi) \left(12C22 + 24C44(\cos(\varphi))^2 - 315(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + 315(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 - 147\xi_1 h^2 - \right. \\
 & \quad \left. - 16C44 - 12(\cos(\varphi))^2 C22 + 210\xi_2 h^2 - 8C12 + 12C12(\cos(\varphi))^2 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w_0}{\partial r^2 \partial \varphi} - \\
 & \quad - \frac{1}{1260} \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) (68r^2 C12 + 68r^2 C44 - 51\xi_3 h^2 - 168r^2 \xi_3 h^2)}{r^3} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \\
 & - \frac{2}{315} \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) (-17C44 - 42\xi_3 h^2 + 17C22)}{r^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi} + \frac{17}{1260} \xi_3 h^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial r^4} + \\
 & + \frac{1}{315} \sin(\varphi) \left(24C44(\cos(\varphi))^2 - 315(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + 12C12(\cos(\varphi))^2 - \right. \\
 & \quad \left. - 4C12 + 105\xi_2 h^2 + 315(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 - 12(\cos(\varphi))^2 C22 - 8C44 - 168\xi_1 h^2 \right) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} - \\
 & - \frac{17}{1260} \frac{\xi_3 h^2}{r^2} \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial r^2 \partial \varphi^2} - \frac{17}{1260} \xi_3 h^2 (\cos(\varphi))^2 \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial r^4} + \frac{17}{630} \frac{\xi_3 h^2 (-1 + 3(\cos(\varphi))^2)}{r^3} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial \varphi^2 \partial r} - \\
 & - \frac{2}{315} \sin(\varphi) 2 \left(4C44(\cos(\varphi))^2 - 315(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + 12C12(\cos(\varphi))^2 - \right. \\
 & \quad \left. - 4C12 + 105\xi_2 h^2 + 315(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 - 12(\cos(\varphi))^2 C22 - 8C44 - 168\xi_1 h^2 \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \varphi^2} - \\
 & - \frac{17}{420} \frac{\xi_3 h^2 (-1 + 2(\cos(\varphi))^2)}{r^4} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \varphi^3} + \frac{17}{1260} \frac{\xi_3 h^2 (-1 + 2(\cos(\varphi))^2)}{r} \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial r^2 \partial \varphi \partial r} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{17}{1260} \frac{\xi_3 h^2 (-1 + \cos(\varphi)) (\cos(\varphi) + 1)}{r^4} \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial \varphi^4} + \frac{17}{630} \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) \xi_3 h^2}{r} \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial r^3 \partial \varphi} + \\
 & + \frac{17}{630} \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) \xi_3 h^2}{r^3} \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial \varphi^3 \partial r} - \frac{17}{210} \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) \xi_3 h^2}{r^3} \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial \varphi^2 \partial r} - \frac{17}{210} \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) \xi_3 h^2}{r^4} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial \varphi^3} - \\
 & - \frac{17}{1260} \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) \xi_3 h^2}{r^4} \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial \varphi^4} + \frac{17}{1260} \frac{\xi_3 h^2 (-1 + 2(\cos(\varphi))^2)}{r^3} \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial \varphi^3 \partial r} - \\
 & - \frac{1}{315} \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) (17r^2 C12 - 42r^2 \xi_3 h^2 + 17r^2 C44 - 34\xi_3 h^2)}{r^4} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \varphi^2} + \\
 & + \frac{1}{315} \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi) (34r^2 C22 - 34r^2 C44 - 84r^2 \xi_3 h^2 - 17\xi_3 h^2)}{r^3} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varphi \partial r} - \\
 & - \frac{1}{315} \sin(\varphi) \left(-4(\cos(\varphi))^2 C22 + 63\xi_1 h^2 - 105(\cos(\varphi))^2 \xi_2 h^2 + 4C22 + 8C44(\cos(\varphi))^2 + \right. \\
 & \quad \left. + 4C12(\cos(\varphi))^2 + 105(\cos(\varphi))^2 \xi_1 h^2 \right) \frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3} + \\
 & + \frac{1}{630} \left(84r^2 \xi_1 h^2 + 34r^2 C44 + 84r^2 \xi_3 h^2 - 34(\cos(\varphi))^2 C44r^2 + \right. \\
 & \quad \left. + 17\xi_3 h^2 + 34(\cos(\varphi))^2 C22r^2 - 84r^2 (\cos(\varphi))^2 \xi_3 h^2 - 68\xi_3 h^2 (\cos(\varphi))^2 \right) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \varphi^2} = \\
 & = - \frac{1}{315} \frac{h^2 \rho_0 \left(4\cos(\varphi) \frac{\partial^3}{\partial t \partial \varphi \partial t} w_0(r, \varphi, t) - 17 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_2(r, \varphi, t) \right) r + 4\sin(\varphi) \left(\frac{\partial^3}{\partial t \partial r \partial t} w_0(r, \varphi, t) \right) r \right)}{r},
 \end{aligned}$$

где (C_{ij}) – коэффициенты тензора упругих постоянных, $\xi_i = l_i C_{ii}$, l_i – размерно зависимый параметр материала, (u_0, v_0, w_0) – компоненты вектора перемещения точки срединной поверхности по координатным осям (x_1, x_2, x_3) декартовой системы $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, x_3 = z$, φ_1 и φ_2 – углы поворота поперечного сечения пластины, к которому принадлежит точка P , относительно осей x_2 и x_1 , соответственно. Все приведенные параметры соответствуют [19].

Заключение

В работе получены уравнения движения в перемещениях круглой ортотропной пластины на основе теории изгиба пластин третьего порядка. Полученные в работе уравнения движения позволят изучить динамику чувствительных элементов нанодатчиков с учетом наноразмерных эффектов и ортотропности материала, что в свою очередь может приблизить создание и широкое распространение НЭМС датчиков.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект 19-08-00807

Литература

1. Постановление Правительства РФ от 2 августа 2007 г. N 498 "О федеральной целевой программе "Развитие инфраструктуры nanoиндустрии в

Российской Федерации на 2008 - 2011 годы" (с изменениями и дополнениями)
<http://base.garant.ru/191635/>

2. Федеральный закон от 19 июля 2007 г. N 139-ФЗ "О Российской корпорации нанотехнологий" <https://rg.ru/2007/07/25/nano-korporaciya-dok.html>

3. Асеев А.Л. Нанотехнологии: вчера, сегодня, завтра // Наука из первых рук. 2008. С. 25-41

4. Указ Президента РФ от 7 июля 2011 г. N 899 "Об утверждении приоритетных направлений развития науки, технологий и техники в Российской Федерации и перечня критических технологий Российской Федерации" (с изменениями и дополнениями) <https://base.garant.ru/55171684/>

5. ГОСТ Р 56748.1-2015/ISO/TS 12901-1:2012 Нанотехнологии. Наноматериалы. Менеджмент риска. Часть 1. Общие положения.
<http://docs.cntd.ru/document/1200127486>

6. Gupta A., Akin D., Bashir R. Single virus particle mass detection using microresonators with nanoscale thickness // Applied Physics Letters. 2004. Vol. 84(11). P. 1976-1978

7. Single molecule mass spectroscopy enabled by nanoelectromechanical systems (NEMS-MS) <https://patents.google.com/patent/US8227747B2>

8. Pavelyev V.S., et al // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 984. 012011

9. Huang W., Feng L., Wang G., Reichmanis, E. Wearable Organic Nano - sensors // In Flexible and Wearable Electronics for Smart Clothing (eds G. Wang, C. Hou and H. Wang). 2020. <https://doi.org/10.1002/9783527818556.ch1>

10. <https://patents.google.com/patent/US20140355381A1>

11. Barulina M. A., et al // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 984. 012012

12. Ufuk Gul, Metin Aydogdu Vibration of layered nanobeams with periodic nanostructures // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2020. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1848592>

13. Hossein Darban, Francesco Fabbrocino, Raimondo Luciano Size-dependent linear elastic fracture of nanobeams // International Journal of Engineering Science. 2020. Vol. 157. 103381. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103381>.

14. Pisano A.A., Fuschi P., Polizzotto C. Shear Effects in Elastic Nanobeams // Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2020. P. 842-853. https://doi.org/10.1007/978-3-030-41057-5_68

15. Lu L., Guo X., Zhao J. A unified size-dependent plate model based on nonlocal strain gradient theory including surface effects // Applied Mathematical Modelling. 2019. Vol. 68. P. 583-602. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.023>

16. Chen W., Li, X. A new modified couple stress theory for anisotropic elasticity and microscale laminated Kirchhoff plate model // Archive of Applied Mechanics. 2013. Vol. 84. P. 323-341. <https://doi.org/10.1007/s00419-013-0802-1>

17. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Erofeev N.P., Dobriyan V., Barulina M.A., Krysko V.A. Quantifying Chaos by Various Computational Methods. Part 1: Simple Systems // Entropy. 2018. Vol. 20(3). 175. <https://doi.org/10.3390/e20030175>

18. Awrejcewicz, J., Krysko, A.V., Erofeev, N.P., Dobriyan, V., Barulina, M.A., Krysko, V.A. Quantifying Chaos by Various Computational Methods. Part 2: Vibrations of the Bernoulli–Euler Beam Subjected to Periodic and Colored Noise // Entropy. 2018. Vol. 20(3). 170. <https://doi.org/10.3390/e20030170>
19. Барулина М.А. Уравнения движения чувствительного элемента НЭМС-датчика как прямоугольной размерно-зависимой нанопластины // Нано- и микросистемная техника. 2020. Т. 22. № 3. С. 164-171.
20. Reddy J. N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. 2nd ed. CRC Press. Boca Raton. FL, 2007