

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: [mathmod.esrae.ru/32-121](http://mathmod.esrae.ru/32-121)

Ссылка для цитирования этой статьи:

Могилевич Л.И., Кондратов Д.В., Кондратова Т.С., Иванов С.В. Математическое моделирование волн деформации в двух соосных, кубически нелинейных оболочках, взаимодействующих с окружающей средой и заполненных жидкостью // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2020. №4  
*Выполнено при поддержке гранта 19-01-00014а*

УДК 539.3

DOI: 10.24411/2541-9269-2020-00003

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В ДВУХ СООСНЫХ, КУБИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБОЛОЧКАХ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ И ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

Могилевич Л.И.<sup>1</sup>, Кондратов Д.В.<sup>2</sup>, Кондратова Т.С.<sup>3</sup>, Иванов С.В.<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, [mogilevichli@gmail.com](mailto:mogilevichli@gmail.com)

<sup>2</sup> Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук (ИПТМУ РАН), г. Саратов, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, [kondratovdv@yandex.ru](mailto:kondratovdv@yandex.ru)

<sup>3</sup> Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, [kondratova.t99@gmail.com](mailto:kondratova.t99@gmail.com)

<sup>4</sup> Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, [evilgraywolf@gmail.com](mailto:evilgraywolf@gmail.com)

## MATHEMATICAL MODELING STRAIN WAVES IN TWO COAXIAL CUBIC NONLINEAR SHELLS WITH THE ENVIRONMENT AND FILLED WITH LIQUID

Mogilevich L.I.<sup>1</sup>, Kondratov D.V.<sup>2</sup>, Kondratova T.S.<sup>3</sup>, Ivanov S.V.<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, [mogilevichli@gmail.com](mailto:mogilevichli@gmail.com)

<sup>2</sup> Institute of Precision Mechanics and Control of the Russian Academy of Sciences (IPTMU RAS), Saratov, Russia, Saratov State University, Saratov, Russia, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, [kondratovdv@yandex.ru](mailto:kondratovdv@yandex.ru)

<sup>3</sup> Saratov State University, Saratov, Russia, [kondratova.t99@gmail.com](mailto:kondratova.t99@gmail.com)

<sup>4</sup> Saratov State University, Saratov, Russia, [evilgraywolf@gmail.com](mailto:evilgraywolf@gmail.com)

**Аннотация.** В данной статье исследуются продольные волны деформации в физически нелинейных соосных упругих оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, как между ними, так и во внутренней оболочке. Учтено влияние окружающей внешнюю оболочку среды на амплитуду и скорость волны.

Невозможно исследовать модели волн деформаций методами качественного анализа в случае заполнения внутренней оболочки вязкой несжимаемой жидкостью и при учете окружающей внешнюю оболочку упругой среды. Это приводит к необходимости применения численных методов.

Наличие влияния инерции движения жидкости во внутренней оболочке приводит к уменьшению скорости волн деформации, а наличие окружающей внешнюю оболочку упругой среды приводит к увеличению скорости. Вязкостное напряжение жидкости во внутренней оболочке приводит к уменьшению амплитуд волн.

Ключевые слова: нелинейные волны, упругие цилиндрические оболочки, вязкая несжимаемая жидкость

**Abstract.** This article studies longitudinal strain waves in physically nonlinear coaxial elastic shells containing a viscous incompressible fluid, both between them and in the inner shell. The influence of the environment surrounding the outer shell on the wave amplitude and speed is taken into account.

It is impossible to investigate deformation wave models by the methods of qualitative analysis in the case of filling the inner shell with a viscous incompressible fluid and taking into account the elastic medium surrounding the outer shell. This leads to the need of applying numerical methods.

The presence of the influence of the inertia of fluid motion in the inner shell leads to the decrease of the velocity of deformation waves, and the presence of the elastic medium surrounding the outer shell leads to the increase in the velocity. The viscous stress of the liquid in the inner shell leads to the decrease of the wave amplitudes.

Keywords: non-linear waves, elastic cylinder shell, viscous incompressible liquid

## 1. Введение

Исследование волнового процесса в упругих оболочках применяется, например, для диагностики трубопровода. Такие исследования солитонов проводились в [1-6]. Однако, в приведенных исследованиях не рассматривалось возникновение волновых эффектов в упругих элементах конструкции, взаимодействующих с вязкой несжимаемой жидкостью.

Распространение волн деформации в двух соосных нелинейных оболочках, заполненных вязкой несжимаемой жидкостью рассмотрено в [7]. С помощью вычислительного эксперимента установлено, что через слой жидкости между оболочками происходит обмен энергией между ними. Инерция движения жидкости между оболочками и во внутренней оболочке приводит к уменьшению скорости волны. Вязкое трение во внутренней оболочке приводит к падению амплитуд волн. В представленной работе исследуется влияние окружающей внешнюю оболочку упругой среды.

## 2. Определяющие и разрешающие соотношения физически нелинейной теории оболочек

Деформационная теория пластичности связывает компоненты тензора напряжений  $\sigma_x, \sigma_\Theta$  с компонентами тензора деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_\Theta$  и квадратом интенсивности деформаций  $\varepsilon_e$  [7].

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(i)} &= \frac{E}{1-\mu_0^2} \left( \varepsilon_x^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_\Theta^{(i)} \right) \left( 1 + \frac{m}{E} \varepsilon_u^{(i)2} \right); \quad \sigma_\Theta^{(i)} = \frac{E}{1-\mu_0^2} \left( \varepsilon_\Theta^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_x^{(i)} \right) \left( 1 + \frac{m}{E} \varepsilon_u^{(i)2} \right); \\ \varepsilon_u^{(i)2} &= \frac{4}{9} \left( \mu_1 \left( \varepsilon_x^{(i)2} + \varepsilon_\Theta^{(i)2} \right) - \mu_2 \varepsilon_x^{(i)} \varepsilon_\Theta^{(i)} \right), \\ \mu_1 &= \left[ 1 + \frac{\mu_0(2\mu_0-1)}{(1-\mu_0)^2} \right], \quad \mu_2 = \left[ 1 - \frac{2\mu_0(2\mu_0-1)}{(1-\mu_0)^2} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $m$  – константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие;  $\mu_0$  – коэффициент Пуассона материала оболочки.

Рассмотрим осесимметричные соосные цилиндрические оболочки. Обозначим:  $R^{(i)}$  – радиусы срединных поверхностей;  $h_0^{(i)}$  – толщины оболочки;  $U^{(i)}$  – продольное упругое перемещение;  $W^{(i)}$  – прогиб, направленный к центру кривизны ( $i=1$  для внешней,  $i=2$  для внутренней оболочек).

Запишем связь компонент деформаций с упругими перемещениями в виде

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_\Theta^{(i)} = -\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \quad (2)$$

где

$x$  – продольная координата вдоль срединной поверхности;

$z$  – нормальная координата в оболочке  $\left( -\frac{h_0^{(i)}}{2} \leq z \leq \frac{h_0^{(i)}}{2} \right)$ .

Квадрат интенсивности деформаций запишем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_u^{(i)2} &= \frac{4}{9} \left\langle \mu_1 \left\{ \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right]^2 + \frac{W^{(i)2}}{R^{(i)2}} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \mu_2 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая (1) – (3) уравнения динамики соосных упругих оболочек, внешняя из которых окружена упругой средой с коэффициентом постели  $k_l$  запишется в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \frac{4m}{9E} \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[ \mu_1 \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[ 3\mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right] \right\rangle = \\
 & \quad = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - [q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1)]_{R^{(i)}} \\
 & \quad - \frac{Eh_0^{(i)3}}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\langle \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \left\{ 1 + \frac{m}{E} \frac{4}{9} \left[ 3\mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \right. \right. \right. \quad (4) \\
 & \quad \left. \left. + 2(\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 3 \frac{h_0^{(i)2}}{20} \mu_1 \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right\rangle + \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \frac{m}{E} \frac{4}{9} \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[ \mu_1 \left[ \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[ 3\mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right] \right\rangle + \\
 & \quad + \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{1}{R^{(i)}} \left\langle \mu_0 \left[ \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m}{E} \frac{4}{9} \left\{ \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[ \mu_1 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \right. \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \right. \\
 & \left. + \mu_2 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left( \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[ 3\mu_1\mu_0 \left( \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - (\mu_1 - \mu_2\mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right\} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \\
 & + k_1 \frac{h_0}{R^3} \rho_0 h_0^{(i)} \frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)} W(2-i) - [(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)]_{R^{(i)}}
 \end{aligned}$$

где  $t$  – время;  $\rho_0^{(i)}$  – плотность материала оболочки;  $q_x^{(i)}$ ,  $q_n$  – напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения;  $i=1$  для внешней оболочки,  $i=2$  для внутренней оболочки,  $\tilde{q}_x$ ,  $\tilde{q}_n$  – напряжения со стороны жидкости, находящейся во внутренней оболочке.

### 3. Асимптотический метод исследования уравнений оболочек с жидкостью

Для волновых задач оболочку считаем бесконечной. Для продольных волн в оболочке вводятся безразмерные переменные и безразмерные параметры. Принимаем за характерную длину  $l$  – длину волны, а  $u_m$ ,  $w_m$  – характерные значения упругих перемещений

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, x^* = \frac{x}{l}, t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad (5)$$

$$w_m = h_0, u_m = \frac{h_0 l}{R^{(i)}}$$

$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu_0)}}$  – скорость распространения продольных упругих волн в оболочке.

Положим

$$\frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = \varepsilon \ll 1, \frac{R^{(i)2}}{l^2} = O(\varepsilon), \quad (6)$$

$$\frac{w_m}{h_0^{(i)}} = O(1), \frac{u_m}{l} \frac{R^{(i)}}{h_0^{(i)}} = O(1), \frac{m\varepsilon}{E} = O(1), \frac{h_0^{(i)2}}{l^2} = \frac{h_0^{(i)2}}{R^{(i)2}} \frac{R^{(i)2}}{l^2} = \varepsilon^3$$

где  $\varepsilon$  - малый параметр задачи.

Введем независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \tau = \varepsilon t^* \quad (7)$$

где  $\tau$  - медленное время;  $c$  – скорость волны.

В этих переменных (5)-(7), оставляя в уравнениях (4) члены порядка  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$  и отбрасывая члены с более высокими степенями, получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m}{R} u_3^{(i)} + \frac{m}{E} \frac{4}{9} \left[ \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m}{R^{(i)}} u_3^{(i)} \right) \right] \mu_1 \left[ \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{w_m}{R^{(i)}} \right)^2 u_3^{(i)2} \right] + \mu_2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \xi} \frac{w_m}{R^{(i)}} u_3^{(i)} \right] \right\rangle = \frac{u_m}{l} \left[ c^2 \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon c \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} \right] - \\ - \frac{l}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1)) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \xi} - \frac{w_m}{R} u_3^{(i)} + \frac{m}{E} \frac{4}{9} \left( \mu_0 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \xi} - \frac{w_m}{R^{(i)}} u_3^{(i)} \right) \left[ \mu_1 \left[ \left( \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{w_m}{R^{(i)}} \right)^2 u_3^{(i)2} \right] + \mu_2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial \xi} \frac{w_m}{R^{(i)}} u_3^{(i)} \right] = \frac{R^{(i)2}}{l^2} \frac{w_m}{R^{(i)}} \left[ c^2 \frac{\partial^2 u_3^{(i)}}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon c \frac{\partial^2 u_3^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} \right] + \\ + \frac{w_m}{R} \frac{h_0}{R} k_1 u_3^{(i)} (2-i) - \frac{R^{(i)}}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left( (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1) \right) \end{aligned}$$

Зависимые переменные представим в виде асимптотического разложения

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (9)$$

Получим систему уравнений, подставив (9) в (8), оставляя члены порядка  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right\rangle = c^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} \quad (10) \\ \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = 0 \end{aligned}$$

Из этой системы получаем

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}, \quad c^2 = 1 - \mu_0^2 \quad (11)$$

Таким образом  $u_{10}^{(i)}$  – является произвольной функцией, а безразмерная скорость волны  $c = (1 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}}$  и следовательно скорость волны равна  $\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$  – скорости волны в стержне, поскольку оболочка имеет бесконечную длину. При этом

$$\xi = \frac{1}{l} \left( x - \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} t \right).$$

Получим систему уравнений в приближении  $\varepsilon^2$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E \varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} + k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} (2 - i) = \\ & = - \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[ \left( q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1) \right) - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial \left( (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1) \right)}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

Полученное уравнение есть обобщенное модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза (МКДВ) для  $\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}$ .

В случае отсутствия жидкости правая часть уравнения равна нулю и получается модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза (МКДВ). Надо определить правую часть, решая уравнения гидродинамики.

#### 4. Исследование напряжений действующих на оболочку со стороны находящейся внутри жидкости

Рассмотрим две соосные бесконечно длинные упругие оболочки на рисунке 1, внутри которых находится вязкая несжимаемая жидкость. Ширина щели, занимаемой жидкостью  $\delta$ , радиус срединной поверхности оболочки  $R$ ;  $R_1 = R^{(1)} - \frac{h_0^{(1)}}{2}$  – внутренний радиус внешней оболочки;  $R_2 = R^{(2)} + \frac{h_0^{(2)}}{2}$  – внешний радиус внутренней оболочки;  $R_3 = R^{(2)} - \frac{h_0^{(2)}}{2}$  – внутренний радиус внутренней оболочки,

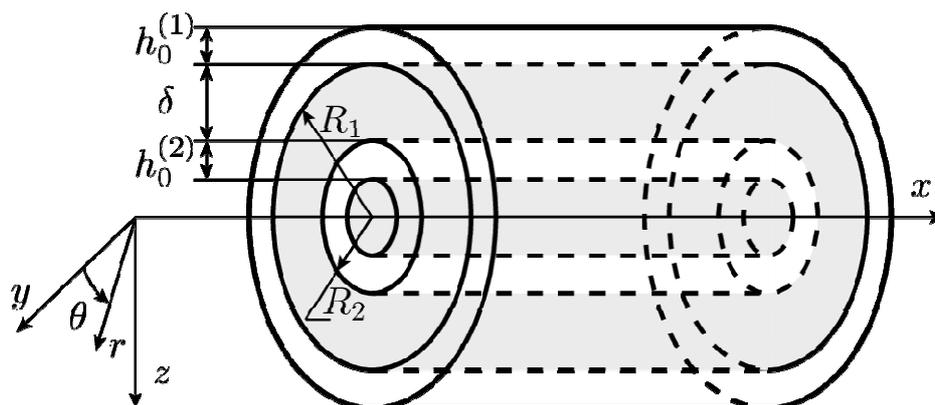


Рис.1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат  $(r, \Theta, x)$  в случае осесимметричного течения записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

На границе оболочек и жидкости на рис. 1 при  $r = R_i - W^{(i)}$  выполняются условия прилипания жидкости

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}, \quad V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}. \quad (14)$$

здесь  $t$  - время;  $r, x$  - цилиндрические координаты;  $V_r, V_x$  - проекции на оси цилиндрической системы координат вектора скорости;  $p$  - давление в жидкости;  $\rho$  - плотность жидкости;  $\nu$  - кинематический коэффициент вязкости.

Напряжения со стороны слоя жидкости определяются формулами

$$\begin{aligned} q_n &= \left[ P_{rr} \cos \left( -\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r \right) + P_{rx} \cos \left( -\bar{n}^{(i)}, \bar{i} \right) \right] \Big|_{r=R_i - W^{(i)}} \\ q_x &= - \left[ P_{rx} \cos \left( -\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r \right) + P_{xx} \cos \left( -\bar{n}^{(i)}, \bar{i} \right) \right] \Big|_{r=R_i - W^{(i)}} \\ P_{rr} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}; P_{rx} = \rho\nu \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right); P_{xx} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $\bar{n}^{(i)}$  - нормаль к срединной поверхности  $i$ -ой оболочки,  $\bar{n}_r, \bar{n}_\Theta, \bar{i}$  - орты базиса  $(r, \Theta, x)$  цилиндрической системы координат, центр которой расположен на геометрической оси. Если снести напряжения на невозмущенную поверхность оболочки, то можно считать  $-\bar{n} = \bar{n}_r$  и  $\cos\left(-\bar{n}, \bar{n}_r\right) = 1, \cos\left(-\bar{n}, \bar{i}\right) = 0$ . Напряжения  $\tilde{q}_x, \tilde{q}_n$  со стороны жидкости, которая находится во внутренней оболочке определяется теми же формулами (15), в которых обозначены плотность жидкости  $\tilde{\rho}$ , коэффициент кинематической вязкости  $\tilde{\nu}$ .

Согласно результатам работы [8] в кольцевом сечении найдем выражение, входящие в правую часть уравнений (12).

Учитывая (11) и полагая  $R^{(1)} = R^{(2)} = R, h_0^{(1)} = h_0^{(2)} = h_0$  в силу малости  $\psi = \frac{\delta}{R_2}, \lambda = \frac{w_m}{\delta}$  для первого уравнения имеем

$$-6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[ \left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right) - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2}\right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right) \right] \quad (16)$$

Для второго уравнения имеем

$$-6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[ \left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right) - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2}\right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right) \right] \quad (17)$$

В круговом сечении учитывая (11) при  $R_3 = R^{(2)} = R$  в силу малости  $\tilde{\psi} = \frac{R_3}{l}$  и  $\tilde{\lambda} = \frac{w_m}{R_3}$  получаем

$$\tilde{q}_x - \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} = \frac{\tilde{\nu}}{R c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} [1 - 2\mu_0]^2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{R}{l} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{1}{6} (1 - \mu_0^2) [(1 - 2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{u_m}{l} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2}. \quad (18)$$

## 5. Уравнения динамики соосных оболочек

Система уравнений с учетом найденных правых частей становится такой

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2\mu_0 + \mu_1\mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^4} + k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} = \\
 & = -\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} \left[ 12\sqrt{1-\mu_0^2} [(u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right] \\
 & \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2\mu_0 + \mu_1\mu_0^2) \left( \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \quad (19) \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^4} = \\
 & = -\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \left\{ \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} \left[ 12\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(2)} - u_{30}^{(1)}) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} \right) \left( 1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right] + \frac{\tilde{v}}{R c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4\sqrt{1-\mu_0^2} [1-2\mu_0]^2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{R}{l} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{1}{6} (1-\mu_0^2) [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{u_m}{l} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Можно также ввести обозначения  $u_{10\xi}^{(1)} = c_3 \phi^{(1)}$ ,  $u_{10\xi}^{(2)} = c_3 \phi^{(2)}$ ,  $\eta = c_1 \xi$ ,  $t = c_2 \tau$ , где

$$\begin{aligned}
 c_2 &= 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \left( \frac{R}{\delta} \right)^2 \left[ 1 - \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \frac{v}{\delta c_0}, c_1 = \left[ c_2 \varepsilon \left( \frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}} \right]^{\frac{1}{3}}, \\
 c_3 &= \left[ \frac{c_2}{c_1} \frac{E\varepsilon}{m} \left( \frac{l}{u_m} \right)^2 \frac{1}{2\sqrt{1-\mu^2} (\mu_1 + \mu_2\mu_0 + \mu_1\mu_0^2)} 6 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Далее положим

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \frac{\delta}{l} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{10} \frac{c_1}{c_2} \left(1 - \frac{\delta}{12\mu_0 R}\right), \\ \sigma_2 &= \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{\tilde{\nu}}{\varepsilon R c_0} 2(1-2\mu_0)^2 \frac{1}{c_2}, \\ \sigma_3 &= \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{R}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{12} \left[(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2\right] \frac{c_1}{c_2} \\ \sigma_4 &= k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \frac{c_1}{c_2}\end{aligned}\quad (21)$$

и получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}\phi_t^{(1)} + 6\phi^{(1)2} \phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} - \sigma_1(\phi_\eta^{(1)} - \phi_\eta^{(2)}) + \sigma_4 \phi_\eta^{(1)} &= 0, \\ \phi_t^{(2)} + 6\phi^{(2)2} \phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma_1(\phi_\eta^{(2)} - \phi_\eta^{(1)}) + \sigma_2 \phi^{(2)} - \sigma_3 \phi_\eta^{(2)} &= 0.\end{aligned}\quad (22)$$

Система уравнений (22) при отсутствии жидкости распадается на два независимых уравнения. Первое уравнение

$$\phi_t^{(1)} + 6\phi^{(1)2} \phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \sigma_4 \phi_\eta^{(1)} = 0$$

имеет точное решение

$$\phi^{(1)} = \frac{k}{\cosh(k\eta - (4k^3 + \sigma_4 k)t)}.$$

Второе уравнение

$$\phi_t^{(2)} + 6\phi^{(2)2} \phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} = 0$$

имеет точное решение

$$\phi^{(2)} = \frac{k}{\cosh(k\eta - 4k^3 t)}.\quad (23)$$

Из решений видно, что фазовые скорости  $4k^2 + \sigma_4$  и  $4k^2$  положительные и скорости волн сверхзвуковые. Окружающая упругая среда ( $\sigma_4 > 0$ ) увеличивает скорость этой волны во внешней оболочке.

При наличии жидкости требуется численное решение системы уравнений (22) с начальным условием при  $t=0$ , например

$$\phi^{(1)} = k \cosh^{-1}(k\eta), \phi^{(2)} = k \cosh^{-1}(k\eta),$$

или

$$\phi^{(1)} = k \cosh^{-1}(k\eta), \phi^{(2)} = 0$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При отсутствии влияния жидкости во внутренней оболочке и окружающей внешнюю оболочку среды система уравнений становится симметричной, имеющей точное решение (23), описывающее поведение солитонов в обеих оболочках. Этот результат адекватен полученному численному решению [7].

При наличии жидкости во внутренней оболочке и упругой среды, окружающей внешнюю оболочку требуется проведение численного решения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-01-00014а.*

## Литература

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 479 с.
2. Сокуринская Е.В. Некоторые точные решения задачи о нелинейных упругих волнах в пластине. // Письма в ЖТФ, 1994. Т. 20. Вып. 3. С. 36-41.
3. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A., Ruhenchik A.M. Soliton stability // Prepr. Inst. Automaton & Electrometry SB AN USSR. 1983. № 199. 62 p.
4. Дрейден Г.В., Порубов А.В., Самсонов А.М., Семенова И.В. Генерация и наблюдение солитона продольной деформации в пластине. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 21. С. 61-68.
5. Шенявский Л.А. Влияние геометрической нелинейности на волны, распространяющиеся в свободной тонкой пластине // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 6. С. 1089-1094.
6. Дрейден Г.В., Порубов А.В., Самсонов А.М., Семенова И.В. Генерация и наблюдение солитона продольной деформации в пластине. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 21. С. 61-68.
7. Mogilevich L., Ivanov S. (2021) Longitudinal Waves in Two Coaxial Elastic Shells with Hard Cubic Nonlinearity and Filled with a Viscous Incompressible Fluid. In: Dolinina O. et al. (eds) Recent Research in Control Engineering and Decision Making. ICIT 2020. Studies in Systems, Decision and Control, vol 337. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-65283-8\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-65283-8_2)
8. Агеев Р.В., Евдокимова Е.В., Ковалева И.А., Могилевич Л.И. Динамика осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубе кругового и кольцевого сечений // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2017. – № 3; URL: [mathmod.esrae.ru/15-50](http://mathmod.esrae.ru/15-50) (дата обращения: 17.12.2020).