

Электронный научный журнал "Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках" <http://mathmod.esrae.ru/>

URL статьи: mathmod.esrae.ru/32-122

Ссылка для цитирования этой статьи:

Могилевич Л.И., Иванов С.В., Месянжин А.В., Кондратов Д.В. Волны деформации в соосных оболочках с мягкой кубической нелинейностью, конструкционным демпфированием и жидкостью внутри. // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2020. №4

Выполнено при поддержке гранта 19-01-00014а

УДК 539.3

DOI: 10.24411/2541-9269-2020-00004

ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В СООСНЫХ ОБОЛОЧКАХ С МЯГКОЙ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ, КОНСТРУКЦИОННЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ И ЖИДКОСТЬЮ ВНУТРИ

Могилевич Л.И.¹, Иванов С.В.², Месянжин А.В.³, Кондратов Д.В.⁴

¹ Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, mogilevichli@gmail.com

² Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, evilgraywolf@gmail.com

³ Саратовский ОАО «Конструкторское бюро промышленной автоматики», Россия, Саратов, a.v.mesyanzhin@gmail.com

⁴ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук (ИПТМУ РАН), Россия, г. Саратов, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов kondratovdv@yandex.ru

STRAIN WAVES IN COAXIAL SHELLS WITH SOFT CUBIC NONLINEARITY, STRUCTURAL DAMPING AND THE LIQUID INSIDE

Mogilevich L.I.¹, Ivanov S.V.², Mesyanzhin A.V.³, Kondratov D.V.⁴

¹ Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, mogilevichli@gmail.com

² Saratov State University, Saratov, Russia, evilgraywolf@gmail.com

³ Industrial Automatics Design Bureau JSC, Russia, Saratov, a.v.mesyanzhin@gmail.com

⁴ Institute of Precision Mechanics and Control of the Russian Academy of Sciences (IPTMU RAS), Saratov, Russia, Saratov State University, Saratov, Russia, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, kondratovdv@yandex.ru

Аннотация. В работе исследуются продольные волны в соосных упругих оболочках с мягкой кубической нелинейностью, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, как между ними, так и во внутренней оболочке. Учтено влияние вязкости и инерции движения жидкости, конструкционного демпфирования материала оболочек в нормальном направлении на амплитуду и скорость волны. Невозможно исследовать модели волн деформаций методами качественного анализа в случае заполнения внутренней оболочки вязкой несжимаемой жидкостью. Это приводит к необходимости применения численных методов. При отсутствии влияния жидкости внутри оболочки, скорости и амплитуды волн, имеющих в оболочках, не меняются. Движение происходит в отрицательном направлении оси абсцисс. Это означает, что найденная нелинейная добавка к скоростям волн в линейном приближении (скорости звука) уменьшает скорости волн и они становятся дозвуковыми. Наличие влияния инерции движения жидкости во внутренней оболочке приводит к уменьшению скорости волн деформации. Вязкостное напряжение жидкости во внутренней оболочке приводит к уменьшению амплитуд волн. Конструкционное демпфирование в нормальном направлении увеличивает амплитуду волны и уменьшает ее скорость.

Ключевые слова: нелинейные волны, упругие цилиндрические оболочки, вязкая несжимаемая жидкость

Abstract. The paper investigates longitudinal waves in coaxial elastic shells with soft cubic nonlinearity, containing a viscous incompressible fluid, both between them and in the inner shell. The influence of the viscosity and inertia of fluid motion, structural damping of the shell material in the normal one on the wave amplitude and speed are taken into account. It is impossible to study the models of deformation waves by the methods of qualitative analysis in the case of filling the inner shell with a viscous incompressible fluid. This leads to the need for numerical methods. In the absence of the influence of the liquid inside the shell, the velocity and amplitude of the waves presented in the shells do not change. The movement takes place in the negative direction of the abscissa axis. This means that the found nonlinear addition to the wave velocities in the linear approximation (the speed of sound) reduces the wave velocities and they become subsonic. The presence of the influence of the inertia of motion of the liquid in the inner shell leads to a decrease in the velocity of the deformation waves. The viscous stress of the liquid in the inner shell leads to a decrease in the waves' amplitudes. Structural damping in the normal direction enlarges wave amplitude and reduces the wave velocity.

Keywords: non-linear waves, elastic cylinder shell, viscous incompressible liquid

1. Введение

Исследование волнового процесса в упругих оболочках имеет широкое применение в различных технических областях, например для определения напряжения в оболочках. Распространение волн деформации в упругих, вязкоупругих и нелинейных вязкоупругих оболочках и рассмотрены в [1–4]. В этих работах не рассматривается случай взаимодействия оболочек с вязкой несжимаемой жидкостью. В [5–7] рассмотрено взаимодействие оболочки с вязкой несжимаемой жидкостью, без учета волновых явлений, также не исследовано влияние локальных членов инерции.

В настоящее время применяются разнообразные методы для связанных и несвязанных задач.

При решении несвязанных задач рассматривается взаимодействие

жидкости, взаимодействующей с твердым телом. Определяют трение и давление, действующее со стороны жидкости на твердое тело. Таким образом предполагается отсутствие влияния деформации оболочки на движение жидкости [8]. Полученные параметры подставляются в уравнения динамики упругого тела, затем находятся продольные и нормальные (прогиб) перемещения. Таким образом определяется напряженно деформированное состояние упругой конструкции, что является целью в несвязанной задаче.

В случае связанной задачи уравнения динамики жидкости и уравнения динамики упругого тела и решаются одновременно, с учетом граничных условий. Такой метод решения ранее был применен в [8]. В настоящей статье будем применять указанный метод решения задачи для изучения волн деформации, возникающих в нелинейных упругих оболочках, взаимодействующих с вязкой жидкостью постоянной плотности с учетом инерции ее движения.

Невозможно исследовать модели волн деформаций, методами качественного анализа в случае заполнения оболочки вязкой несжимаемой жидкостью. Это приводит к необходимости применения численных методов.

В данной статье методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных соосных цилиндрических оболочках с мягкой кубической нелинейностью, отличающиеся от известных учетом наличия несжимаемой вязкой жидкости как между оболочками, так и во внутренней оболочке, при этом учтено конструкционное демпфирование оболочек в нормальном направлении. Выявлены эффекты влияния несжимаемой вязкой жидкости как между оболочками, так и во внутренней оболочке на поведение волны деформации в соосных оболочках.

2. Определяющие и разрешающие соотношения физически нелинейной теории оболочек

Деформационная теория пластичности связывает компоненты тензора напряжений σ_x , σ_Θ с компонентами тензора деформаций ε_x , ε_Θ и квадратом интенсивности деформаций ε_u .

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(i)} &= \frac{E}{1-\mu_0^2} \left(\varepsilon_x^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_\Theta^{(i)} \right) \left(1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^{(i)2} \right); \\ \sigma_\Theta^{(i)} &= \frac{E}{1-\mu_0^2} \left(\varepsilon_\Theta^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_x^{(i)} \right) \left(1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^{(i)2} \right); \\ \varepsilon_u^{(i)2} &= \frac{4}{9} \left(\mu_1 \left(\varepsilon_x^{(i)2} + \varepsilon_\Theta^{(i)2} \right) - \mu_2 \varepsilon_x^{(i)} \varepsilon_\Theta^{(i)} \right),\end{aligned}\tag{1}$$

$$\mu_1 = \left[1 + \frac{\mu_0(2\mu_0 - 1)}{(1 - \mu_0)^2} \right], \quad \mu_2 = \left[1 - \frac{2\mu_0(2\mu_0 - 1)}{(1 - \mu_0)^2} \right]$$

где E – модуль Юнга; m – константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие; μ_0 – коэффициент Пуассона материала оболочки.

Рассмотрим осесимметричные соосные цилиндрические оболочки. Обозначим: R_1 – радиус внутренней поверхности внешней оболочки; R_2 – радиус внешней поверхности внутренней оболочки; R_3 – радиус внутренней поверхности внутренней оболочки; $R^{(i)}$ – радиусы срединных поверхностей; $h_0^{(i)}$ – толщины оболочки; $U^{(i)}$ – продольное упругое перемещение; $W^{(i)}$ – прогиб, направленный к центру кривизны. ($i=1$ для внешней, $i=2$ для внутренней оболочек)

Запишем связь компонент деформаций с упругими перемещениями в виде

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_\Theta^{(i)} = -\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \quad (2)$$

где x – продольная координата вдоль срединной поверхности; z – нормальная координата в оболочке $\left(-\frac{h_0^{(i)}}{2} \leq z \leq \frac{h_0^{(i)}}{2} \right)$. Квадрат интенсивности деформаций

запишем в виде

$$\varepsilon_u^{(i)2} = \frac{4}{9} \left\langle \mu_1 \left\{ \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right]^2 + \frac{W^{(i)2}}{R^{(i)2}} \right\} + \mu_2 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right] \right\rangle \quad (3)$$

Определим усилия в срединной поверхности оболочки и момент по следующим формулам

$$N_x^{(i)} = \int_{-\frac{h_0^{(i)}}{2}}^{\frac{h_0^{(i)}}{2}} \sigma_x^{(i)} dz, \quad N_\Theta^{(i)} = \int_{-\frac{h_0^{(i)}}{2}}^{\frac{h_0^{(i)}}{2}} \sigma_\Theta^{(i)} dz, \quad M_x^{(i)} = \int_{-\frac{h_0^{(i)}}{2}}^{\frac{h_0^{(i)}}{2}} \sigma_x^{(i)} z dz \quad (4)$$

Уравнения динамики для оболочек запишем так же как и в физически линейной теории

$$\frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} -$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1) - W^{(i)} \frac{\partial(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\partial r} + U^{(i)} \frac{\partial(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\partial x} \right]_{R^{(i)}}, \quad (5) \\
 & \frac{\partial^2 M_x^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} N_x^{(i)} \right) + \frac{1}{R^{(i)}} N_\theta^{(i)} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} + \\
 & + \varepsilon_2 \frac{l}{R^{(i)2}} \rho_0 h_0^{(i)} \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} - \\
 & - \left[(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1) - W^{(i)} \frac{\partial((-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1))}{\partial r} + \right. \\
 & \left. + U^{(i)} \frac{\partial((-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1))}{\partial x} \right]_{R^{(i)}}
 \end{aligned}$$

где t – время; $\rho_0^{(i)}$ – плотность материала оболочки; $q_x^{(i)}$, q_n – напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения; r , x – цилиндрические координаты; \tilde{q}_x , \tilde{q}_n – напряжения со стороны жидкости, находящейся во внутренней оболочке, ε_2 – безразмерный коэффициент демпфирования материала оболочки.

Подставляя (1)-(4) в (5) получим уравнения в пересечениях

$$\begin{aligned}
 & \frac{E h_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \right. \\
 & - \frac{4m}{9E} \left\{ \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \right. \\
 & \left. + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[3\mu_1 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) + \right. \\
 & \left. \left. + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right\} \left. \right\rangle = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - \\
 & - \left[q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1) - W^{(i)} \frac{\partial(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\partial r} + U^{(i)} \frac{\partial(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\partial x} \right]_{R^{(i)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{Eh_0^{(i)3}}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\langle \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \left[1 - \frac{m}{E} \frac{4}{9} \left[3\mu_1 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + 2(\mu_2 - \mu_1\mu_0) \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + (\mu_1 - \mu_2\mu_0) \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + 3 \frac{h_0^{(i)2}}{20} \mu_1 \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right] \right\rangle + \tag{6} \\
 & + \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{m}{E} \frac{4}{9} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \mu_2 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right] \right\rangle + \\
 & + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[3\mu_1 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) + (\mu_2 - \mu_1\mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right] \right\rangle + \\
 & + \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{1}{R^{(i)}} \left\langle \mu_0 \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{m}{E} \frac{4}{9} \left[\mu_0 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \right. \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[3\mu_1\mu_0 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right\} = \\
 & = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \varepsilon_2 \frac{l}{R^2} \rho_0 h_0^{(i)} \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} - \\
 & - \left[(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1) - W^{(i)} \frac{\partial \left((-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1) \right)}{\partial r} + U^{(i)} \frac{\partial \left((-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1) \right)}{\partial x} \right]_{R^{(i)}}
 \end{aligned}$$

3. Асимптотический метод исследования уравнений оболочек

Проводимые оценки в безразмерных переменных, характеризуют рассматриваемые задачи. Для волновых задач оболочку считаем бесконечной. Для продольных волн в оболочке вводятся безразмерные переменные и безразмерные параметры. Принимаем за характерную длину l – длину волны, а u_m, w_m – характерные значения упругих перемещений

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, x^* = \frac{x}{l}, t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad (7)$$

$$r^* = \frac{r}{R^{(i)}}, w_m = h_0, u_m = \frac{h_0 l}{R^{(i)}}$$

$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu_0)}}$ – скорость распространения продольных упругих волн в оболочке.

Положим

$$\frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = \varepsilon \ll 1, \frac{R^{(i)2}}{l^2} = O(\varepsilon), \frac{w_m}{h_0^{(i)}} = O(1) \quad (8)$$

$$\frac{u_m}{l} \frac{R^{(i)}}{h_0^{(i)}} = O(1), \frac{m\varepsilon}{E} = O(1), \frac{h_0^{(i)2}}{l^2} = \frac{h_0^{(i)2}}{R^{(i)2}} \frac{R^{(i)2}}{l^2} = \varepsilon^3, \varepsilon_2 = O(\varepsilon)$$

где ε - малый параметр задачи.

Введем независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \tau = \varepsilon t^* \quad (9)$$

где τ - медленное время; c – скорость волны.

Зависимые переменные представим в виде асимптотического разложения

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (10)$$

Получим систему уравнений, подставив (7)-(10) в (6), оставляя члены порядка ε

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30} \right\rangle = c^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} \quad (11)$$

$$\mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = 0$$

Из этой системы получаем

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}, \quad c^2 = 1 - \mu_0^2 \quad (12)$$

Таким образом безразмерная скорость волны $c = (1 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}}$

Получим систему уравнений в приближении ε^2 .

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E \varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 2 \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^3} = \\ & = - \frac{1}{2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1)) - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial ((-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1))}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Получена система обобщенных модифицированных уравнений Кортевега

– де Вриза - Бюргера (МКДВ-Б) для $\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}$.

Определим правые части, решая уравнений гидродинамики.

4. Исследование напряжений действующих на оболочку со стороны находящейся внутри жидкости

Рассмотрим соосные бесконечно длинные упругие оболочки на рисунке 1, внутри которых находится вязкая несжимаемая жидкость. Ширина щели, занимаемой жидкостью $\delta = R_1 - R_2$,

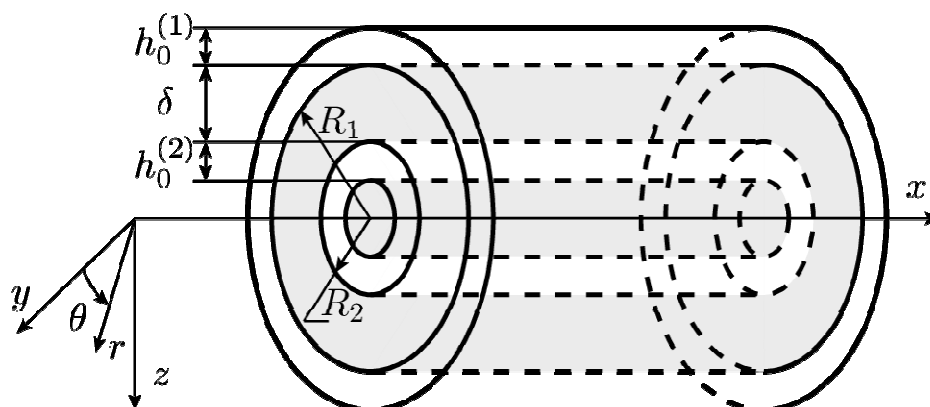


Рис.1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат (r, Θ, x) в случае осесимметричного течения записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

На границе оболочек и жидкости на рис. 1 при $r = R_i - W^{(i)}$ выполняются условия прилипания жидкости

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}, \quad V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}. \quad (15)$$

здесь V_r, V_x - проекции на оси цилиндрической системы координат вектора скорости; p - давление в жидкости; ρ - плотность жидкости; ν - кинематический коэффициент вязкости.

Напряжения со стороны слоя жидкости определяются формулами

$$\begin{aligned} q_n &= \left[P_{rr} \cos \left(-\hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{n}_r \right) + P_{rx} \cos \left(-\hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{i} \right) \right]_{r=R_i - W^{(i)}} \\ q_x &= - \left[P_{rx} \cos \left(-\hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{n}_r \right) + P_{xx} \cos \left(-\hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{i} \right) \right]_{r=R_i - W^{(i)}} \end{aligned} \quad (16)$$

$$P_{rr} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}; \quad P_{rx} = \rho\nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right); \quad P_{xx} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_x}{\partial x}$$

В подходе Эйлера здесь имеем

$$\begin{aligned} \cos\left(-\hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{n}_r\right) &= \frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|}, & \cos\left(-\hat{\bar{n}}^{(i)}, \bar{i}\right) &= -\frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}, \\ \cos\left(-\hat{\bar{n}}, \bar{n}_r\right) &= \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}, & \cos\left(-\hat{\bar{n}}, \bar{i}\right) &= -\frac{\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}}{\left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (17) \\ |\bar{N}| &= (R_i - W^{(i)}) \left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Здесь \bar{n} - нормаль к срединной поверхности i -ой оболочки, \bar{n}_r , \bar{n}_θ , \bar{i} - орты базиса (r, θ, x) цилиндрической системы координат, центр которой расположен на геометрической оси. Если снять напряжения на невозмущенную поверхность оболочки, то можно считать $-\bar{n} = \bar{n}_r$ и $\cos\left(-\hat{\bar{n}}, \bar{n}_r\right) = 1$,

$\cos\left(-\hat{\bar{n}}, \bar{i}\right) = 0$. Напряжения \tilde{q}_x , \tilde{q}_n со стороны жидкости, которая находится во

внутренней оболочке определяется теми же формулами (16), (17), в которых плотность жидкости $\tilde{\rho}$, коэффициент кинематической вязкости $\tilde{\nu}$.

В работе [8] в кольцевом сечении найдены выражения, входящие в правые части уравнений (13).

Для первого уравнения имеем

$$\begin{aligned} -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2}\right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right) \right] \quad (18) \end{aligned}$$

Для второго уравнения имеем

$$\begin{aligned} -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2}\right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R}\right) \right] \quad (19) \end{aligned}$$

Здесь положено $w_m l u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_m R^{(i)} u_{10\xi}^{(i)}$ и $R^{(1)} = R^{(2)} = R$, $h_0^{(1)} = h_0^{(2)} = h_0$ в силу малости ширины щели, занимаемой жидкостью по сравнению с внешним радиусом внутренней оболочки и малостью прогибов оболочек по сравнению с шириной щели, занимаемой жидкостью

В круговом сечении в работе [8] получено

$$\begin{aligned} \tilde{q}_x - \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} &= \frac{\tilde{\nu}}{Rc_0} \tilde{\rho} c_0^2 4\sqrt{1-\mu_0^2} [1-2\mu_0]^2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \\ &- \frac{R}{l} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{1}{6} (1-\mu_0^2) [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{u_m}{l} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь принято $R_3 = R^{(2)} = R$.

5. Уравнения динамики соосных оболочек

Система уравнений (13) при этом принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \\ + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^4} - \frac{\varepsilon_2 \mu_0^2}{\varepsilon} \frac{\partial^3 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^3} = \\ = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{Rc_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1-\mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right] \\ \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \\ + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^4} - \frac{\varepsilon_2 \mu_0^2}{\varepsilon} \frac{\partial^3 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^3} = \\ = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{Rc_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1-\mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right] - \end{aligned} \quad (21)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \left\{ + \frac{\tilde{v}}{R c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4\sqrt{1-\mu_0^2} [1-2\mu_0]^2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \right. \\ \left. - \frac{R}{l} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{1}{6} (1-\mu_0^2) [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{u_m}{l} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right\}$$

Введем обозначения $u_{10\xi}^{(1)} = c_3 \phi^{(1)}$, $u_{10\xi}^{(2)} = c_3 \phi^{(2)}$, $\eta = c_1 \xi$, $t = c_2 \tau$, где

$$c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \left[1 - \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \frac{v}{\delta c_0}, c_1 = \left[c_2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}} \right]^{\frac{1}{3}}, \\ c_3 = \left[\frac{c_2 E \varepsilon}{c_1 m} \left(\frac{l}{u_m} \right)^2 \frac{1}{2\sqrt{1-\mu^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

ПОЛОЖИМ

$$\sigma_1 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \frac{\delta}{l} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{10} \frac{c_1}{c_2} \left(1 - \frac{\delta}{12\mu_0 R} \right), \\ \sigma_2 = \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{\tilde{v}}{\varepsilon R c_0} 2(1-2\mu_0)^2 \frac{1}{c_2}, \sigma_6 = \frac{\varepsilon_2 \mu_0^2 c_1^2}{\varepsilon 2 c_2} \quad (23) \\ \sigma_3 = \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{R}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{12} [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{c_1}{c_2}$$

В результате получим систему уравнений

$$\phi_t^{(1)} - 6\phi^{(1)2} \phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} - \sigma_1 (\phi_\eta^{(1)} - \phi_\eta^{(2)}) - \sigma_6 \phi_{\eta\eta}^{(1)} = 0 \\ \phi_t^{(2)} - 6\phi^{(2)2} \phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma_1 (\phi_\eta^{(2)} - \phi_\eta^{(1)}) + \sigma_2 \phi^{(2)} - \\ - \sigma_3 \phi_\eta^{(2)} - \sigma_6 \phi_{\eta\eta}^{(2)} = 0 \quad (24)$$

Система уравнений (24) имеет в качестве точного решения при $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (отсутствие жидкости во внутренней оболочке) кинк

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = \frac{\sigma_6}{6} + kth \left\{ k\eta + \left(2k^3 + k \frac{\sigma_6^2}{6} \right) t \right\} \quad (25)$$

Если, кроме того, $\sigma_6 = 0$ (отсутствие конструкционного демпфирования в нормальном направлении) получится следующее решение

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = kth(k\eta + 2k^3 t). \quad (26)$$

Из этих формул следует, что скорость волны деформации дозвуковая. Фазовая скорость волны отрицательна для решения (25) и имеет вид

$$-\left(2k^2 + \frac{\sigma_5^2}{6}\right),$$

для решения (26) она имеет вид

$$-2k^2.$$

Конструкционное демпфирование в нормальном направлении ($\sigma_6 > 0$) поднимает график функции над осью абсцисс и смещает влево.

При наличии жидкости внутри второй оболочки требуется численное решение систем уравнений (24) при начальном условии ($t=0$) например

$$\phi^{(1)} = \frac{\sigma_6}{6} + kth\{k\eta\} \quad \phi^{(2)} = \frac{\sigma_6}{6} + kth\{k\eta\} \quad (27)$$

или

$$\phi^{(1)} = \frac{\sigma_6}{6} + kth\{k\eta\}, \quad \phi^{(2)} = 0. \quad (28)$$

Заключение.

При отсутствии жидкости во внутренней оболочке система обобщенных уравнений МКдВ-Б (24) имеет точное решение в виде кинка (25), из которого видно влияние конструкционного демпфирования в нормальном направлении на фазовую скорость кинка и наличие пьедестала для него. При наличии жидкости во внутренней оболочке требуется вычислительный эксперимент.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-01-00014.

Литература

1. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1995. — Т. 3, № 1. — С. 52–58.
2. Ерофеев В. И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. — 2002. — Т. 48, № 6. — С. 725–740.
3. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение // РАН. Акустический журнал. — 2001. — Т. 47, № 3. — С. 359–363.
4. А.М. Доронин, В.И. Ерофеев Трехволновое резонансное взаимодействие в упругопластической среде // Вестник ПНИПУ 2015. Механика №3 с. 52-62
5. Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // Вестник ПНИПУ 2014. Механика №3 с. 17-35

6. Лекомцев С. В. Конечно-элементные алгоритмы расчета собственных колебаний трехмерных оболочек // ВМСС. — 2012. — Т. 5, № 2. — С. 233–243.
7. Бочкарев С. А., Матвеев В. П. Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости // ВМСС. — 2013. — Т. 6, № 1. — С. 94–102.
8. Mogilevich L., Ivanov S. (2021) Longitudinal Waves in Two Coaxial Elastic Shells with Hard Cubic Nonlinearity and Filled with a Viscous Incompressible Fluid. In: Dolinina O. et al. (eds) Recent Research in Control Engineering and Decision Making. ICIT 2020. Studies in Systems, Decision and Control, vol 337. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-65283-8_2